

А. Ф. Ревуженко

МЕХАНИКА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД И НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА
СИБИРСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ ИНСТИТУТ

А.Ф. РЕВУЖЕНКО

МЕХАНИКА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД И НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный редактор академик РАН Е.И. Шемякин

ИЗДАТЕЛЬСТВО НОВОСИБИРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
НОВОСИБИРСК 2000

Ревуженко А.Ф.

Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 428 с.

ISBN 5-7615-0491-X

Рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с теорией деформирования твердых тел и ее приложениями. Описаны методики и приборы для исследования определяющих уравнений различных сред. Приведены новые факты по дилатансии и неупругому поведению сыпучих, вязко-пластических и пластических сред; исследованы процессы возникновения упорядоченных структур различных типов (регулярных систем линий скольжения, вихрей, полигональных систем трещин). Построены математические модели деформирования и локализации сдвигов, приведены решения ряда краевых задач. Обнаружен эффект направленного переноса при сложном нагружении, на экспериментальных и математических моделях показана возможность направленного переноса масс Земли приливными волнами. Рассмотрен ряд прикладных задач, связанных с горным делом и обработкой порошковых материалов.

Показана возможность применения методов нестандартного анализа и теории функций гиперкомплексной переменной для описания иерархии структурных уровней пластических сред.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела, а также для инженеров и конструкторов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга посвящена механике деформирования упруго-пластических материалов. К ним можно отнести практически все конструкционные материалы, горные породы, сыпучие и порошковые материалы, некоторые типы грунтов и т. д. Вообще, как известно, разделение материалов на упруго-пластические, хрупкие, вязко-пластические и другие достаточно условно. Все зависит от конкретных условий нагружения и поставленных задач.

Представление о задачах, рассмотренных в книге, и ее плане можно получить из оглавления. Первая часть книги посвящена теоретической разработке экспериментальных методик для исследования определяющих уравнений различных сред. Далее излагаются экспериментальные результаты и математические модели деформирования упруго-пластических сред, включая геосреду, характерными свойствами которой являются внутреннее трение и дилатансия. При этом массив горных пород рассматривается как активная среда с внутренними источниками и стоками энергии.

В последние десятилетия возрос интерес к явлениям самоорганизации в различных нелинейных системах. Сложилась новая наука — синергетика. В механике явления „самоорганизации“ известны очень давно. Именно они во многом послужили источником идей и далеко идущих обобщений, сделанных в синергетике. Поэтому поиск новых регулярных структур представляет большой интерес. Такие структуры имеют и самостоятельное значение. В работе рассмотрена следующая общая постановка задачи: указать требования к деформируемому материалу, к форме образцов и условиям их нагружения, которые приводят к возникновению в образце регулярных, упорядоченных структур. Фактически речь идет об экспериментальном алгоритме получения регулярных структур. Такой алгоритм был построен и применен для получения новых структур: систем линий скольжения, полигональных блоков и вихревых структур, возникающих при различных видах сложного нагружения, ряда пространственно-временных структур, а также структур, связанных с попеременным переключением скольжения на пересекающихся системах линий (турбулентное пластическое течение). Целый класс равновесных структур был получен при реализации сдвигового течения между параллельными пластинами (типа Куэтта). Построенный алгоритм охватывает структуры, полученные ранее другим путем (ячеистую структуру, возникающую при однородном сдвиге сыпучего материала, автомодельную структуру пластического течения в сходящихся каналах) и, кроме того, известные структуры, возникающие в вязких жидкостях, горных породах и грунтах (ячейки Бенара, вихри Тейлора, Кельвина—Гельмгольца, полигональные системы трещин и др.).

Далее строятся точные решения уравнений идеальной пластичности, рассматриваются поправки на дилатансию в основные справочные формулы механики грунтов, приводятся

решения ряда теоретических и прикладных задач (деформирование вокруг выработок, в сходящихся каналах и бункерах, задачи о регулярных структурах, применение пластических моделей для расчета рулонированных упругих оболочек и т. д.). В частности, при исследовании задачи о напряженно-деформированном состоянии разупрочняющегося массива вокруг выработки в точном решении был получен неожиданный результат. Оказалось, что с удалением от контура выработки возможно непоследовательное чередование зон, когда неупругая зона сменяется упругой зоной, затем опять неупругой и т. д. Позднее этот эффект получил название явления зональной дезинтеграции.

Приведены также решения некоторых задач, связанных с технологией получения различных материалов методами порошковой металлургии (задачи дозирования, смешения и уплотнения), а также решения ряда задач, связанных с горным производством, обогащением полезных ископаемых, разработкой средств проведения реометрических исследований. При исследовании сложного нагружения с непрерывным поворотом осей тензора деформаций был обнаружен эффект направленного переноса. Рассмотрены его приложения. Разработан кинематический метод экспериментального моделирования приливных деформаций Земли и других небесных тел. Показано, что приливные волны могут приводить к направленному переносу масс и дифференциальному вращению внутреннего ядра (в том числе и с восточным дрейфом).

Вторая часть книги посвящена вопросам, связанным с математическим аппаратом механики упруго-пластических сред. Как известно, механика опирается на классический аппарат анализа и уравнений математической физики. Можно ожидать, что дальнейшее развитие этой области будет связано с изменениями в самом ее математическом аппарате. По крайней мере, потребность в этом возникает уже сейчас. Так, для описания иерархии структурных уровней пластического деформирования необходимо введение новых математических объектов, которые оказались тесно связанными с актуальной бесконечно малой величиной нестандартного анализа. Здесь появляется также возможность использования методов теории функций гиперкомплексного переменного.

Как известно, любые прикладные теории опираются на целый ряд более или менее правдоподобных гипотез. Представляет интерес количественная оценка степени значимости таких гипотез. Трудность этой задачи состоит в том, что здесь возникает необходимость оперирования понятием „бесконечность“. В заключение рассмотрен возможный подход к этой проблеме, связанный с теоретико-множественными методами и методами нестандартного анализа.

В процессе выполнения работы для автора большое значение имели контакты с коллегами, а также сотрудниками ряда организаций Министерства среднего машиностроения (Минатомэнерго) и горных предприятий. Стимулом служили также лекции, которые автор читал студентам Новосибирского государственного и Сибирского независимого университетов.

Большая часть исследований выполнена в лаборатории механики твердого тела Института горного дела СО РАН, некоторые работы выполнялись в Новосибирском государственном и Сибирском независимом университетах. Автор признателен сотрудникам этих организаций, оказавшим помощь в работе и оформлении рукописи. Особую признательность хотелось бы выразить А.П. Бобрякову, О.П. Бушмановой, В.П. Косых, С.В. Лаврико-

ву, С.Б. Стажевскому, с которыми связывают многие годы совместной работы, а также В.Б. Бохонову за помощь в проведении численных расчетов по динамике приливов. Ряд работ был выполнен совместно с А.И. Димовым, безвременно ушедшим из жизни, талантливым исследователем и прекрасным человеком.

Автор выражает благодарность академику РАН В.Е. Панину, член-корр. РАН В.М. Фомину за ценные обсуждения результатов, проф. Инсбрукского университета Дм. Колимбау — за сотрудничество и поддержку.

Автор выражает искреннюю признательность своему учителю академику РАН Шемякину Евгению Ивановичу за постоянное внимание к работе и поддержку на всех этапах ее выполнения.

Часть публикуемых результатов была получена в рамках финансируемых проектов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-00545; 98-05-65234; 97-05-64850), фондов РФФИ-ИНТАС (проект 95-0742) и Международного научного фонда.

*А. Ревуженко
Новосибирск, 03 февраля 2000 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Круг задач, которые относятся к механике упруго-пластических сред, чрезвычайно широк. С одной стороны это задачи, связанные с деформированием различных конструктивных материалов, с другой — задачи, связанные с поведением геоматериалов в различных искусственных и природных условиях. По своим реологическим свойствам геоматериалы отличаются от конструктивных (например, металлов) только наличием внутреннего трения и дилатансии. (Хотя есть данные, что и металлы при определенных условиях проявляют свойства внутреннего трения и пластического разрыхления).

К геоматериалам относятся все материалы, из которых сложены внешние оболочки Земли: различные горные породы, сыпучие и связные грунты и т. д. В инженерной деятельности, технике и вообще в жизни они имеют для нас не меньшее значение, чем жидкости и газы. Механическая обработка почв — основа производства продуктов питания, деформирование и разрушение горных пород, руды, угля — основа промышленного производства, строительство дорог, наземных и подземных сооружений — также связано с деформированием геоматериалов. Их исследование необходимо также для понимания многих процессов, происходящих в естественных условиях: землетрясений, движения лавин, наносов, наступления песков и др. Кроме этого, представляет интерес и тот факт, что геоматериалы во многом аналогичны гранулированным и порошковым материалам, различным бетонам и т. д.

Несмотря на такую широкую область приложений, механика геоматериалов развита в гораздо меньшей степени, чем, например, гидродинамика, газовая динамика или теория упругости. Если в этих классических областях основные уравнения получены более пятидесяти лет назад и последующие усилия направлены на дальнейшее развитие теории и приложения, то для геоматериалов вопрос даже о самих уравнениях до сих пор во многом не решен. В определенной степени это относится и к моделям конструктивных материалов. Поэтому для исследования конкретных задач используются различные специализированные модели, предназначенные для описания только отдельных классов нагружений.

Таким образом, область приложений механики упруго-пластических сред чрезвычайно обширна. Однако не только приложения являются стимулом для ее развития. Как и любая достаточно богатая и сложная теория, механика деформируемых сред имеет в определенном смысле и самостоятельную жизнь. Здесь уместно привести слова А. Лява из предисловия к его курсу по теории упругости, ставшему классическим: „Большинство людей, благодаря исследованиям которых зародилась и сформировалась теория упругости, интересовались скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом, стремились скорее познать мир, чем сделать его более удобным“.

Результаты, изложенные в настоящей книге, основаны на публикациях [1—136]. Некоторые результаты публикуются впервые. В силу ограничения на объем книги часть материала излагается в реферативной форме. По этой же причине сокращено и описание выкладок.

Литература, посвященная механике деформируемого твердого тела, практически необозрима. В настоящей работе не ставилась задача дать даже ее краткий обзор. Ряд основных результатов, полученных в этой области, и дальнейшие ссылки можно найти в оригинальных работах и обзорах Адушкина, Аннина, Быковцева, Гольдина, Григоряна, Гудехуса, Добрецова, Ивлева, Ишлинского, Кирдяшкина, Колимбаса, Кондаурова, Морозова, Мосолова, Мруза, Мясникова, Нигматуллина, Никитина, Николаевского, Панина, Парийского, Родионова, Роско, Садовского, Сизова, Сорохтина, Титова, Ушакова, Фомина, Христиановича, Цветкова, Черноусько, Шемякина и др. [137—168]. Ряд ссылок дается по ходу изложения.

Краткое содержание книги изложено в Предисловии. Здесь остановимся только на одной проблеме, связанной с разработкой новых математических моделей деформирования твердых тел. Хорошо известно, что для любой теории большое значение имеет ее математический аппарат. Основой аппарата является совокупность математических объектов, которые входят в арсенал теории. Собственно задача теории и состоит в том, чтобы посмотреть, как разыгрываются отношения между ее объектами при тех или иных внешних посылах. При этом содержательная теория дает такое богатство сценариев, что можно говорить о некоторой собственной идеальной жизни ее идеальных объектов. От прикладной теории дополнительно требуется, чтобы эта идеальная жизнь хотя бы в определенной степени соответствовала реальным процессам, которые происходят в природе и различных искусственных условиях. Поэтому любое оправданное расширение круга математических объектов, которые фигурируют в теории, значительно увеличивает ее возможности.

Здесь, правда, возникает одна проблема, которая является общей для многих теоретических построений. Она связана с тем, что число потенциально возможных путей развития теорий заведомо превосходит число исследователей, работающих в данной области. Поэтому все более явной становится та же самая проблема, которая возникла при возведении Вавилонской башни — проблема смешения языков. В теоретической математике эта проблема стоит более остро и обсуждается в печати [169, 170]. По-видимому, и в механике также назрела необходимость ее формулировки, обсуждения и выработки какой-то оптимальной стратегии, если это вообще возможно.

Можно предположить, что одна из позиций такой стратегии будет включать в себя известный принцип, согласно которому никакие новые гипотезы (можно добавить — новые понятия и новые направления развития теорий) без необходимости вводиться не должны. Вопрос только в том, что понимать под необходимостью? Опыт теоретической математики показывает, что нельзя считать необходимостью построения, которые связаны только с обобщением известных теорий [169]. Наверное, каждый раз следует ставить под сомнение и целесообразность построений, которые связаны только с сугубо внутренними потребностями той или иной теории. В целом эта проблема выходит за рамки не только механики, но и вообще науки. Именно в такой постановке в работе [170] указан путь, на котором можно ожидать ее принципиального разрешения. При исследовании конкретных вопросов

можно принять в качестве достаточного следующий критерий „необходимости“: теоретические построения являются заведомо оправданными, если просматривается хотя бы какая-то область их возможных реальных приложений [171, 172].

Есть основания надеяться, что нетрадиционные математические объекты, которые рассматриваются ниже, этому критерию удовлетворяют. Как отмечалось, их введение было вызвано необходимостью описания иерархии структурных уровней пластических сред. Кроме того, они оказались тесно связанными с основными объектами нестандартного анализа.

Методы нестандартного анализа являются сравнительно новыми (в их современном виде) и уже находят применение в решении различных задач математической физики. Результаты по общей теории нестандартных методов, ее приложениям и дальнейшие ссылки можно найти в трудах Альбеверии, Девиса, Кусраева, Кутателадзе, Линдстрема, Нельсона, Робинса, Фенстада, Хуэнг-Крона, Успенского [173—178].

Глава 1. ТЕОРИЯ ОДНОРОДНЫХ АФФИННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

§ 1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основную задачу феноменологической механики сплошных сред можно сформулировать таким образом. Пусть задано некоторое тело V (рис.1.1) О материале тела заранее ничего не известно. Требуется построить уравнения, которые описывали бы процесс деформирования материала под нагрузками, и определить значения параметров материала, которые фигурируют в этих уравнениях. Для этого из материала можно изготавливать любые образцы и подвергать их любым доступным программам нагружения.

В принципе для решения исходной задачи можно использовать любые экспериментальные данные. Например, можно вдавливать в тело различные штампы и фиксировать изменение глубины внедрения при различных нагрузках. Можно использовать другие способы нагружения, например, следующий. Предположим, что из материала изготовлен цилиндрический или плоский стержень (точнее — пластина, находящаяся в условиях плоской деформации; для удобства остановимся на последнем варианте, рис. 1.2). Реализуем следующую программу нагружения. Сместим правый конец стержня вправо на расстояние u_0 от начального положения, а левый конец — на то же самое расстояние u_0 влево. Условия захвата на обоих концах одинаковы и не препятствуют естественному сужению стержня. Ясно, что для этой операции потребуется некоторое усилие $P(u_0)$.

Таким образом, в обоих опытах (рис. 1.1, 1.2) фиксируются некоторые функции $P(u_0)$, которые связаны со свойствами материала. Однако по своей значимости для решения пос-

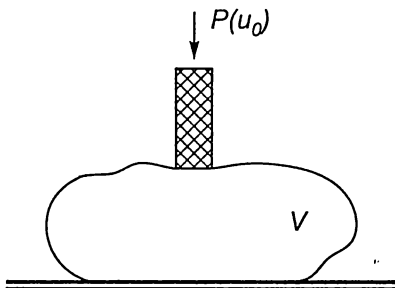


Рис. 1.1

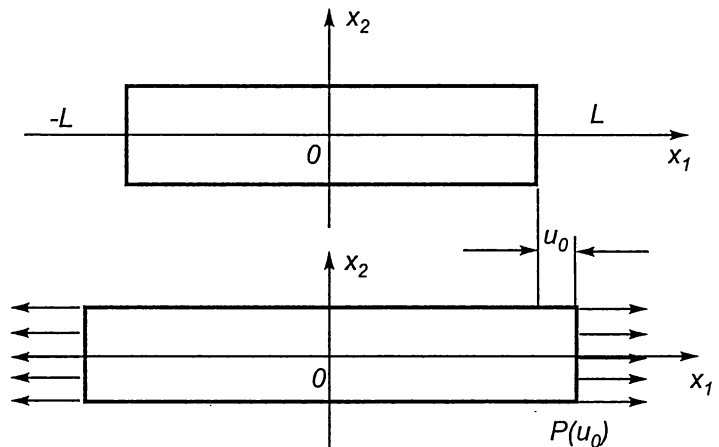


Рис. 1.2

тавленной задачи рассмотренные опыты отличаются друг от друга принципиально. Действительно, интерпретация первого опыта наталкивается на значительные трудности (связанные с необходимостью решения краевой задачи) в то время, как во втором случае интерпретация никаких трудностей не представляет. Это легко показать, если поставить следующий вопрос: какое перемещение получит середина стержня при заданном симметричном смещении его концов? По-видимому, это самый простой нетривиальный вопрос в механике сплошных сред. Из соображений симметрии ясно, что середина стержня останется на месте (при этом должны выполняться только ограничения общего характера, которые рассмотрим ниже). Из таких же соображений симметрии следует, что точка $x_1 = L/2$ сместится на расстояние $u_0/2$ и т. д. Таким образом, легко находится все поле смещений и, следовательно, деформации тела. По измеренной силе P определяются напряжения. Принципиально важным здесь является то обстоятельство, что полученный результат не зависит ни от свойств материала, ни от его параметров. Материал может быть как упругим или упруго-пластическим, так и обладать широким спектром наследственных свойств и т. д. Распределение смещений в нем всегда будет линейным по координатам, а распределение напряжений — однородным. Поэтому такого рода эксперименты являются идеальными для решения поставленной задачи.

Возникает вопрос: существуют ли другие столь же замечательные способы нагружения? Необходимость в постановке такого вопроса связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, большинство реальных материалов обнаруживают весьма сложные свойства, так что для их идентификации данных только об одноосном растяжении недостаточно. Второе обстоятельство очевидно. Оно связано с тем, что далеко не из любого материала можно изготовить стержень, который необходим для рассмотренного эксперимента. Достаточно указать на вязкие жидкости, на сложные реологические среды, различные грунты, порошковые, сыпучие и многие другие материалы.

Итак, необходимо найти условия нагружения, которые для самых разных материалов каждый раз приводили бы к одной и той же кинематике деформирования независимо от реологического поведения и конкретных параметров материала. Иными словами, кинематика смещения любой точки среды должна однозначно определяться только общими соображениями симметрии того же типа, что и в задаче о растяжении стержня. Принципиальный ответ на поставленный вопрос хорошо известен: в идеальных опытах должно быть реализовано однородное распределение деформаций и напряжений.

Интересно отметить, что необходимость в изучении различных процессов с однородным распределением деформаций и их скоростей возникает во многих областях механики. Под разными названиями они появлялись при изучении целого ряда разнообразных проблем. История их исследования насчитывает много десятков лет и связана с такими именами как Дирихле, Дедекинд, Риман, Пуанкаре, Ламб, Жуковский [179—182]. Из современных работ отметим работы Овсянникова, Пухначева, Невзглядова [183—186].

С чисто геометрической точки зрения процесс однородного деформирования сводится к последовательности аффинных преобразований. Результаты общей теории аффинных преобразований хорошо известны и приводятся во многих учебниках по геометрии [187]. Так, в общей теории доказывалось, что при любых аффинных преобразованиях прямые переходят в прямые, круги переходят в эллипсы, а сферы — в эллипсоиды. Кроме того, аффинные преобразования сохраняют свойства параллельности прямых, плоскостей и т. д.

Общие свойства аффинных преобразований исследованы, по-видимому, самым исчерпывающим образом.

В настоящей работе рассмотрим проблему аффинных преобразований с точки зрения механики. Поставим следующие задачи: 1) дать общую классификацию однородных процессов деформирования (однородных течений); 2) рассмотреть все однородные течения с точки зрения возможностей для их реализации; 3) разработать стенды и экспериментальные методики для реализации однородных течений или течений, близких к однородным.

Самым удивительным оказалось то, что такая в общем-то почти очевидная постановка задачи позволила получить в этой классической области ряд новых результатов, а именно, найти новые однородные течения и способы для их практической реализации [1—5].

§ 1.2. ОДНОРОДНЫЕ СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

1.2.1. Суперпозиция простых сдвигов

Поставим следующую задачу: найти новые сдвиговые течения, которые можно было бы использовать в модельных экспериментах. В случае простого сдвига число степеней свободы равно единице и поле скоростей имеет вид

$$v_1 = \gamma x_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad (1.1)$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты вектора скорости в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) , $\gamma \geq 0$ — заданная постоянная (рис. 1.3).

Течения вида (1.1), так же как и одноосное растяжение, являются идеальными для проведения экспериментов по исследованию математических моделей среды. Действительно, пусть область заполнена некоторым материалом с однородными свойствами. Предположим, что на границе области удалось реализовать кинематику (1.1). Тогда внутри области может реализоваться только простой сдвиг. При этом должны быть соблюдены только некоторые ограничения общего характера. Их рассмотрим позже. Главным здесь, как и в задаче о стержне, является то обстоятельство, что поле скоростей будет иметь вид (1.1) независимо от реологии среды. Это позволяет по измерениям на границе определять напряжения и деформации внутри области.

В (1.1) осуществляется только один тип нагружения — простое нагружение без поворота осей тензоров напряжений и деформаций. Для пластических сред исследование только таких путей нагружения является недостаточным. Будем искать новые классы сложных нагружений путем наложения последовательностей течений вида (1.1). Для этого предположим, что поле скоростей (1.1) реа-

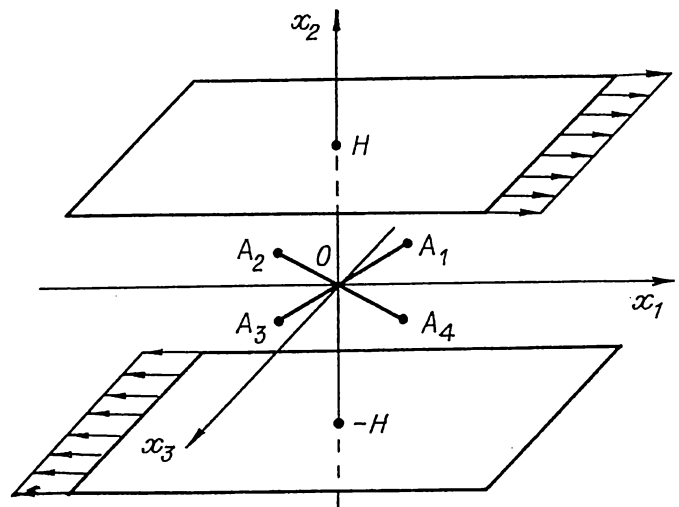


Рис. 1.3

лизуется в промежутке времени t от 0 до Δt . За это время каждая материальная точка (x_1, x_2, x_3) получит следующее перемещение:

$$v_1 \Delta t = \gamma x_2 \Delta t, \quad v_2 \Delta t = 0, \quad v_3 \Delta t = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что устройство нагружения представляет собой две параллельные пластины $x_2 = \pm H$. Причем если пластины смещаются вдоль своих плоскостей на векторы $\{\pm \gamma H \Delta t, 0, 0\}$, то материальные точки любой области, заключенной между ними, получают смещения (1.2). Таким образом, возможная неустойчивость, инерционные и краевые эффекты игнорируются.

Итак, пусть материальные точки некоторого тела сместились на вектор (1.2). Зафиксируем новые положения всех точек и удалим устройство нагружения $x_2 = \pm H$. Затем введем новое устройство нагружения $x'_2 = \pm H$, где система координат $Ox'_1 x'_2 x'_3$ повернута относительно прежней системы на некоторый угол, пропорциональный величине Δt . Новое устройство „включим“ на время Δt . На прежние смещения (1.2) наложатся смещения того же типа, но в координатах $Ox'_1 x'_2 x'_3$ и т. д. Таким образом, задавая различные программы поворота осей, можно получать различные типы сложных нагружений.

Выкладки будут проще, если указанную суперпозицию рассмотреть с другой точки зрения. А именно: после первого шага (1.2) удалим устройство нагружения $x_2 = \pm H$ и затем за следующий промежуток времени от $t = \Delta t$ до $t = 2\Delta t$ повернем тело как жесткое целое вокруг оси Ox_3 на угол $\omega \Delta t$. После этого снова введем устройство нагружения $x_2 = \pm H$ и дадим материальным точкам смещения (1.2) уже из их нового положения. И так далее. Результат наложения можно проследить, исследуя траектории фиксированных материальных частиц. Так, если взять материальную частицу, имевшую в начальный момент времени $t = 0$ координаты (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , то в моменты $t = \Delta t, 2\Delta t \dots$ ее координаты будут равны

$$\begin{aligned} x_1(\Delta t) &= x_1^0 + \gamma x_2^0 \Delta t, \quad x_2(\Delta t) = x_2^0, \quad x_3(\Delta t) = x_3^0, \\ x_1(2\Delta t) &= x_1(\Delta t) - \omega x_2(\Delta t) \Delta t, \\ x_2(2\Delta t) &= x_2(\Delta t) + \omega x_1(\Delta t) \Delta t, \quad x_3(2\Delta t) = x_3(\Delta t) \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь процесс, в котором шаг по времени неограниченно уменьшается $\Delta t \rightarrow 0$, а ω представляет собой неотрицательную постоянную величину. Исходя из (1.3), легко показать, что траектории материальных частиц описываются следующей системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = (\gamma - \omega)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2 = \omega x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3 = 0. \quad (1.4)$$

Последнее уравнение показывает, что движение является плоским. Поэтому достаточно ограничиться его исследованием в плоскости $x_3 = 0$.

Линейные системы хорошо изучены в связи с анализом различных течений „фазовой жидкости“ [188]. Рассмотрим смысл решений в поставленной выше задаче. В общем случае движение каждой материальной частицы сплошной среды определяется массовыми силами, которые действуют непосредственно на эту частицу, и, кроме того, внутренними напряжениями, которые зависят от взаимодействия с соседними частицами.

Посмотрим теперь на процесс деформирования с несколько иной точки зрения. Предположим, что в какой-то момент все связи между частицами сплошной среды распались. Пусть их роль взяли на себя некоторые эквивалентные массовые силы. Тогда среду можно рассматривать как множество не связанных между собой материальных частиц, которые движутся независимо друг от друга в некотором поле эквивалентных массовых сил. При заданной кинематике деформирования вычисление эквивалентного поля трудностей не представляет. Так, для течения (1.4) компоненты сил, отнесенные к плотности, равны

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\omega(\omega - \gamma)x_1, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\omega(\omega - \gamma)x_2.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Отсюда следует, что суперпозиции (1.4) течений (1.1) отвечает центральное поле эквивалентных массовых сил, обладающих потенциалом

$$W = -\omega(\omega - \gamma)(x_1^2 + x_2^2)/2,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x_2}.$$

Начальные условия имеют вид

$$x_1(0) = x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = -(\omega - \gamma)x_2^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \omega x_1^0.\tag{1.6}$$

В зависимости от соотношения между скоростями сдвига γ и поворота ω возможны три различных режима течения.

1.2.2. Эллиптические и гиперболические течения

Пусть $\omega > \gamma$. Тогда равенства (1.5) означают, что все частицы притягиваются центром $x_1 = 0, x_2 = 0$. Решение уравнений (1.5) с начальными условиями (1.6) имеет вид

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1^0 \cos \mu t - \frac{\mu}{\omega} x_2^0 \sin \mu t, \\ x_2(t) &= \frac{\omega}{\mu} x_1^0 \sin \mu t + x_2^0 \cos \mu t,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\mu = \sqrt{\omega(\omega - \gamma)}$.

Как и следовало ожидать, преобразованию (2.1) отвечает аффинная деформация. Для выяснения ее характера достаточно рассмотреть движение только одной материальной точки, например точки $x_1^0 = 1, x_2^0 = 0$. Из (2.1) можно заключить, что точка обращается вокруг начала координат по замкнутой эллиптической траектории. Причем закон обращения является кеплеровским: за равные промежутки времени радиус-вектор точки $\vec{r}(t)$ ометает одинаковые площади

$$\bar{v}\bar{n} = 0, \quad |\bar{v} \times \bar{r}| = \text{const}.\tag{2.2}$$

Здесь \bar{v} — вектор скорости, \bar{n} — нормаль к эллипсу

$$x_1^2 + \frac{\omega - \gamma}{\omega} x_2^2 = 1. \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь второй класс течений, которым соответствует условие $\omega < \gamma$. Здесь эквивалентные массовые силы являются отталкивающими. Закон движения точки имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} \left(x_1^0 + \frac{\nu}{\omega} x_2^0 \right) e^{\nu t} + \frac{1}{2} \left(x_1^0 - \frac{\nu}{\omega} x_2^0 \right) e^{-\nu t}, \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\nu} x_1^0 + x_2^0 \right) e^{\nu t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{\nu} x_1^0 + x_2^0 \right) e^{-\nu t}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\nu = \sqrt{\omega(\gamma - \omega)}$. Согласно (2.4), траектории движения материальных точек представляют собой гиперболы. В отличие от случая (2.3) закон движения одной точки, например $x_1^0 = 1, x_2^0 = 0$, уже не дает представления обо всей картине деформирования среды. Это связано с тем, что любая материальная точка всегда остается только на одной из ветвей гиперболы. Для получения полной картины достаточно рассмотреть движение четырех точек: $x_1^0 = \pm 1, x_2^0 = 0$ и $x_1^0 = 0, x_2^0 = \pm 1$. Легко показать, что эти точки движутся по соответствующим ветвям двух гипербол:

$$x_1^2 - \frac{\gamma - \omega}{\omega} x_2^2 = 1, \quad -\frac{\omega}{\gamma - \omega} x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (2.5)$$

Причем, как и для эллиптического течения, закон движения является кеплеровским, т. е. по-прежнему выполняются равенства (2.2), если под n понимать нормаль к гиперболам (2.5).

Таким образом, характер течения существенно зависит от знака коэффициента в правой части равенств (1.5): знаку „-“ отвечают силы притяжения и эллиптические траектории, а знаку „+“ — силы отталкивания и гиперболические траектории. Пограничными между ними являются вырожденные случаи, когда коэффициент равен нулю. Эквивалентные массовые силы в этом случае отсутствуют. Согласно (1.5), это возможно только при $\omega = 0$ либо $\omega = \gamma$. Смысл первого равенства очевиден. Ему соответствует исходное течение Куэтта вдоль горизонтальных направлений $x_2 = \text{const}$. Появление второго пограничного режима на первый взгляд кажется неожиданным. Из уравнений (1.4) видно, что ему соответствует точно такое же течение Куэтта, как и (1.1), но уже вдоль вертикальных осей $x_1 = \text{const}$, хотя устройство нагружения представляет собой две параллельные и, по-прежнему, горизонтальные пластины.

Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть и на само классическое течение Куэтта (1.1). Его исходное определение кажется весьма естественным и предельно простым: берется бесконечный слой $|x_2| \leq H$ и на его границе задается вектор скорости, направленный по касательной к границе. При этом величина скорости остается постоянной. Однако с более общей точки зрения главным здесь являются не эти обстоятельства, а тот факт, что постоянной является секториальная скорость. Иными словами, краевое условие $|\bar{v}| = \text{const}$, заданное на параллельных прямых, принадлежит к кеплеровскому типу $|\bar{v} \times \bar{r}| = \text{const}$, и именно это обстоятельство обеспечивает однородность деформации внутри области течения.

Итак, если внутри области распределение скоростей имеет вид (1.4), то на границах выполняются равенства (2.2). Верно ли обратное? Если предположить выполнение равенств (2.2) на соответствующей границе, то последует ли отсюда выполнение (1.4) и внутри области? Хорошо известно, что в общем случае это не так. Однако можно указать один исключительный класс течений, когда задание определенной кинематики на границе гарантирует некоторое фиксированное и вполне определенное распределение скоростей внутри области независимо от реологии среды. То есть как для упругих, так и для вязких, пластических, сыпучих и других сред краевые условия будут давать каждый раз одно и то же распределение скоростей внутри области. При этом должны выполняться только некоторые ограничения общего характера. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В общем случае процесс деформирования сплошной среды описывается замкнутой системой уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \frac{dv_i}{dt}. \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij} = R_{ij} [e_{kl}, \varepsilon_{kl}], \quad e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right), \quad (2.7)$$

$$2\varepsilon_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \frac{\partial u_2}{\partial x_l} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \frac{\partial u_3}{\partial x_l},$$

$$u_i = f_i(t, x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in S_t, \quad (2.8)$$

$$u_i|_{t=0} = g_i(x_1, x_2, x_3), v_i|_{t=0} = G_i(x_1, x_2, x_3), \quad (2.9)$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}, e_{kl}$ — компоненты тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций, $u_i, v_i, \rho X_i$ — компоненты векторов перемещений, скоростей и массовых сил, ρ — плотность, S_t — граница области в момент t ; f_i, g_i, G_i — граничные и начальные условия. Все индексы принимают значения 1, 2, 3. Определяющие уравнения (2.7) записаны символически через функционалы R_{ij} . Смысл функционалов в следующем. Если для элемента среды задан путь нагружения, т. е. функции $\varepsilon_{kl}(t), e_{kl}(t)$ при $0 \leq t \leq t'$, то функционалы позволяют определить компоненты напряжений в момент t' . Система (2.6)–(2.9) замкнута. Поэтому если нет данных хотя бы об одном из уравнений, то задача становится неопределенной. Но это в общем случае. Как отмечалось, есть один исключительный класс течений, когда информации только о краевых условиях уже достаточно для однозначного определения поля скоростей и внутри области независимо от реологии среды. Подстановка равенств (2.7) в уравнения движения (2.6) показывает, что вид функционалов R_{ij} не влияет на кинематику только в тех случаях, когда компоненты тензоров деформаций и скоростей деформаций от пространственных координат не зависят, т. е. $e_{kl} = e_{kl}(t), \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(t)$. Для таких течений распределение деформаций по пространству однородно. Поэтому

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = a_{1i}(t)x_1 + a_{2i}(t)x_2 + a_{3i}(t)x_3. \quad (2.10)$$

Будем считать, что девять функций $a_{ij}(t)$ заданы. Тогда (2.10) представляет собой замкнутую систему трех уравнений ($i = 1, 2, 3$) для трех неизвестных функций $x_i(t)$. Предположим, что ее решение при начальных условиях $x_i(0) = x_i^0$ построено:

$$x_i = x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0). \quad (2.11)$$

Выделим в начальный момент времени $t = 0$ некоторую область, ограниченную замкнутой поверхностью S_0 . Равенства (2.11) позволяют проследить эволюцию поверхности во времени $S_0 \rightarrow S_t$. Поставим теперь для системы (2.6), (2.7) следующую начально-краевую задачу. Предположим, что в момент $t = 0$ заданы условия (2.9), где вид функций определяется из (2.11). Далее на границе S_t зададим условия (2.8), (2.11). Это означает, что распределение скоростей (2.10) задается только на границе.

Нетрудно показать, что при выполнении ряда условий решение краевой задачи будет иметь вид (2.10), т. е. равенства (2.10) будут выполняться и внутри области. Действительно, предположим, что материал является реологически устойчивым и, кроме того, инерционными и массовыми силами можно пренебречь. Предположим также, что есть единственность решения. Тогда полю скоростей (2.10) отвечает однородное распределение напряжений. Поэтому уравнения равновесия выполняются тождественно. Начальные и граничные условия также удовлетворяются. Эти выводы не меняются, если в замкнутой системе использовать любые другие меры деформаций и напряжений.

Очевидно, что рассмотренные выше течения с кеплеровскими граничными условиями к типу (2.10) принадлежат. Это означает, что наряду с исходными течениями (1.1) они также являются теоретически идеальными для проведения исследований определяющих соотношений.

Практическая сторона дела сводится к следующему. Берется образец исследуемого материала необходимой формы S_0 . Затем создается устройство для деформирования образца по программе $S_0 \rightarrow S_t$. В процессе деформирования измеряются нагрузки и перемещения. Это позволяет непосредственно из эксперимента определять все компоненты напряжений, деформаций и скорости их изменения. Задавая различные программы нагружения, можно получить информацию о всех функционалах, фигурирующих в определяющих уравнениях. Основным здесь является то обстоятельство, что для интерпретации эксперимента необходимости в решении краевой задачи не возникает. Для сыпучих материалов эта программа была реализована в [16].

Ниже будем использовать терминологию, принятую для „фазовой жидкости“ [188], а именно: течение сплошной среды будем называть финитным если траектории материальных частиц при $t \rightarrow \infty$ лежат в конечной области, и инфинитным — в противном случае. Очевидно, что гиперболические и вырожденные течения относятся к инфинитным, а эллиптические течения — к финитным. Для реометрических исследований наиболее интересны финитные течения, так как их можно осуществлять неограниченно долго в стационарном режиме. Начнем с эллиптического течения. Ему соответствуют поле скоростей (2.1) и тензор скоростей деформаций с компонентами $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$; $e_{12} = \gamma/2$.

Подсчитаем теперь компоненты самих деформаций. Это имеет значение для материалов, в которых так или иначе сохраняется память об исходной конфигурации, например, для идеально упругих, упруго-пластических и др. В качестве исходного возьмем естественное состояние, которому соответствуют нулевые деформации и напряжения.

Рассмотрим общий случай, когда естественное состояние может не совпадать с состоянием (2.1) при $t = 0$. Обозначим через x_i^* координаты материальных точек тела в естест-

венном состоянии. Дадим телу некоторую аффинную деформацию, которую назовем начальной. Новые координаты обозначим через x_i^0 . Тогда

$$x_i^0 = k_{i1}x_1^* + k_{i2}x_2^* + k_{i3}x_3^*, \quad (2.12)$$

где k_{ij} — заданные постоянные коэффициенты. Для плоской деформации положим $k_{13} = k_{23} = k_{31} = k_{32} = 0$; $k_{33} = 1$. Подберем начальную форму тела такой, чтобы после реализации начальной деформации (2.12) граница тела преобразовалась в эллипс (2.3). Дальнейшее нагружение будем проводить по программе (2.1). В этом случае поле смещений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= (k_{11}x_1^* + k_{12}x_2^*) \cos \mu t - (k_{21}x_1^* + k_{22}x_2^*) \frac{\mu}{\omega} \sin \mu t - x_1^*, \\ u_2 &= (k_{11}x_1^* + k_{12}x_2^*) \frac{\omega}{\mu} \sin \mu t + (k_{21}x_1^* + k_{22}x_2^*) \cos \mu t - x_2^*. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Моменту $t = 0$ отвечает начальная деформация (2.12). Очевидно, что в общем случае инварианты тензора деформаций

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \\ J_3 &= |\varepsilon_{ij}| \end{aligned} \quad (2.14)$$

будут периодическими функциями времени. Есть, однако, такие исключительные сочетания параметров k_{ij} , при которых в формулах для инвариантов все слагаемые, зависящие от времени, полностью компенсируют друг друга. Из (2.14), (2.7), (2.13) можно получить необходимые уравнения для k_{ij} . Здесь они не приводятся для сокращения записей. Достаточно указать только одно из решений этих уравнений:

$$k_{11} = k, \quad k_{22} = \frac{\omega}{\mu} k, \quad k_{12} = k_{21} = 0, \quad (2.15)$$

где k — свободный параметр. Подстановка (2.15) в (2.13) и затем в (2.7) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{11} &= k^2 \frac{\omega^2}{\mu^2} \sin^2 \mu t + k^2 \cos^2 \mu t - 1, \\ 2\varepsilon_{22} &= k^2 \frac{\omega^2}{\mu^2} \cos^2 \mu t + k^2 \sin^2 \mu t - 1, \\ 2\varepsilon_{12} &= k^2 \left(\frac{\omega^2}{\mu^2} - 1 \right) \sin \mu t \cos \mu t, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда и из определений (2.14) получаем

$$J_1 = \frac{k^2}{2} \left(\frac{\omega^2}{\mu^2} + 1 \right) - 1, \quad 4J_2 = k^4 \frac{\omega^2}{\mu^2} - k^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\mu^2} \right) + 1, \quad J_3 = 0.$$

Нетрудно определить угол между главным направлением тензора деформаций и осью Ox_1 (обозначим его через α). Из равенств (2.16) следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} = -\operatorname{tg} 2\mu t.$$

Таким образом, здесь имеем процесс деформирования, когда с увеличением параметра нагружения все инварианты тензора деформаций остаются неизменными, а результатом нагружения является только поворот главных осей тензора деформаций. Подобные ситуации имеют особый смысл для сыпучих и пластических материалов, так как они соответствуют траекториям нагружения, направленным вдоль поверхности текучести (нейтральное нагружение). Тот факт, что последовательное наложение инфинитных течений Куэтта привело к качественному изменению его характера, объясняется очень просто. Рассмотрим различные материальные волокна, один из концов которых находится в неподвижной точке O (см. рис. 1.3). Волокна OA_1 и OA_3 лежат в квадрантах 1 и 3. Они неограниченно удлиняются и покинуть эти квадранты не могут. Волокна OA_2 и OA_4 , пока их концы лежат в квадрантах 2 и 4, укорачиваются, а затем переходят в квадрант 1 или 3 и удлиняются. В эллиптическом течении обеспечивается принудительный поворот материального волокна вокруг оси Ox_3 . Поэтому в положении OA_1 волокно удлиняется, затем переходит в положение OA_2 , укорачивается и т. д. Таким образом деформация линейных элементов становится периодической, а течение в целом — финитным.

1.2.3. Пространственные течения

Указанная выше интерпретация эллиптического течения приводит к новой идее. Очевидно, что волокно OA_1 можно перевести в положение OA_4 , вращая его не только в плоскости Ox_1x_2 , но и по конической поверхности вокруг оси Ox_1 . В этом случае квадранты 2 и 3 станут для него недоступными, но основной результат — чередование деформаций растяжения и сжатия — будет достигнут. Поэтому можно ожидать, что и здесь суперпозиция течений Куэтта также приведет к финитному течению.

Теперь формальные построения. Выделим некоторую область между пластинами $x_2 = \pm H$. В промежутке времени от 0 до Δt реализуем течение Куэтта (1.1). В результате каждая материальная частица получит смещения (1.2). Зафиксируем новые положения частиц, удалим устройство нагружения и за время от $t = \Delta t$ до $t = 2\Delta t$ повернем тело вокруг оси Ox_1 на угол $\Omega\Delta t$. После этого снова введем устройство нагружения $x_2 = \pm H$ и дадим смещения (1.2) за время от $t = 2\Delta t$ до $t = 3\Delta t$ и т. д.

Просуммируем смещения произвольной материальной частицы с исходными координатами (x_1^0, x_2^0, x_3^0) и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. В итоге придем к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \gamma x_2, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\Omega x_3, \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \Omega x_2. \quad (3.1)$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\gamma x_2^0}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{\gamma x_3^0}{\Omega} \cos \Omega t + \left(x_1^0 - \frac{\gamma x_3^0}{\Omega} \right), \\ x_2 &= -x_3^0 \sin \Omega t + x_2^0 \cos \Omega t, \\ x_3 &= x_2^0 \sin \Omega t + x_3^0 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полученное течение является финитным. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} x_2^2(t) + x_3^2(t) &= (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 = \text{const}, \\ x_3(t) &= \frac{\Omega}{\gamma} [x_1(t) - x_1^0] + x_3^0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первое условие означает, что материальная частица все время остается на круговой цилиндрической поверхности с осью Ox_1 . Второе условие показывает, что траектория целиком лежит в плоскости, ортогональной координатной плоскости $x_2 = 0$ и составляющей с основанием цилиндра угол, равный $\arctg \gamma / \Omega$. Таким образом, траектория совпадает с сечением цилиндра плоскостью и, следовательно, представляет собой эллипс (рис. 1.4). Полуоси эллипса, отнесенные к радиусу цилиндра $R = \sqrt{(x_2^0)^2 + (x_3^0)^2}$, равны 1 и $\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2} / \Omega$. Центр эллипса лежит на оси цилиндра. Если из центра к материальной частице провести радиус-вектор, то нетрудно показать, что закон движения частицы по эллиптической орбите будет кеплеровским: за равное время радиус-вектор ометает одинаковые площади и секторная скорость постоянна.

Таким образом, полученное сдвиговое течение, которое реализуется в прямом круговом цилиндре, является однородным и пространственным. При этом кеплеровский закон обращения приводит к тому, что проекции точек на основание цилиндра движутся по окружностям с постоянной угловой скоростью. Это обстоятельство можно использовать для конструктивной реализации кеплеровского закона движения. Естественно, что имеет место и предельный переход к исходному плоско-параллельному течению Куэтта (при $\Omega = 0$).

Рассмотрим теперь деформации. Возьмем некоторый образец материала в естественном состоянии, дадим ему начальную деформацию (2.12) и затем будем проводить нагружение по программе (3.2). В общем случае инварианты (2.14) будут периодическими функциями времени. Есть, однако, исключительные исходные состояния, которые дают постоянные значения инвариантов. Соответствующие уравнения на коэффициенты (2.12) довольно громоздки. Требуемые исходные состояния проще подобрать. Пусть

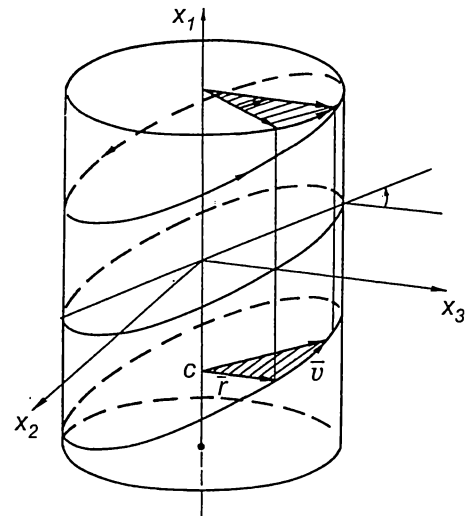


Рис. 1.4

$$x_1^0 = x_1^* + \frac{\gamma}{\Omega} x_3^*, x_2^0 = x_2^*, x_3^0 = x_3^*.$$

Тогда поле перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - x_1^* = \frac{\gamma}{\Omega} x_2^* \sin \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega} x_3^* \cos \Omega t, \\ u_2 &= x_2 - x_2^* = x_2^* (\cos \Omega t - 1) - x_3^* \sin \Omega t, \\ u_3 &= x_3 - x_3^* = x_2^* \sin \Omega t + x_3^* (\cos \Omega t - 1). \end{aligned}$$

Нелинейный тензор деформаций равен

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2\Omega} \sin \Omega t & \frac{\gamma}{2\Omega} \cos \Omega t \\ \frac{\gamma}{2\Omega} \sin \Omega t & \frac{\gamma^2}{2\Omega^2} \sin^2 \Omega t & \frac{\gamma^2}{2\Omega^2} \sin \Omega t \cos \Omega t \\ \frac{\gamma}{2\Omega} \cos \Omega t & \frac{\gamma^2}{2\Omega^2} \sin \Omega t \cos \Omega t & \frac{\gamma^2}{2\Omega^2} \cos^2 \Omega t \end{pmatrix}.$$

Инварианты тензора и величины главных деформаций постоянны:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\gamma^2}{2\Omega^2}, J_2 = -\frac{\gamma^2}{4\Omega^2}, J_3 = 0, \\ \varepsilon_1 &= 0, \quad \varepsilon_{2,3} = \frac{\gamma^2}{4\Omega^2} \pm \frac{\gamma}{2\Omega} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2}}. \end{aligned}$$

В процессе нагружения меняются только направления главных осей. При этом оси тензора поворачиваются так, что направление ε_1 скользит по плоскости $x_1 = \text{const}$, оставаясь все время ортогональным к оси Ox_1 , а два других направления описывают круговые конусы, оси которых совпадают с осью Ox_1 . Таким образом, здесь реализуется сложное нагружение нейтрального типа с непрерывным поворотом осей тензора деформаций.

Естественно теперь рассмотреть третью возможность, когда суперпозиция течений Ку-этта осуществляется путем их поворота вокруг оси Ox_2 . Возьмем материальное волокно, расположенное в квадранте 1, т. е. в области растяжения (см. рис. 1.3). При его повороте вокруг оси Ox_2 волокно переходит в квадрант 2 и, следовательно, сжимается. Затем опять переходит в квадрант 1, растягивается и т. д. Квадранты 3 и 4 являются для него недоступными, но чередование деформаций растяжения и сжатия здесь по-прежнему имеет место. Поэтому можно ожидать, что и в этом случае будет получено финитное течение. Выпишем систему уравнений для рассматриваемой суперпозиции:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \gamma x_2 + \theta x_3, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} = -\theta x_1, \quad (3.4)$$

где θ — скорость поворота вокруг оси Ox_2 . Решение системы (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right) \sin \theta t + x_1^0 \cos \theta t, \\
 x_2(t) &= x_2^0, \\
 x_3(t) &= \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right) \cos \theta t - x_1^0 \sin \theta t - \frac{\gamma}{\theta} x_2^0.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Сделаем его анализ. Во-первых, видно, что точки, которые в начальный момент находились в фиксированной плоскости $x_2 = \text{const}$, в процессе движения эту плоскость не покидают. Во-вторых, в любой момент времени выполняется следующее равенство:

$$x_1^2(t) + \left[x_3(t) + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right]^2 = (x_1^0)^2 + \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right)^2. \tag{3.6}$$

Следовательно, все точки движутся по круговым траекториям. Причем угловая скорость точки от радиуса не зависит. Это означает, что сечение тела плоскостью $x_2 = \text{const}$, вращается как жесткое целое вокруг неподвижного центра. Согласно (3.6), центры расположены на прямой

$$x_1 = 0, \quad x_3 = -\frac{\gamma}{\theta} x_2. \tag{3.7}$$

Поэтому область деформирования естественно ограничить наклонной цилиндрической поверхностью и двумя доньями. Образующей цилиндрической поверхности является окружность

$$x_1^2 + x_3^2 = 1, \quad x_2 = 0,$$

а направляющая — параллельна прямой (3.7). В процессе деформирования поверхность тела переходит в себя следующим образом: донья вращаются в одну сторону с постоянной угловой скоростью ω и дают соответствующее смещение боковой поверхности (рис. 1.5). Неформально характер деформирования можно понять следующим образом. Возьмем два жестких параллельных диска, центры которых разнесены по высоте. Предположим, что оба диска вращаются в одну сторону. Пусть на первом диске находится наблюдатель, который следит за относительными смещениями точек второго диска. Вращение медленное, так что центробежными силами можно пренебречь. Если диски вращаются с различными угловыми скоростями, то наблюдатель сможет определить центры обоих дисков и свое положение относительно этих центров. Однако если диски вращаются с одинаковой угловой скоростью, то их относительная скорость для всех положений наблюдателя становится одинаковой. Именно это обстоятельство и обеспечивает однородность деформаций в течении (3.5).

Вычислим теперь тензор деформаций. Возьмем образец материала в виде прямого кругового цилиндра. Осуществим

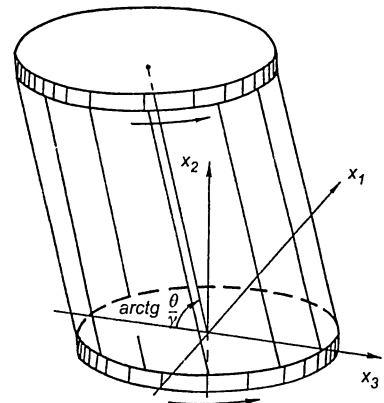


Рис. 1.5

сдвиг образца так, чтобы нижнее основание осталось неподвижным, а верхнее сместилось параллельно себе. Пусть при этом

$$x_1^0 = x_1^*, \quad x_2^0 = x_2^*, \quad x_3^0 = -\frac{\gamma}{\theta} x_2^* + x_3^*.$$

В новом состоянии цилиндр переходит в не прямой цилиндр, но остается круговым. Дальнейшее нагружение будем осуществлять по схеме (3.5). Тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1(t) - x_1^* = x_1^*(\cos \theta t - 1) + x_3^* \sin \theta t, \\ u_2 &= x_2(t) - x_2^* = 0, \\ u_3 &= x_3(t) - x_3^* = -x_1^* \sin \theta t - \frac{\gamma}{\theta} x_2^* + x_3^*(\cos \theta t - 1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2\theta} \sin \theta t & 0 \\ \frac{\gamma}{2\theta} \sin \theta t & \frac{\gamma^2}{2\theta^2} & -\frac{\gamma}{2\theta} \cos \theta t \\ 0 & -\frac{\gamma}{2\theta} \cos \theta t & 0 \end{pmatrix}.$$

Инварианты и главные значения тензора деформаций от времени не зависят:

$$J_1 = \frac{\gamma^2}{2\theta^2}, \quad J_2 = -\frac{\gamma^2}{4\theta^2}, \quad J_3 = 0,$$

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_{2,3} = \frac{\gamma}{2\theta} \left(\frac{\gamma}{2\theta} \pm \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\theta^2}} \right).$$

Поэтому нагружение приводит только к повороту главных осей тензора деформаций. Первое главное направление равномерно вращается в плоскости $x_2 = \text{const}$, а два других описывают конические поверхности так, что угол между каждым из них и плоскостью Ox_1x_3 остается неизменным. Здесь также реализуется нейтральное сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора деформаций.

В [1] течение (3.5) рассматривалось в другой системе координат. Это позволило дать новую схему для его реализации (рис. 1.6.) Здесь деформируемая область ограничена цилиндрической поверхностью и деформируется так, что нормали к сечениям движутся по коническим поверхностям от A к B и снова к A .

В заключение отметим, что все рассмотренные выше типы нейтрального нагружения обладают одной интересной особенностью. Если их реализовать для изотропного упругого тела, то энергия потребуется только для начальной

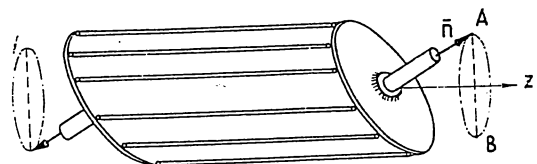


Рис. 1.6

деформации тела (2.12). Дальнейшее нагружение тела будет осуществляться уже без дополнительных затрат энергии. Если же материал упругим не является, то подвод энергии будет необходим на всех стадиях деформирования.

Таким образом, рассмотренные выше ситуации непосредственно обобщают классическое плоское течение Куэтта и являются теоретически идеальными для экспериментальных исследований определяющих уравнений различных сред. При этом нагружение должно носить квазистатический характер, а материал в задаваемом диапазоне изменения деформаций должен быть реологически устойчивым. Эти требования являются необходимым для достижения однородного состояния.

Глава 2. ДИЛАТАНСИЯ И ПЛАСТИЧНОСТЬ СЫПУЧИХ ТЕЛ ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

§ 2.1. ПРИБОР ОДНОРОДНОГО СДВИГА

В главе 1 описан ряд течений, в которых распределение деформаций и их скоростей является однородным по пространству. Перейдем теперь к вопросу о реализации подобных течений. Естественно начать с наиболее легкого варианта, когда оси тензора скоростей деформаций неподвижны. Остановимся на схеме простого сдвига, так как его можно реализовать для более широкого класса материалов, чем одноосное растяжение. Фактически здесь речь идет о реализации плоскопараллельного течения Куэтта.

Нет смысла описывать трудности, которые возникли на пути решения этой задачи. Первоначально задача ставилась для сыпучих тел, порошковых и гранулированных материалов. (Ниже для краткости везде говорится только о сыпучих телах). Основная трудность была связана с тем, что для сыпучих материалов, в отличие от вязких жидкостей, нет условия прилипания на контакте с нагружающим устройством. Поэтому необходимы были специальные меры для того, чтобы увлечь материал в сдвиговое течение.

В работах [6—8] описан первый вариант прибора однородного сдвига, который эту задачу в принципе решает. Деформация материала осуществлялась в камере, набранной из перевернутых П-образных тонких пластин. При сдвиге материал увлекается в движение дном камеры (оно сдвигается подобно боковой поверхности колоды карт) и ее стенками. Объем камеры остается неизменным при ее любых сдвигах. Это удобно для исследования

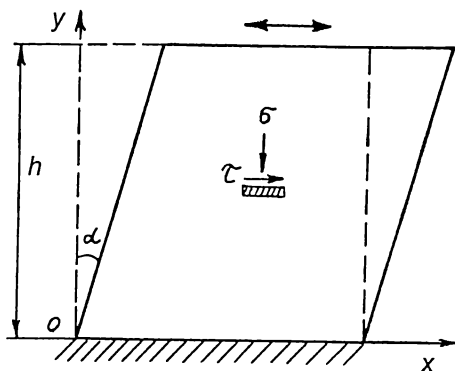


Рис. 2.1

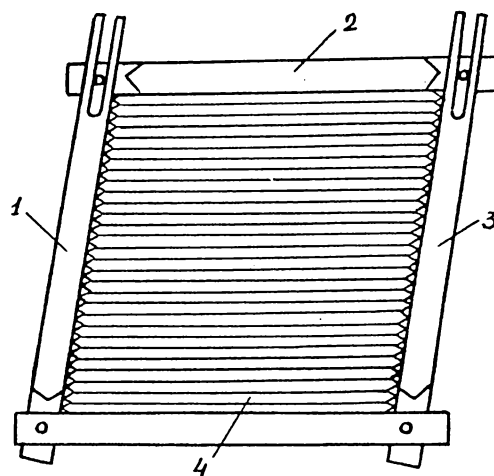


Рис. 2.2

дилатансии образца. Схема нагружения показана на рис. 2.1 (вид сверху). В этой схеме квадрат при сдвиге переходит в параллелограмм. Одна его диагональ удлиняется, а другая укорачивается. Важно отметить, что при этом площадь области при любых сдвигах α остается неизменной, поскольку не меняется размер h . Постоянство площади упрощает измерение дилатансии, поскольку высота образца точно повторяет изменение его объема.

Конструкция второго варианта прибора (в плане) показана на рис. 2.2. Она представляет собой камеру с подвижными жесткими стенками 1, 2, 3 и дном квадратной формы. Квадрат при сдвиге преобразуется в параллелограмм. Деформирование образца, помещенного в камеру, осуществляется не только стенками, но и дном. Дно представляет собой набор тонких вертикально установленных пластин 4. При сдвиге пластины скользят друг относительно друга. Набор в целом повторяет форму камеры. Свободная поверхность образца не стеснена для дилатирования и используется при измерениях высоты образца.

Общий вид устройства нагружения показан на рис. 2.3. Конструкция камеры включает в себя каркас, состоящий из продольных 1 и поперечных 2 балок. Верхние и нижние балки каркаса скреплены между собой стенками 3. В углах камера имеет шарнирные соединения. Они выполнены с помощью стержней 4, вертикально закрепленных на нижних продольных балках. Перемещение подвижной стенки осуществляется по направляющей рейке 5, закрепленной неподвижно на основании 6. Расстояние до неподвижной стенки

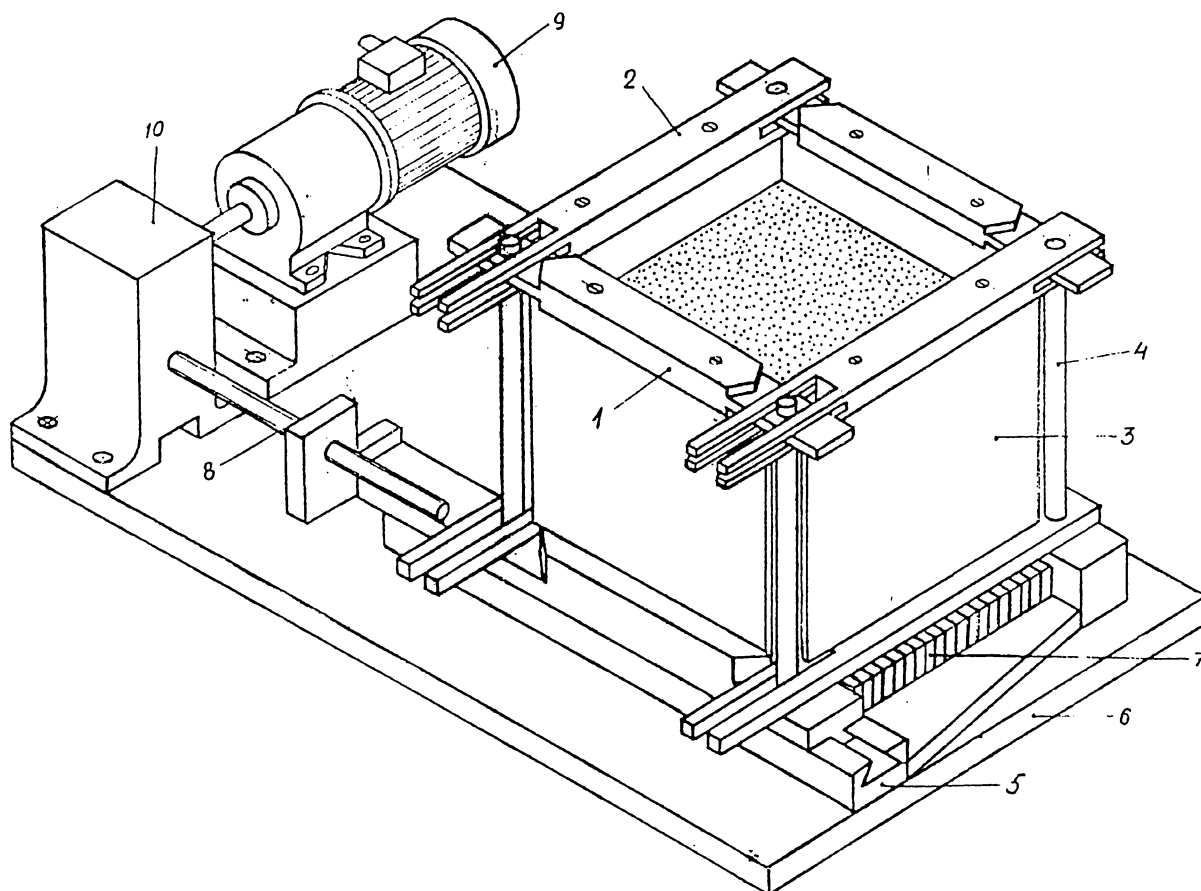


Рис. 2.3

остается постоянным при любых сдвигах. Поскольку при сдвиге камеры длина боковых стенок должна меняться, поперечине балки имеют пазы. Подвижная стенка в них имеет возможность свободно смещаться. Внутренняя поверхность камеры обтянута листовой резиной, которая жестко крепится к вертикальным ребрам камеры. Она обеспечивает изменение размера боковых стенок камеры при сдвиге.

Жесткость дна обеспечивается пакетом вертикально уложенных пластин 7, которые при сдвигах повторяют форму камеры. Дно так же, как и боковые стенки, покрыто листовой резиной. Для исключения гофрирования резина предварительно натянута и закреплена к горизонтальным ребрам подвижной и неподвижной стенок камеры. Конструкция прибора имеет размеры испытательной камеры $200 \times 200 \times 200$ мм. Специальные вставки позволяют уменьшать эти размеры.

Сдвиг камеры осуществлялся со скоростью 2 град/с с помощью винтовой передачи 8, которая приводится во вращение электродвигателем 9 через редуктор 10. При изменении шага винтовой передачи имеется возможность варьировать скорость нагружения в интервале от 0,1 до 5 град/с. Амплитуда и направление сдвига могут задаваться по независимой программе нагружения в интервале угла $\alpha = \pm 12^\circ$ (относительная деформация $\pm 21\%$).

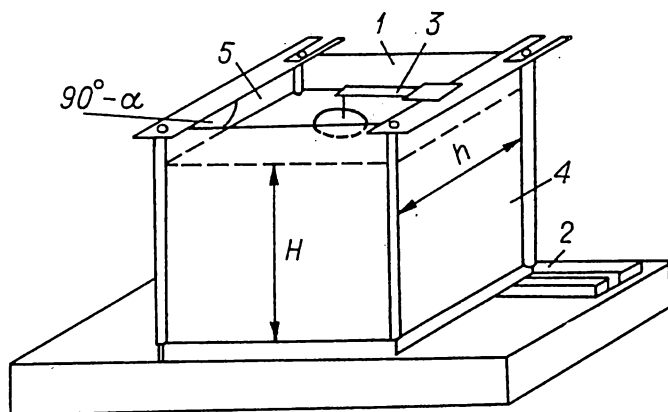


Рис. 2.4

Измерение высоты образца позволяет определять его пористость в зависимости от пути нагружения. Измерения напряжений дают информацию о напряженном состоянии сыпучего образца. Устройство позволяет проводить подобные исследования сыпучих материалов, насыщенных жидкостями.

Дополнительное приспособление, имеющее конструкцию, подобную элементу 7 конструкции камеры, позволяло создавать пригрузку на поверхности образца до 1100 Н.

Применялась также усовершенствованная конструкция, показанная на рис. 2.4. В этой конструкции в процессе сдвига можно менять расстояние h между стенками. Это позволяет менять объем камеры по программе, независимой от сдвигов.

§ 2.2. ДИЛАТАНСИЯ

Эксперименты осуществлялись следующим образом [9, 10]. Выбиралось первоначальное положение камеры. Затем камера заполнялась сыпучим материалом и проводилось нагружение. Сдвиг камеры осуществлялся с помощью реверсивного электродвигателя со скоростью 2 град/с. Измерялись угол сдвига камеры α и изменение высоты образца ΔH . Для измерения последней на поверхность образца в центре помещалась легкая пластина диаметром 110 мм, которая служила упором для упругой консоли 3 тензорезистором (см. рис. 2.4). Изменение высоты приводило к изгибу консоли, который регистрировался тензорезистором, введенным в мостовую схему. Усиленный сигнал разбаланса моста подавался

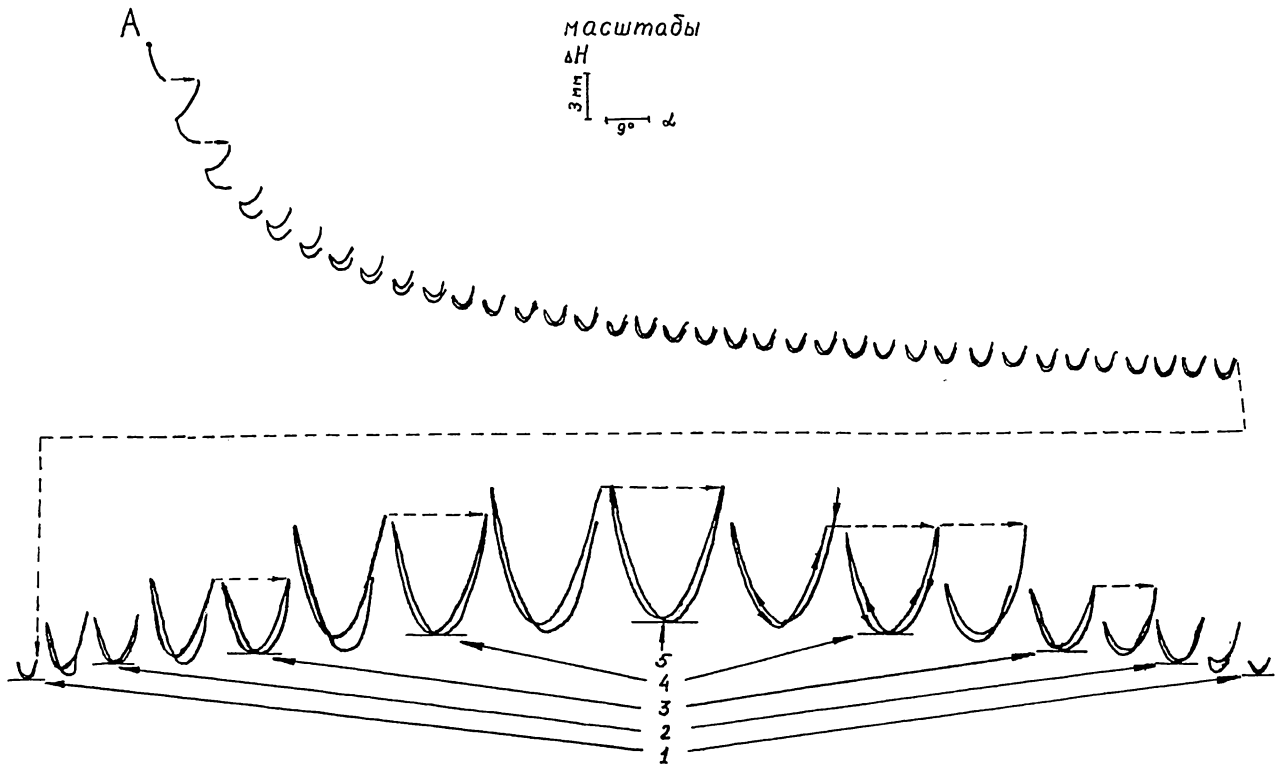


Рис. 2.5

на вертикально отклоняющий вход самописца. Угол сдвига измерялся потенциометрическим датчиком, сигнал с которого подавался на горизонтально отклоняющий вход самописца. Во втором варианте непосредственно измерялось смещение подвижной стенки камеры с помощью реохордного датчика.

Перейдем к основным результатам. Ограничимся случаем, когда объем камеры не меняется ($h \equiv \text{const}$). Тогда изменение объема образца полностью определяется изменением его высоты. На рис. 2.5 приведена запись изменения высоты образца при знакопеременных сдвигах камеры. Эти кривые были получены для сухого кварцевого песка со следующими характеристиками: удельный вес частиц $2,55 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, вес образца $108,2 \text{ Н}$, грансостав $(-1 + 0,4) \text{ мм} \sim 2,69\%$ $(-0,4 + 0,2) \text{ мм} \sim 97,31\%$, угол естественного откоса 30° . Засыпка в камеру осуществлялась через воронку, первоначальная пористость (отношение объема пор к общему объему) — 45% , первоначальная высота образца 177 мм . На оси ординат отложено изменение высоты образца ΔH , точка A соответствует исходному состоянию материала ($\Delta H = 0, H = 177 \text{ мм}$), на оси абсцисс — угол α (в точке $A \alpha = 0$); пунктиром отмечена переброска пера.

Опыты показывают, что при знакопеременных сдвигах неизменной амплитуды на первой (нестационарной) стадии процесс деформирования носит непериодический характер (см. рис. 2.5, верхний ряд кривых). После достаточно большого числа циклов $N \geq N^*$ процесс становится периодическим (стационарным). Изменим теперь амплитуду сдвигов. Можно ожидать, что после определенного числа циклов деформирование опять перейдет в новый стационарный режим. Эксперименты обнаруживают интересное свойство — пе-

реход с одного стационарного режима на другой происходит практически сразу, без промежуточной нестационарной фазы.

Таким образом, графики на рис. 2.5 показывают, как меняется объем сыпучего материала при сдвигах. Свойство материала менять объем при сдвиге было открыто в 1885 г. О. Рейнольдсом и получило название дилатансии [189]. Сыпучий материал состоит из отдельных твердых частиц, которые образуют определенную упаковку в пространстве. Сдвиг приводит к изменению упаковки и, как следствие, к дилатансии. Возможны два принципиально различных изменения упаковки. Пусть \mathfrak{U}_0 исходная упаковка, которая при деформировании переходит в \mathfrak{U} . Изменение упаковки назовем обратимым, если можно указать такой путь нагружения, при котором упаковка \mathfrak{U} вновь переходит в состояние \mathfrak{U}_0 . В противном случае изменение упаковки будем называть необратимым. Следует отметить, что любое, в том числе и обратимое, изменение упаковки всегда связано с относительным проскальзыванием частиц, т. е. с необратимой, пластической деформацией макрообъема (нагрузки, при которых происходит разрушение частиц, не рассматриваются). Эксперименты показывают, что вначале, на нестационарной стадии деформирования изменение упаковки носит необратимый характер. Затем упаковка переходит в обратимое состояние.

Рассмотрим механизм этого перехода. Исходная упаковка содержит множество различных дефектов: вакансий, арок, дислокации. Поэтому начальная пористость складывается из двух составляющих: относительного объема дефектов и объема порового пространства бездефектной структуры. Знакопеременные сдвиги приводят к устранению дефектов. Основной механизм этого процесса можно проиллюстрировать на модели, изображенной на рис. 2.6 а. Модель представляет собой шероховатую плоскость и тяжелую частицу на ней. Плоскость наклонена к горизонту так, что скатывающей силы недостаточно для преодоления внешнего трения. Приложим к частице силу T , которую будем постепенно увеличивать от нуля. При определенном значении T частица начнет скользить по плоскости. Легко показать, что скорость частицы всегда будет иметь составляющую, направленную вдоль скатывающей силы Q , причем эта составляющая пропорциональна скатывающей силе, т. е. в определенном смысле трение в направлении Q становится вязким. (Подробнее этот вопрос рассматривается в гл. 11). Таким образом, преодоление внешней силой сухого трения в одном направлении влечет за собой снятие трения и во всех других направлениях.

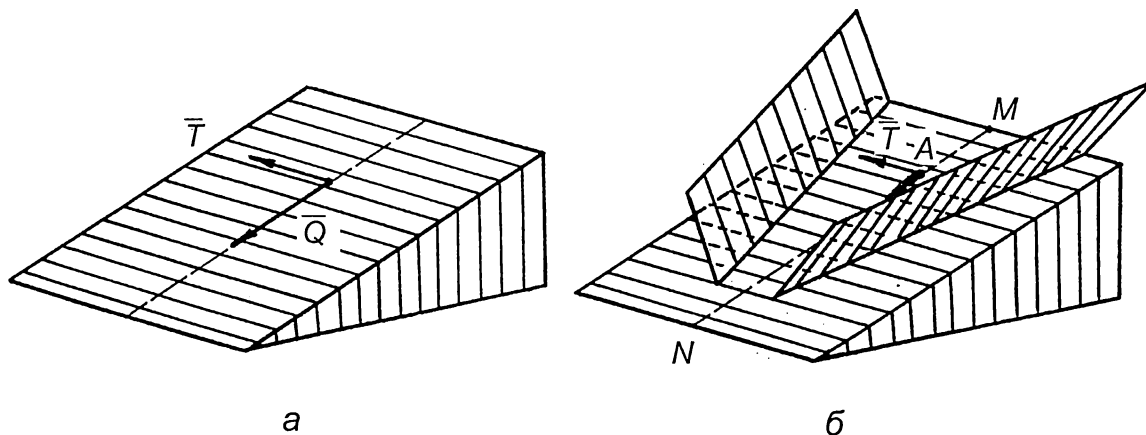


Рис. 2.6

Поэтому те силы, которые до этого не проявлялись, так как не могли преодолеть барьер сухого трения, на фоне внешней силы, снявшей трение, проявляются в полной мере и вносят свой вклад в кинематику движения. Для различных пар контактирующих частиц направление силы T носит случайный характер, направление же веса частиц — постоянно. Поэтому в целом смещения идут так, что потенциальная энергия частиц необратимо уменьшается. В момент, когда этот процесс исчерпывает себя, изменения упаковки становятся полностью обратимыми. Следовательно, обратимые упаковки либо вообще не имеют дефектов, либо имеют устойчивые дефекты. Тот факт, что переход с одного стационарного режима на другой происходит сразу, указывает на то, что дефекты, устойчивые к знакопеременным сдвигам одной амплитуды, устойчивы и к сдвигам другой амплитуды (по крайней мере, в проверенном диапазоне углов $|\alpha| \leq 12^\circ$).

Обозначим через Π^* — минимальную пористость при сдвигах от $-\alpha_0$ до α_0 . Если изменить амплитуду сдвигов, то изменится и соответствующее значение Π^* . На рис. 2.5 показаны уровни 1—5, соответствующие амплитудам сдвига $2\alpha_0 = 5, 10, 14, 20$ и 20° . Меньшим амплитудам соответствуют более плотные упаковки. Наибольшая плотность достигается в середине цикла при $\alpha = 0$. Интересно отметить, что стационарная дилатансионная кривая зависит только от амплитуды и не зависит от предыдущей истории деформирования материала. Отсюда, в частности, следует, что минимальная пористость является функцией от α_0 (а не функционалом от α), причем функцией монотонно убывающей.

В какой мере описанные свойства отражают общие закономерности деформирования сыпучих материалов? Для решения этого вопроса проводились серии экспериментов с различными материалами без сцепления. Хорошо известно, что одни и те же частицы сыпучего, уложенные двумя способами, фактически образуют два различных материала. То есть с механической точки зрения понятие сыпучего материала включает в себя два момента: 1) это совокупность конкретных частиц, из которых состоит материал, и 2) вид их упаковки, который определяется условиями засыпки.

Способ засыпки наиболее сильно влияет на поведение материала при его первом сдвиге. Отметим, что при обычных способах формирования упаковки ее поведение от направления сдвига (знака $\Delta\alpha$) не зависит. Различные способы засыпки могут приводить к одинаковой начальной пористости Π_0 . Опыты показывают, что дилатансионные свойства зависят от величины Π_0 и практически не зависят от способа ее достижения, т. е. можно считать, что начальная пористость является достаточно полной характеристикой засыпки. На рис. 2.7 показана зависимость дилатансии от начальной пористости: кривые 1—8 получены для образцов с первоначальной высотой 165, 168, 173, 174, 178, 179, 180, 184 мм. Засыпки производились через воронку, дождем, с применением вибраций и ударов по боковым стенкам камеры. Использовался тот же самый материал, что и в опыте, показанном на рис. 2.5.

Поскольку условия засыпки в основном влияют на структуру дефектов упаковки, то можно ожидать, что дилатансия в стационарном режиме от условий засыпки зависеть уже не будет. Опыты показывают, что действительно после определенного числа сдвигов N^* материал „забывает“ структуру первоначальной упаковки. Число N^* от начального состояния, конечно, зависит. Зависит оно и от амплитуды сдвига. Так, при заполнении через воронку $N^* = 36$ при $2\alpha_0 = 5^\circ$ (см. рис. 2.5) и $N^* = 10$ при $2\alpha_0 = 24^\circ$. При засыпке дождем $N^* = 21$ при $2\alpha_0 = 5^\circ$ и $N^* = 9$ при $2\alpha_0 = 24^\circ$.

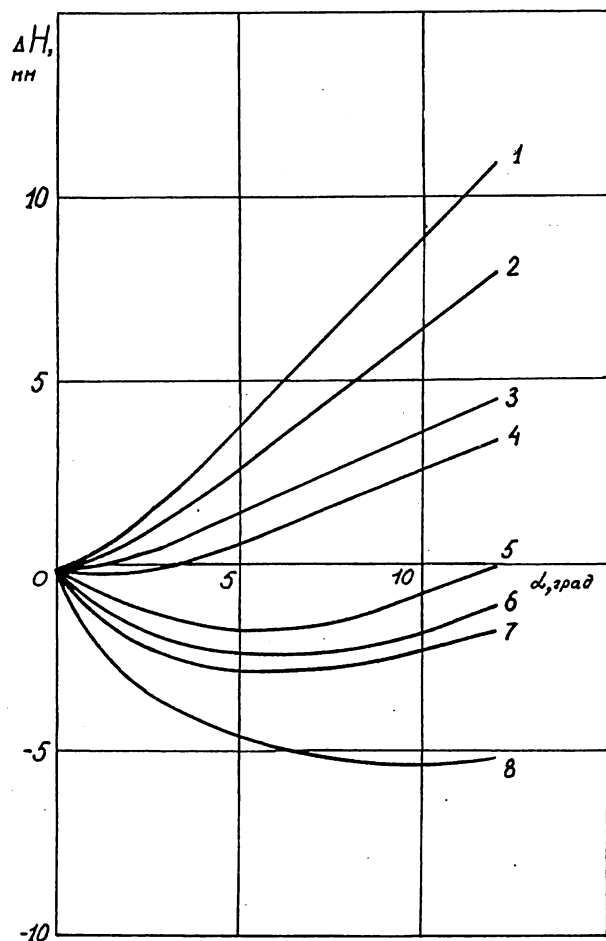


Рис. 2.7

Итак, различия в способах засыпки приводят к определенным изменениям механических свойств материала. Диапазон изменения свойств существенно зависит от гранулометрического состава, формы частиц, их шероховатости и удельного веса. Последние факторы связаны с тем, что укладка и деформирование осуществляются в постоянном поле тяжести. Для песка с неправильной формой частиц представление о вариации свойств дают графики на рис. 2.7. Диапазон изменения уменьшается при переходе к материалам с одинаковыми частицами округлой формы и низким коэффициентом внешнего трения. Например, различные способы засыпки стеклянных шариков каждый раз приводят к близким упаковкам, которые становятся обратимыми уже после двух-трех циклов.

Сравнивая дилатансионные кривые, соответствующие различным этапам деформирования, можно заключить, что дилатансия материала складывается из двух частей: необратимого уменьшения объема дефектов и собственно дилатансии, свойственной обратимым упаковкам. Обратимые упаковки при увеличении сдвига сначала уплотняются, затем разрыхляются до исходной пористости

(см. рис. 2.5). Поэтому необратимое изменение упаковки всегда происходит либо только в сторону уплотнения, когда количество неустойчивых дефектов достаточно велико (первые три цикла на рис. 2.5), либо — первоначального уплотнения и последующего разрыхления, но до пористости несколько меньшей, чем исходная (последующие циклы при амплитуде $2\alpha_0 = 5^\circ$, рис. 2.5).

Можно выделить два основных параметра, характеризующих дилатансию бездефектной упаковки или упаковки с устойчивыми дефектами: первый — минимальная пористость и второй — вариация пористости при сдвиге. Оба эти параметра зависят от амплитуды сдвигов. Качественные особенности этой зависимости носят универсальный характер и прослеживаются для всех сыпучих материалов. Как и в случае, показанном на рис. 2.5, уменьшение амплитуды сдвига всегда приводит к уменьшению пористости Π^* . При этом вариация пористости также уменьшается. При фиксированном размахе сдвига вариация пористости зависит от вида материала. Так, при амплитуде сдвигов $2\alpha_0 = 24^\circ$ значение максимальной величины $(\Delta H / H) \cdot 100$ для пшеницы, стеклянных шариков (диаметром $d = 3 \div 5$ мм), охотничьей дробы ($d = 4$ мм), пшеница ($d = 2,3$ мм), колец Рашига из винипласта ($d = 10$ мм, длина 10 мм), цилиндров из простых карандашей ($d = 7,5$ мм, длина 14 и 5 мм), песка равно соответственно 2,93; 3,57; 3,59; 4,04; 4,1; 4,29; 4,74; 5,4.

Принципиальное значение имеет вопрос о роли внешней пригрузки на поверхности образца. Эксперименты показали, что пригрузка P влияет на все параметры деформирования. Во-первых, если при $P=0$ материал был засыпан достаточно плотно, так что сдвиг приводил к его разрыхлению, то при $P>0$ — сдвиг может приводить к уплотнению. На рис. 2.8 показана дилатансия песка без пригрузки (кривая 1) и с пригрузкой ($P=2,27 \cdot 10^3$ Па). Таким образом, опыты на однородный сдвиг подтверждают вывод [190] о зависимости критической пористости от давления.

Давление также влияет и на число сдвигов, необходимых для устранения дефектов упаковки. Так, для образца из песка $N^*=10$ ($2\alpha_0=24^\circ$) в случае отсутствия пригрузки и $N^*=7$, если $P=3,8 \cdot 10^3$ Па.

Давление изменяет деформирование и обратной упаковки: уменьшаются вариация пористости при сдвиге и минимальная пористость. Так, для образца из песка высотой 167 мм при амплитуде сдвига $2\alpha_0=24^\circ$ с пригрузкой $P=2,3 \cdot 10^3$ Па вариация ΔH при сдвиге равна 5,5 мм, а со снятой пригрузкой — 9 мм, при этом минимальная высота образца увеличилась на 2,4 мм. Пригрузка $3,8 \cdot 10^3$ Па изменяет вариацию ΔH до значения 4,7 мм, а минимальную высоту образца — на 3,6 мм. Причем эти изменения связаны с новым поведением той же самой упаковки, а не с дополнительным устранением ее дефектов. На это указывает следующее обстоятельство: если пригрузку убрать, то материал вернется к прежним значениям Π^* . По-видимому, последнее свойство не является универсальным: с увеличением давления значение Π^* должно необратимо уменьшиться.

Обсудим теперь вопрос, в какой степени прибор однородного сдвига удовлетворяет основному требованию к модельным экспериментам — созданию однородной деформации. Во-первых, в опытах реализуются довольно большие сдвиги. Поэтому для сохранения объема камеры необходимо менять длину ее стороны 4, 5 (см. рис. 2.4). Возникает опасение, что при больших сдвигах процесс деформирования будет зависеть от геометрии камеры. Контрольные эксперименты показали, что дилатансионные кривые, полученные при различных значениях L совпадают между собой (L — смещение стенки камеры вдоль направляющей 2). Это означает, что деформирование зависит только от ΔL и не зависит от начального угла α , на который сдвигается камера до заполнения ее материалом. Поэтому все данные приведены для случаев, когда в начальном положении $\alpha=0$. В качестве аргумента записано значение α , так как в рассмотренном диапазоне сдвигов величины α и ΔL практически пропорциональны.

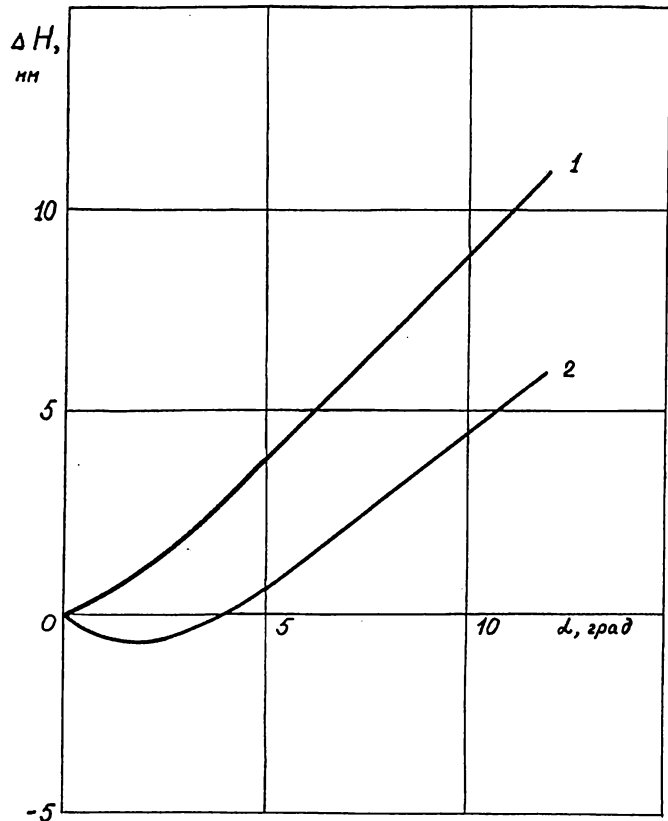


Рис. 2.8

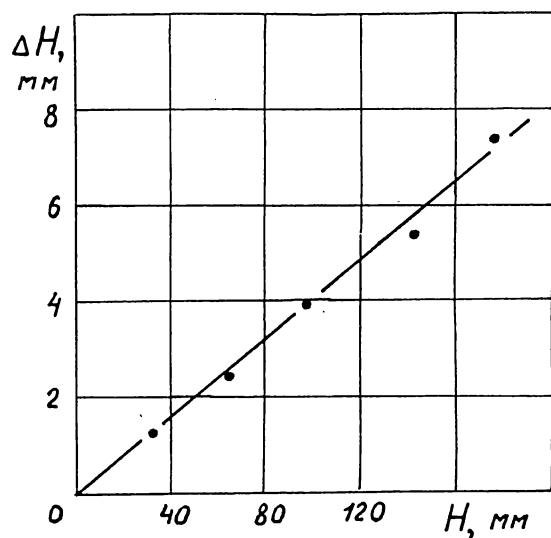


Рис. 2.9

Итак, в процессе нагружения стенки камеры сдвигаются на заданный угол α из положения $\alpha = 0$. В какой мере материал в камере следует сдвигу стенок? Внедрим в различные точки поверхности образца тонкие вертикальные иглы и запишем с помощью потенциметрических датчиков соответствующие углы сдвига. Записи показывают, что эти углы совпадают с углом сдвига камеры, т. е. в горизонтальном сечении сдвиг образца практически однороден.

По вертикали состояние материала, конечно, неоднородно: нижние слои деформируются в условиях определенной пригрузки со стороны вышележащих слоев. Неоднородность, связанную с этим фактором, можно не относить к недостаткам прибора, так как в случае необходимости ее легко учесть. Кроме того, с увеличением внеш-

ней пригрузки собственный вес материала вообще становится несущественным.

Основной источник неоднородности связан с трением по вертикальным стенкам. Трение препятствует свободному дилатированию материала и приводит к некоторому искривлению первоначально горизонтальных сечений образца. Этот фактор оценивался следующим образом. Вначале измерялись вертикальные смещения внутренних точек образца. Для этого на определенной высоте от дна камеры во время засыпки устанавливался зонд, представляющий собой легкий диск диаметром 25 мм. В центре диска крепился тонкий вертикальный стержень, другой конец которого оканчивался таким же диском. Верхний диск находился вне материала и служил опорной площадкой для иглы консоли с тензорезистором. Смещения регистрировались так же, как и изменение высоты всего образца. Опыты показали, что величина дилатансии меняется с глубиной практически линейно (рис. 2.9, $2\alpha_0 = 10^\circ$, песок). Это означает, что вес материала и сила трения на боковых стенках оказались недостаточными, по крайней мере в проделанных опытах, для заметного влияния на дилатирование внутренних слоев.

Во второй серии экспериментов коэффициент трения f на боковых стенках менялся с помощью одинаковых вставок из различных материалов. Для опытов с $f \approx 0$ было использовано специальное устройство. По размерам боковых стенок камеры вырезались пластины из листовой резины. Пластины одной стороной крепились к дну и помещались между сыпучим материалом и стенками камеры. Противоположные стороны пластины синхронно с дилатансией образца вытягивались, либо опускались, т. е. вертикальные смещения боковых стенок следили за вертикальным смещением частиц материала.

Сравнивая дилатансионные кривые, соответствующие различным значениям f , можно заключить, что коэффициент трения сдерживает дилатансию только тонких слоев материала, прилегающих к стенкам камеры, а на дилатансию образца в целом заметного влияния не оказывает.

В заключение рассмотрим модель, на которой можно проиллюстрировать некоторые дилатансионные свойства среды. За основу возьмем модель, показанную на рис. 2.6 а. В

этой модели рассматривается контакт двух частиц. В действительности каждая частица контактирует с несколькими соседними. Это обстоятельство становится решающим при больших сдвигах. Пусть текущей пористости материала соответствует высота, на которой расположена частица A , сдвигу — смещение в направлении \bar{T} , исходной упаковке — начальное положение частицы на прямой MN (см. рис. 2.6 б). Сдвиг из начального положения так же, как и в случае на рис. 2.6 а, приводит к уплотнению. Однако при большом сдвиге, когда наличие соседних частиц становится определяющим, частица A достигает препятствия и начинает двигаться вверх — материал разрыхляется. При изменении знака сдвига весь процесс повторится. Модель показывает, что самое нижнее положение частицы A зависит от амплитуды размаха и с уменьшением этой амплитуды понижается.

§ 2.3. ПЛАСТИЧНОСТЬ

Перейдем теперь к исследованию пластических свойств сыпучей среды [11, 12]. При больших сдвигах деформация среды является практически полностью необратимой. Во всех опытах реализовывался именно такой случай. Поэтому всю измеряемую деформацию можно считать целиком пластической.

Рассмотрим нагружение по программе $\varepsilon_{xx} = 0$, $\varepsilon_{yy} = 0$, $\varepsilon_{xy} = \operatorname{tg} \alpha(t)$, $\sigma_z^0 = \sigma_z^0(t)$ где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ — деформации; $\alpha(t)$ — угол сдвига камеры в момент t ; σ_z^0 — напряжение на поверхности образца; ε_z^0 — средняя вертикальная деформация образца. Во всех опытах скорость нагружения выдерживалась постоянной, равной примерно 2 град/с, исключая малые участки ($1,5-2^\circ$) торможения и разгона в начале и конце каждого цикла $-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Такая скорость исключала инерционные эффекты. В качестве сыпучего материала использовались различные пески, пшено, дробь. Указанные ниже закономерности прослеживались для всех испытанных материалов. Конкретные данные приведены для сухого кварцевого песка с крупностью частиц до 0,3 мм, начальной высотой образца 160 мм, полученного засыпкой дождем, вес образца 100,2 Н.

Ниже ограничимся исследованием нагружения $\sigma_z^0 \equiv 0$. На рис. 2.10 приведена стационарная диаграмма нормальных напряжений σ_δ , измеренных на глубине 135 мм. Диаграмма соответствует вертикальной площадке, повернутой относительно одной из диагоналей против часовой стрелки на угол $\delta = 30^\circ$. Стрелками показано направление сдвига камеры.

Как видно, при сдвиге камеры от $\alpha = -12$ до $+12^\circ$ нормальные напряжения падают до некоторого уровня и затем постепенно нарастают. При перемене направления сдвига характер изменения напряжений повторяется. Возрастающие ветви диаграмм пересекаются в точке A . Установлено, что величина напряжений в этой точке от амплитуды α_0 и угла δ не зависит. При этом значения α_A как функции δ хорошо аппроксимируются синусоидой (рис. 2.11). Максимальным величинам α_A соответствуют положения

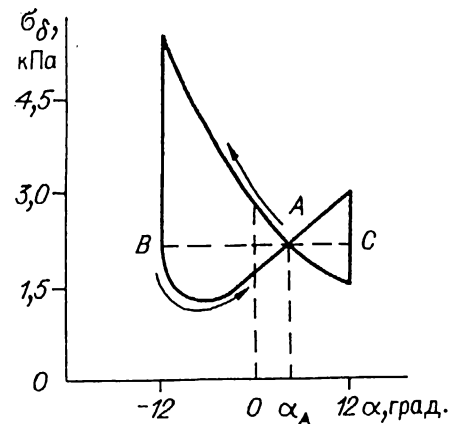


Рис. 2.10

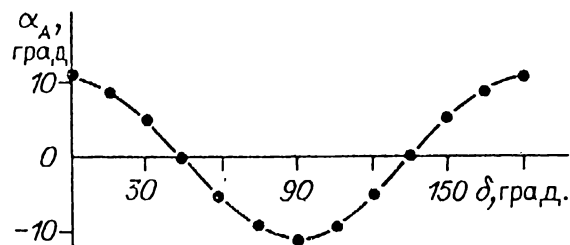


Рис. 2.11

датчика вдоль диагональных плоскостей, минимальным $-\alpha_A = 0$ — вдоль стенок камеры. Записи диаграмм показывают, что напряжения на горизонтальных площадках зависят только от глубины установки датчика h : $\sigma_z \equiv \gamma h$, γ — удельный вес материала. Оказалось, что при $\alpha = \alpha_A$ давление и на вертикальных площадках $\sigma_\delta = \gamma h$ для любого фиксированного положения δ . Иными словами, при любом положении камеры в

сыпучем образце на горизонтальной площадке действует постоянное напряжение, равное весу столба, и существует одна вертикальная площадка с таким же напряжением. Ориентация ее зависит от угла сдвига камеры.

Из рис. 2.10 видно, что значение $\sigma_\delta = \gamma h$ достигается и в том случае, когда сдвиг камеры меняется по направлению (точки B, C). Нормальные напряжения на всех площадках при этом падают и через состояние гидростатики γh проходят одновременно (в этот момент реализуется закон Паскаля и все касательные напряжения равны нулю). Так как в точках α_B , α_C крутизна графиков велика, то для дополнительной проверки „закона Паскаля“ проводились независимые измерения многокомпонентным датчиком. Он представлял собой куб с ребром 10 мм, на трех гранях которого установлены датчики нормальных напряжений. Проверка подтвердила первоначальный вывод.

Реализовать закон Паскаля в сыпучей среде можно и таким образом. Если после определенного сдвига камеру остановить, то напряжения в образце сохраняются. Однако вибрация или постукивание камеры приводит к быстрой релаксации касательных напряжений. При этом все нормальные напряжения выравниваются до величины γh .

В механике сыпучей среды большое значение придается вопросу об ориентации площадок скольжения. Опыты на приборе однородного сдвига показывают, что они близки к площадкам предельного равновесия — площадкам, на которых отношение касательного напряжения к нормальному достигает своего наибольшего значения [10]. На рис. 2.12 показан график зависимости отношения $\max \tau_\delta / \sigma_\delta$ от ориентации площадки δ . (Максимум по α достигается при $\alpha = \pm \alpha_0$, так как по α диаграммы монотонны.) Локализация проис-

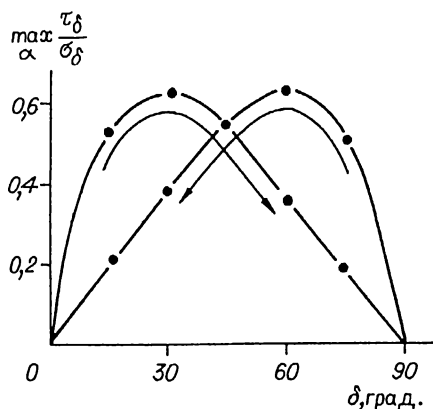


Рис. 2.12

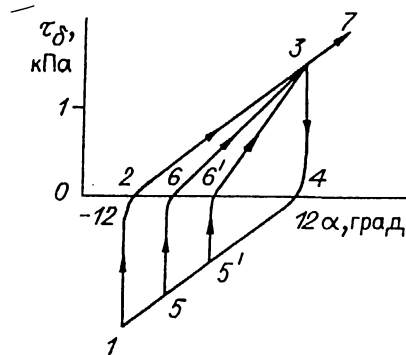


Рис. 2.13

ходит на площадках, соответствующих максимуму по углу δ (два графика, симметричные относительно прямой $\delta = 90^\circ$, не изображены).

Любая программа нагружения так или иначе меняет упаковку частиц, а следовательно, и ее упруго-пластические характеристики. Поэтому любое предварительное нагружение можно рассматривать и как способ создания упаковок с заданными свойствами. Особое место среди них занимают обратимые упаковки, которые получаются в результате медленного циклического нагружения после достаточного числа циклов [9, 103]. При этом все диаграммы выходят на замкнутые кривые.

Рассмотрим некоторые свойства касательных напряжений. На рис. 2.13 точкам $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ соответствует стационарная диаграмма. Если величину обратного пластического сдвига уменьшить, то это приведет к возрастанию пластического модуля при последующем прямом течении. При этом модуль меняется таким образом, что диаграмма проходит через точку 3 (нагружение по пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3$). Этот факт от величины обратного сдвига не зависит (точки 5, 6 можно заменить на 5', 6'). При увеличении сдвига за пределы цикла рост касательных напряжений происходит по прямой $3 \rightarrow 7$ которая продолжает ветвь стационарной диаграммы $2 \rightarrow 3$. К точке 3 примыкает участок плавного уменьшения модуля от значения, соответствующего крутизне $6 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$.

Рассмотрим теперь программу нагружения, когда уход за пределы стационарного цикла осуществляется сразу без изменения направления движения камеры. В этом случае обратное пластическое течение происходит с меньшим модулем так, что диаграммы возвращаются в точку 1 (обозначения точек на рис. 2.14 аналогичны рис. 2.13).

Если теперь при переходе со стационарного значения амплитуду сдвига уменьшать по программе, показанной на рис. 2.15, то модуль сдвига будет постепенно увеличиваться. На рис. 2.16 дано сравнение стационарных диаграмм для различных амплитуд размаха.

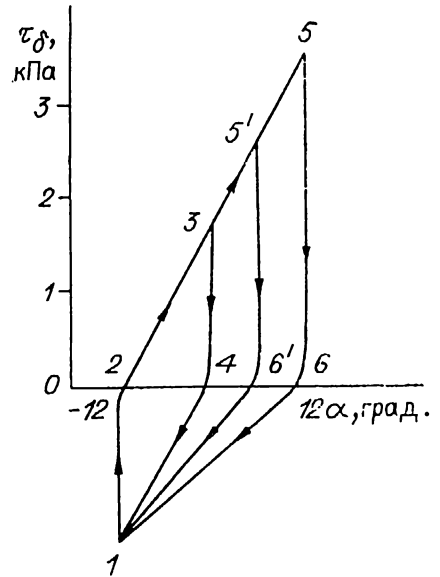


Рис. 2.14

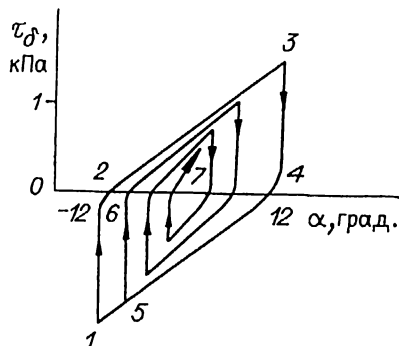


Рис. 2.15

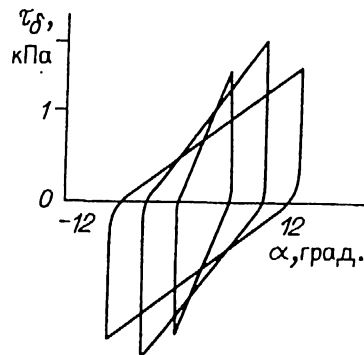


Рис. 2.16

Итак, выше рассмотрены пути нагружения, когда поверхность образца $z = H$ от напряжений свободна. Здесь дилатансия и напряжения в образце развиваются в нестесненных условиях. Большой интерес представляют пути нагружения, когда дилатансия подавляется кинематическими ограничениями, например, путем задания ограничения высоты образца. Эксперименты показывают, что в этом случае нормальные напряжения в образце возрастают. Но рост их значительно ниже, чем следует из оценок по изменению объема материала под действием гидростатического сжатия. Результаты приведены в работе [12].

§ 2.4. НАГРУЖЕНИЕ С ИЗЛОМАМИ ТРАЕКТОРИИ

Как известно, одной из наиболее трудных проблем теории пластичности является проблема описания путей нагружения с резкими изломами траекторий. Все модели, построенные в этой области, носят феноменологический характер. Поэтому большое значение приобретают прямые экспериментальные факты, а значит, и разработка соответствующих экспериментальных методик исследования путей нагружения с изломами траекторий.

Результаты экспериментов послужили основой для ряда моделей пластического деформирования металлов. Среди основополагающих экспериментальных работ в этой области следует отметить [191]. Сыпучие среды, как отмечалось, также относятся к классу упруго-пластических. Поэтому подобные испытания для них также важны.

Рассмотрим подход к этой задаче, который основан на одной из модернизаций прибора однородного сдвига [13]. Схема нагружения и стенда показаны на рис. 2.17. Устройство представляет собой камеру с жесткими подвижными стенками 1, 2, 3 и квадратным в плане дном. При сдвиге квадрат переходит в параллелограмм. Это в точности та же схема и камера, которые рассматривались выше.

Дополнительное устройство излома траектории нагружения установлено внутри камеры сдвига. Оно состоит из гибкого цилиндрического стакана 4, в который помещается исследуемый материал. Боковая поверхность стакана представляет собой оболочку из упругого тонколистового металла. Дно стакана закрыто равномерно растянутой резиной и скреплено с внутренней поверхностью оболочки. Высота стакана составляет 190 мм, диаметр его сечения — 120 мм. Стакан установлен в центре камеры, в круговую цилиндрическую полость, которую образует набор вертикально установленных пластин 5 разной длины (см. рис. 2.17 а).

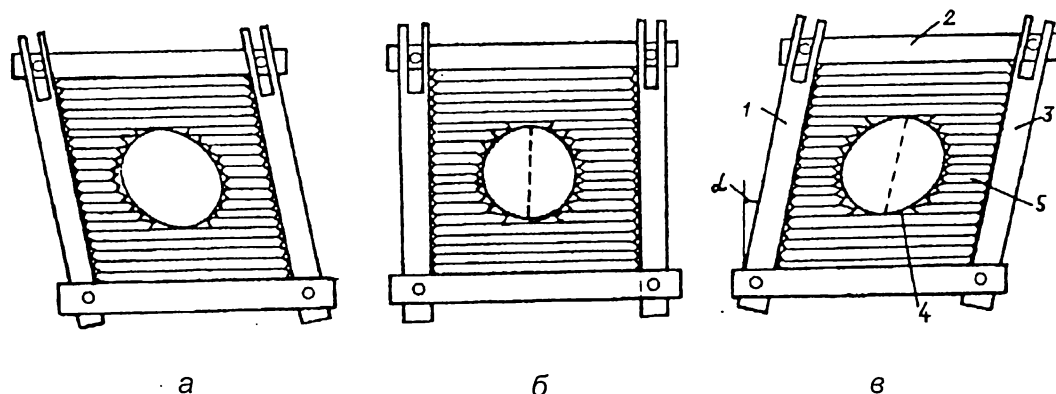


Рис. 2.17

При сдвиге усилия от боковых стенок камеры 1, 3 через пластины передаются на боковую поверхность стакана и деформируют его — круг переходит в эллипс (см. рис. 2.17 б, в). Величина деформаций определяется коэффициентом сжатия эллипса $K = b/a$, где $b \leq a$ — полуоси эллипса. Длины полуосей при деформировании меняются пропорционально длинам диагоналей.

В рассмотренном устройстве излом траектории нагружения осуществляется достаточно просто. Рассмотрим это на примере. Предположим, что исходному положению камеры соответствует положение „б“. Необходимо осуществить, сдвиг материала из „б“ в „в“ с изломом траектории нагружения. Для этого на пути нагружения в положении „а“ камера останавливается. Не нарушая упаковки частиц, в этом положении осуществляется поворот стакана с образцом на некоторый угол ω , а затем производится дальнейшее нагружение. Величина излома траектории нагружения определяется углом поворота стакана. Траектория нагружения является двухзвенной ломаной линией.

Действительно, рассматривая деформирование отдельного волокна материала, можно видеть разницу его конечных значений деформаций при простом и сложном нагружении. Возьмем отдельное волокно материала, расположенное, например, на малой оси эллипса (см. рис. 2.17 б). При сдвиге в положение „в“ при простом нагружении оно испытывает деформации растяжения, равные деформациям растягивающейся диагонали камеры.

Естественно, что на плоскости деформаций в координатах $\varepsilon_d - \varepsilon_v$ (деформации диагонали и волокна соответственно) траектория выглядит в виде прямой линии с углом наклона к осям $\pi/4$ (рис. 2.18). Теперь снова вернем камеру в положение „б“ и рассмотрим деформирование этого же волокна, но уже с поворотом стакана. Подведем камеру в положение „а“ и повернем стакан против часовой стрелки на некоторый угол. Новое положение волокна на рис. 2.17 а, б показано пунктирной линией.

Как видно из рис. 2.17, дальнейшее деформирование волокна осуществляется теперь уже иначе — при тех же сдвигах волокно испытывает меньшие деформации. Траектория нагружения этого волокна (рис. 2.18) показана отрезком пунктирной линии. Поскольку при повороте стакана меняется направление деформирования всех волокон на фоне внешних сжимающих деформаций, то это нагружение является сложным с изломом траектории деформирования.

Рассмотрим результаты экспериментов. Исследовались соосность тензоров напряжений, деформаций и дилатансия сухого кварцевого песка. Частицы имели неправильную форму со средним размером 0,3 мм. Исследовались также стеклянные шарики диаметром 1 мм и зерна пшеницы. Результаты испытаний этих материалов качественно сохраняются, поэтому приведем экспериментальные данные, полученные только на песке.

Как отмечалось, свойства сыпучих материалов во многом зависят от исходной упаковки частиц. Поэтому для каждого опыта создавалась определенное исходное значение пористости образца. Для каждого из значений пористости проводилось по семь экспериментов, в которых угол поворота стакана менялся в интервале

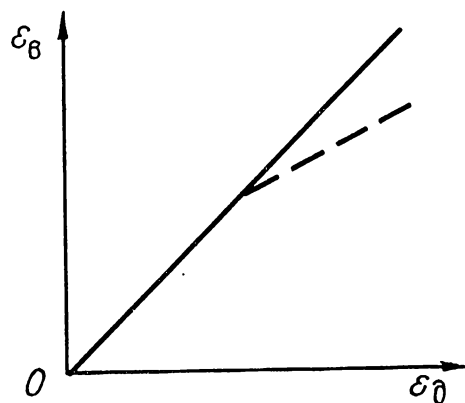


Рис. 2.18

$\omega = 0 - 90^\circ$ с шагом через 15° . При повороте стакана на угол $\omega = 90^\circ$ полуоси эллипса меняются местами. В результате знаки максимальных деформаций также меняются на противоположные: растягивающаяся ось будет сжиматься, а сжимающаяся — растягиваться. При дальнейшем увеличении угла излома ситуации, которые встречались в интервале углов $\omega = 0 - 90^\circ$, повторяются.

Эксперименты проводились следующим образом. Камера устанавливалась в положение „а“ (см. рис. 2.17). В стакан засыпался песок с удельным весом частиц $\rho = 2,5 \text{ г/см}^3$. Масса образца во всех опытах была постоянной и составляла $P = 3200 \text{ г}$. Начальная высота образца $H_0 = 19 \text{ см}$, его объем $W_0 = 2160 \text{ см}^3$ и соответственно насыпной вес $\gamma = 1,48 \text{ г/см}^3$. Начальная пористость составляет при этом

$$P_0 = \left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right) \cdot 100\% = 41\%.$$

Этому состоянию соответствует исходная точка „а“ на диаграмме рис. 2.19. Здесь приведена запись изменения высоты образца ΔH при циклических знакопеременных сдвигах α . Масштабы записи процесса показаны на рисунке. На диаграмме видно, что перевод камеры из положения „а“ в положение „б“ сопровождается уплотнением материала (уменьшением первоначальной высоты образца H_0). После переброски пера самописца (на диаграмме отмечено пунктирной линией) записан полный цикл деформирования — из положения „б“ в положение „а“ и назад.

Как видно из диаграммы, последовательное циклическое деформирование нелинейно уменьшает высоту образца; следовательно, каждому циклу соответствует свое вполне определенное значение пористости.

Весь диапазон изменения пористости от рыхлой засыпки до стационарной плотной упаковки при деформировании был поделен на несколько интервалов с приблизительно равным шагом. Конечная пористость в экспериментах, при которой проводились испытания, составляла $P_k = 41; 37,4; 35,8; 34,32\%$. Этим значениям соответствуют следующие значения числа циклов нагружения $n = 0, 3, 9, 25, 68$.

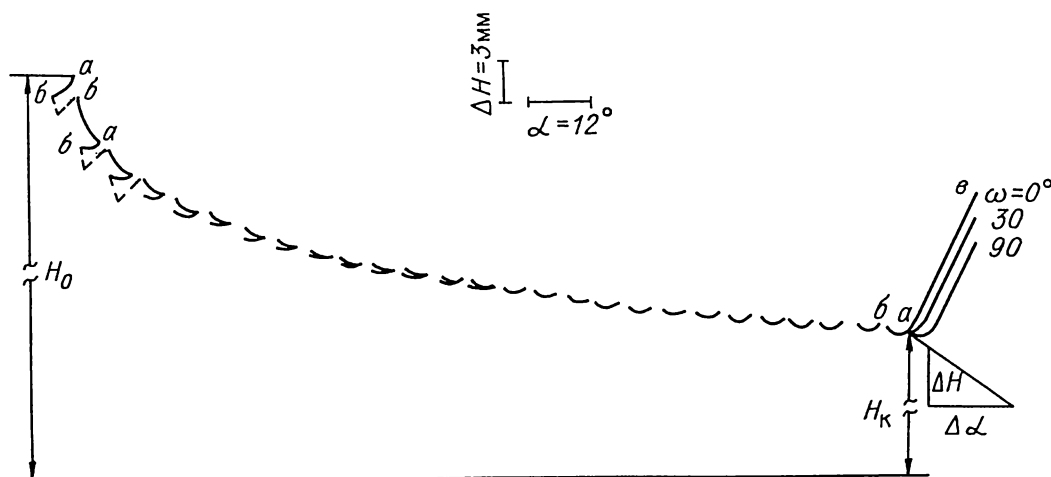


Рис. 2.19

Вернемся теперь к диаграмме и рассмотрим на ней последний цикл нагружения. Здесь сыпучая среда переведена в новое состояние: конечная высота образца $H_k = 17,2$ см, его объем $W_k = 1940$ см³, насыпной вес $\gamma_k = 1,65$ г/см³ и соответственно пористость $\Pi_k = 34\%$. Камера находится в положении „б“. Проследим теперь, как будет меняться высота образца при сдвиге камеры на пути „б \rightarrow а \rightarrow в“.

На диаграмме приведены результирующие графики изменения высоты образца при простом ($\omega = 0^\circ$) и двух вариантах сложного нагружения ($\omega = 30$ и 90°). Для наглядности графики на диаграмме совмещены, но получены они в отдельных опытах. Последний цикл нарушает упаковку частиц. Поэтому материал после испытания выгружался и весь процесс повторялся снова: создавалась рыхлая исходная засыпка, затем проводились знакопеременные сдвиги до получения заданной пористости и делалось новое испытание.

Из диаграммы видно, что максимальная дилатансия (точка „в“) зависит от траектории нагружения. От траектории зависит и сам характер кривых. При простом ($\omega = 0^\circ$) нагружении кривая в точке „а“ не имеет излома и является продолжением предшествующей кривой на участке „б \rightarrow а“.

Излом траектории нагружения радикально меняет характер дилатансионных кривых. Зависимость становится более сложной, функция в этой точке имеет разрыв производной.

После излома траектории крутизна дилатансионных кривых либо резко уменьшается, сохраняя положительное значение, как на кривой $\omega = 30^\circ$, либо значения ее становятся отрицательными, $\omega = 90^\circ$. Характер излома кривых оценивался по углу наклона касательной к кривой в точке излома.

На рис. 2.19 к дилатансионной кривой с углом $\omega = 90^\circ$ проведена касательная. Угол наклона ее в данном случае имеет отрицательное значение: дилатансия в этой точке отрицательна.

С учетом масштаба записи процесса графически определяются абсолютные значения приращений $\Delta\alpha$ и ΔH . Параметр, характеризующий дилатансию, вычислялся по формуле

$$\nu = \frac{\Delta H}{H_k} \cdot \frac{180^\circ}{\Delta\alpha\pi},$$

где $\frac{\Delta H}{H_k}$ — дилатантная деформация, угол α дан в градусной мере.

На рис. 2.20 приведены значения параметра ν в зависимости от угла излома ω для разной исходной пористости песка.

Видно, что плотная упаковка ($\Pi_k = 32\%$) после излома траектории имеет тенденцию к увеличению объема, хотя крутизна нарастания дилатансии с увеличением угла ω уменьшается. Из графика видно также, что с приближением к значению угла $\omega = 90^\circ$ параметр ν становится равным нулю, а затем и отрицательным.

Рыхлая упаковка частиц обнаруживает иное поведение. На рис. 2.20 приведена кри-

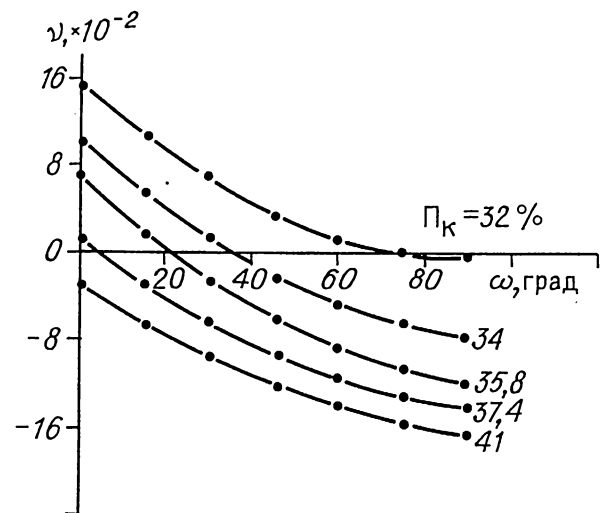


Рис. 2.20

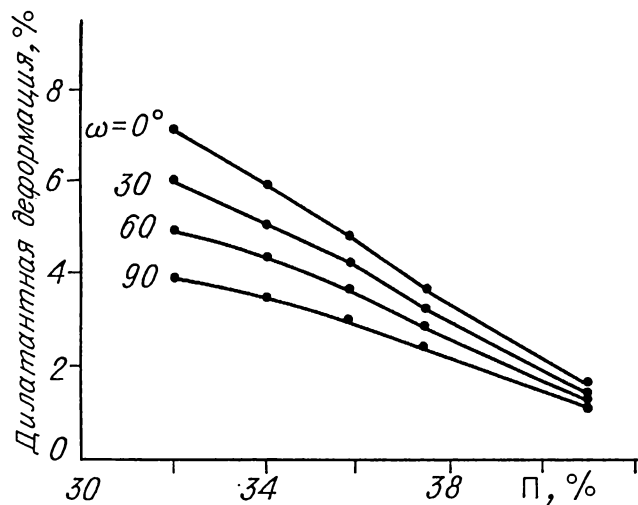


Рис. 2.21

вая с пористостью $\Pi_k = 41\%$, из которой видно, что материал с рыхлой упаковкой по всем траекториям нагружения после излома уплотняется. График показывает, что отрицательные значения параметра ν с увеличением угла излома траектории нагружения также увеличиваются по модулю.

Остальные графики на рис. 2.20 обнаруживают промежуточный тип поведения. До некоторых значений углов ω параметр ν имеет положительные значения, при дальнейшем увеличении углов значения становятся отрицательными.

Обобщая результаты экспериментальных данных, можно сделать вывод о том, что увеличение угла излома траектории

нагружения уменьшает параметр ν при любой пористости материала.

Поведение материала в точке излома траектории сказывается и на характере его дальнейшего деформирования. Сдвиг камеры после излома траектории в экспериментах составлял угол $\alpha = 12^\circ$ (см. рис. 2.19). Как следует из графиков, результирующая (конечная) дилатансия в точке „в“ при разных траекториях нагружения не постоянна и меняется в довольно широких пределах.

Видно, что после излома траектории нагружения дилатансионные кривые имеют два характерных участка: первый соответствует переходному режиму, второй — дилатированию с постоянной скоростью (диаграммы выходят на прямые). Причем скорость дилатансии на этой стадии от степени излома траектории нагружения не зависит.

На рис. 2.21 приведены значения дилатантной деформации в точке „в“ в зависимости от пористости материала по четырем траекториям нагружения. Максимальные деформации возникают по линейной траектории нагружения $\omega = 0^\circ$ и уменьшаются с возрастанием угла излома. Отметим, что наибольшая зависимость дилатантной деформации от вида нагружения имеет место при минимальной пористости материала. Действительно, вариация траекторий нагружения материала с пористостью $\Pi_k = 32\%$ дает большие изменения деформаций, чем та же вариация с $\Pi_k = 41\%$.

Рассмотрим теперь вопрос о соосности тензоров напряжений и деформаций при изломах траекторий нагружения. К числу дополнительных средств, используемых в этой части работы, следует отнести датчик касательных напряжений, который устанавливается внутри сыпучей среды на глубине, приблизительно равной 150 мм.

Описание устройства датчика используемого в нем принципа преобразования касательных напряжений в электрический сигнал содержится в работах [110, 117]. Усиленный сигнал подавался на графопостроитель и записывался с разверткой по углу сдвига камеры α .

На рис. 2.22 схематично показаны камера нагружения и гибкий стакан, в центре которого датчик касательных напряжений показан в двух положениях относительно диагонали камеры: a — начальное положение, при котором осуществляется циклическое

уплотнение материала до пористости $\Pi_k = 32\%$; β — положение датчика перед испытанием.

В этом исследовании для получения результата необходимо знать ориентацию плоскости датчика относительно диагонали камеры — главного направления деформаций. При соосности площадка главных напряжений должна совпадать с направлением диагонали. Контрольные опыты при простом нагружении показали, что соосность соблюдается — касательные напряжения равны нулю

при совмещении плоскости датчика с диагональной плоскостью. Поэтому направление диагонали является опорным, от которого в опытах производился отсчет углов.

Таким образом, исследование соосности сводится к определению ориентации плоскости, где значение касательного напряжения $\tau = 0$, а также определению угла между направлением диагонали и этой плоскостью. Излом, при котором новое направление плоскости датчика совпадает с площадкой главных напряжений, будем в дальнейшем обозначать через ω^0 .

Эксперименты проводились следующим образом. Исходное положение камеры показано на рис. 2.22 а. Датчик устанавливается в центре стакана под некоторым углом α_d к направлению диагонали. Угол выбирается произвольно, но при испытании он будет определять величину угла излома траектории. В стакан засыпался сыпучий материал и производилось циклическое, симметричное относительно нуля нагружение до получения стационарного состояния с пористостью $\Pi_k = 32\%$.

При циклическом уплотнении производилась запись касательных напряжений. С увеличением числа циклов достигалось состояние материала, при котором диаграмма напряжений каждого последующего цикла повторяла предыдущую. В такой ситуации дальнейшее деформирование не имело смысла — материал находился в стационарном состоянии. Замкнутая циклическая диаграмма касательных напряжений при стационарном состоянии показана на рис. 2.23. На диаграмме отмечено положение камеры, а также масштаб записи угла сдвига.

Перед испытанием камера останавливается в положении „а“. Стакан вместе с датчиком поворачивается на некоторый угол ω и продолжается нагружение. Таким образом, в эксперименте одновременно осуществляются излом траектории нагружения и измерение напряжений на площадке с новым направлением при повороте стакана.

Сразу отметим, что совмещение плоскости датчика с направлением диагонали ($\alpha_d = \omega$) хотя и приводит к уменьшению касательных напряжений, но не делает их равными нулю. Обнаружилось нарушение соосности главных напряжений и деформаций при изломе траектории нагружения.

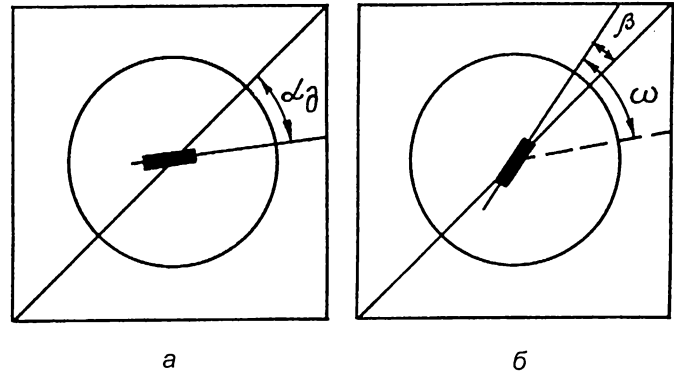


Рис. 2.22

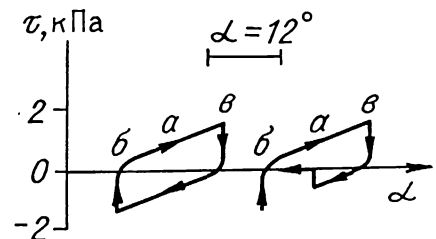


Рис. 2.23

Касательные напряжения становятся равными нулю, если поворот стакана осуществляется на угол

$$\omega^0 = \alpha_d + \beta,$$

где β — угол разности главных напряжений и деформаций.

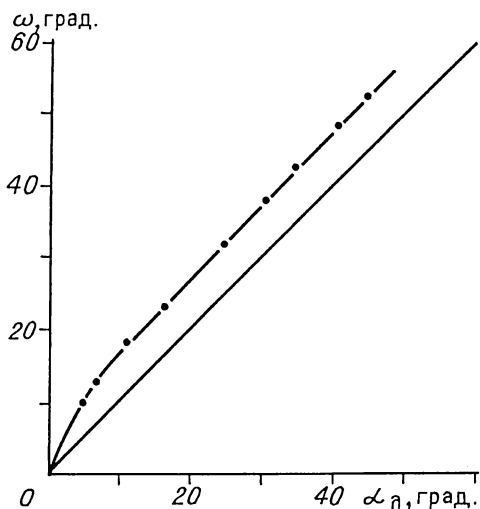


Рис. 2.24

Диаграмма напряжений в этом случае выглядит следующим образом (см. рис. 2.23). При повороте стакана в положении „а“ начало сдвига приводит к резкому падению касательных напряжений до нуля. Дальнейшее нагружение протекает также с $\tau = 0$. При изменении в экспериментах значения угла начальной установки датчика α_d исследована соосность при различных изломах траектории нагружения.

На рис. 2.24 приведены значения углов излома траекторий ω^0 при изменении углов начальной установки датчика α_d . Линия на графике, проведенная через начало координат под углом $\pi/4$ к осям, является линией соосности. Действительно, каждая точка прямой отвечает условию $\omega^0 = \alpha_d$: площадка главных напряжений совпадает с направлением главных деформаций. Любое отклонение от прямой означает разность.

Как видно из графика, экспериментальные точки, полученные при изломах траектории нагружения, не совпадают с линией соосности и лежат выше нее. В интервале углов $\alpha_d = 10 - 45^\circ$ разность слабо зависит от величины излома траектории ω^0 . Среднее значение угла разности в этом интервале составляет $\beta = 7^\circ 30'$. Существенное уменьшение углов разности наблюдается при $\alpha_d < 10^\circ$, что соответствует углу $\omega^0 < 17^\circ$. Точка „О“ начала координат соответствует простому нагружению: плоскость датчика совмещена с направлением главных деформаций, излом траектории $\omega^0 = 0$. Как было показано, это соответствует состоянию, при котором главные напряжения и деформации соосны.

Глава 3. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОВОРОТОМ ОСЕЙ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ

Продолжим изучение однородных течений сплошной среды. В главе 1 дана их общая классификация. Все течения строились как различного типа суперпозиции бесконечного числа сдвиговых течений Куэтта между параллельными пластинами. Это, конечно, не единственно возможный подход. В качестве основного базового процесса можно было взять однородное растяжение среды вдоль некоторого фиксированного направления и сжатия ее в ортогональных направлениях. Эти построения выполнены в [1, 2, 5]. Из общих соображений ясно, что основные результаты здесь будут такими же, как и в первом случае. Отличие будет только в интерпретации и точке зрения на процесс, которая связана с выбором системы координат.

Формально такие различия не являются принципиальными. Однако, если говорить о практических способах реализации однородных процессов и рассматривать их возможные приложения (то есть рассматривать вопросы, где имеют значение эвристические соображения), то новая интерпретация может привести и к новым идеям.

§ 3.1. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим такую интерпретацию для плоских течений, описанных в главе 1. В качестве базового процесса возьмем теперь одноосное аффинное растяжение вдоль одного направления и соответствующее сжатие вдоль ортогонального направления.

Представляют интерес стационарные процессы, то есть процессы, которые могут продолжаться неограниченно долго во времени. Поэтому среду будем предполагать несжимаемой. Точнее, сама по себе среда может быть любой — как сжимаемой, так и несжимаемой, но условия нагружения должны быть такими, чтобы изменения объема отсутствовали, то есть дивергенция скорости должна равняться нулю. Несжимаемость в условиях плоской деформации означает, что растяжение в одном направлении должно равняться такому же сжатию в ортогональном направлении. Поэтому в качестве первого шага предположим, что тело испытывает аффинное растяжение в одном направлении и соответствующее сжатие в ортогональном направлении. Теперь о повороте. Взаимоотношения поворотов и деформаций в механике сплошной среды носят нетривиальный, а в ряде случаев и довольно запутанный характер. Поэтому рассмотрим этот вопрос, опираясь на предельно ясные исходные посылки.

Предположим, что мы располагаем некоторым устройством нагружения, положение которого в пространстве характеризуется двумя ортогональными осями Ox_1 , Ox_2 . Воз-

возможности этого устройства следующие. При фиксированном положении осей Ox_1, Ox_2 устройство захватывает заданное тело по всей его границе и затем после включения дает ему однородное растяжение с постоянной скоростью деформации k вдоль Ox_1 и сжатие с такой же скоростью вдоль направления Ox_2 . Причем такой режим нагружения может выдерживаться сколь угодно долго. (Это означает, что динамические эффекты отсутствуют, и процесс однородного деформирования сохраняет свою устойчивость.)

Включим устройство в момент времени $t = t^0$ и в момент $t = t^0 + \Delta t$ выключим. За это время точка тела

$$x_1(t^0) = a_1, x_2(t^0) = a_1 \quad (1)$$

получит следующие смещения

$$\Delta u_1 = k \cdot a_1 \cdot \Delta t, \Delta u_2 = -k \cdot a_2 \Delta t. \quad (2)$$

Зафиксируем полученную конфигурацию тела и положения всех его внутренних точек. Затем освободим тело от захватов, повернем устройство на угол $\Delta\beta = \Omega \cdot \Delta t$ и опять подвергнем тело растяжению вдоль нового направления Ox_1 и соответствующему сжатию вдоль ортогонального направления Ox_2 . Второй шаг нагружения также будем осуществлять в течение времени Δt : от момента $t_0 + \Delta t$ до момента $t_0 + 2\Delta t$. В результате на прежние смещения наложатся новые смещения второго шага и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность двухосных растяжений и сжатий, которые накладываются друг на друга с определенным дискретным поворотом.

Такая интерпретация позволяет увидеть аналогию этого процесса с приливным деформированием небесных тел. Действительно обратимся к рис. 3.1. Приливные силы,

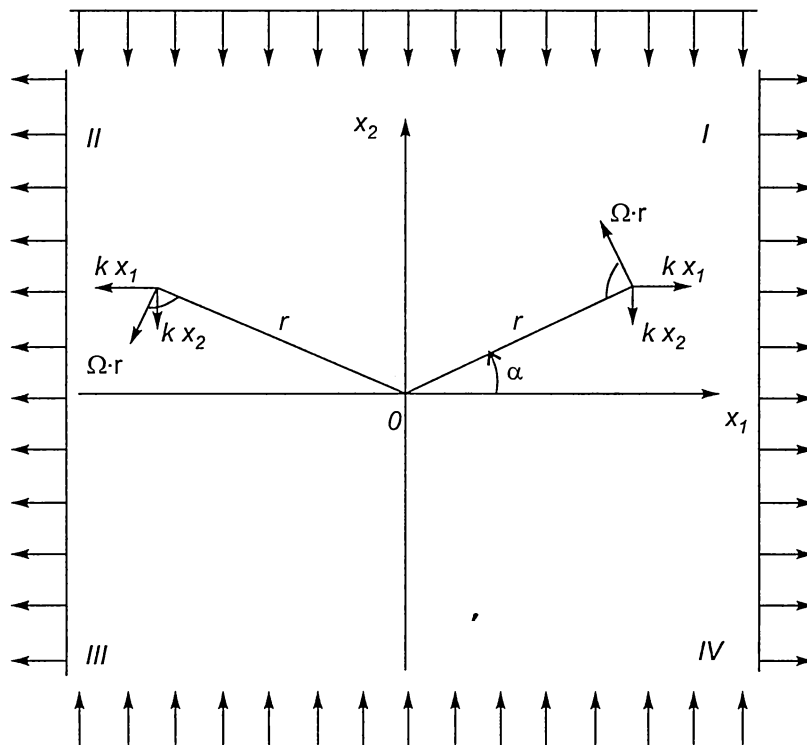


Рис. 3.1

как известно, сводятся к массовым силам, которые стремятся растянуть тело в направлении к возникающей массе и сжать его в ортогональных направлениях. При этом тело (как правило) относительно указанных направлений непрерывно поворачивается. Это приводит к изменению направлений „растяжения-сжатия“ относительно тела, то есть в общем та же ситуация, что и при суперпозиции нагрузений типа (2). Поэтому, если отвлечься от неоднородности и трехмерности реального процесса приливного деформирования, а оставить только его главную черту — поворот тела относительно направлений растяжения-сжатия, то задачи реализации плоских однородных течений и моделирование приливов можно рассматривать вместе. (Задача моделирования приливов рассмотрена в главе 10).

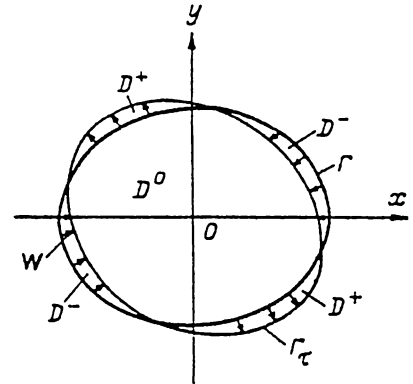


Рис. 3.2

Первый вопрос, который возникает на этом пути, связан с проблемой реализации суперпозиции нагрузений (2). Здесь многое зависит от выбора исходной формы тела. Для произвольной формы реализация процесса довольно проблематична. Действительно, как осуществить двухосное растяжение и сжатие. Это легко сделать (по крайней мере, в принципе) только для стержня или прямоугольной пластины. Если же тело имеет более сложную конфигурацию, то требование линейной зависимости компонент смещений от координат граничных точек приведет к сложной кинематике устройства нагружения. Вторая проблема состоит в фиксировании деформаций, полученных на очередном шаге нагружения. Для материалов с чисто неупругой реологией полученные деформации являются полностью остаточными, и задача состоит только в сохранении полученной формы. Если же у материала есть упругая составляющая, то потребуются два устройства нагружения. Одно устройство предназначено для силового фиксирования достигнутых деформаций, а второе — для реализации следующего шага нагружения. Есть, однако, один исключительный случай, когда все проблемы значительно упрощаются.

Очевидно, что двухосное аффинное растяжение вдоль фиксированных направлений всегда приведет к определенному изменению формы тела. Оказывается, что можно найти такую исходную форму, что ее новая внешняя конфигурация после одного шага нагружения будет отличаться от прежней только жестким поворотом. Здесь никакого парадокса нет. Схематически возможность подобной ситуации показана на рис. 3.2

Перейдем теперь к обоснованию. Вначале найдем траектории материальных частиц, которые реализуются в описанной выше схеме нагружения. Введем новую систему координат $Ox'_1 x'_2$, которую будем считать неподвижной и связанной с деформируемым телом. Система $Ox_1 x_2$ по-прежнему относится к устройству нагружения. Пусть β — угол между осями Ox_1 , x'_1 , (рис. 3.3). Обозначим через $u_1, u_2; u'_1, u'_2$ компоненты вектора перемещений в координатах $Ox_1 x_2$ и $Ox'_1 x'_2$. По формулам векторного проектирования

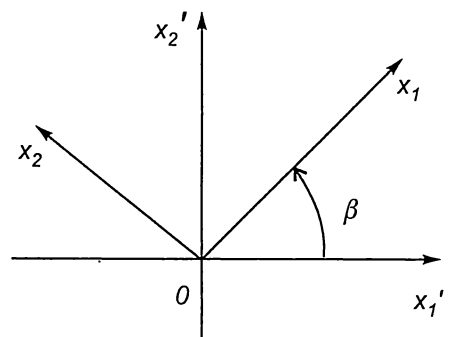


Рис. 3.3

$$x_1 = \cos \beta x'_1 + \sin \beta x'_2, \quad x_2 = -\sin \beta x'_1 + \cos \beta x'_2, \quad (3)$$

$$u'_1 = \cos \beta u_1 - \sin \beta u_2, \quad u'_2 = \sin \beta u_1 + \cos \beta u_2. \quad (4)$$

Проследим теперь за перемещениями материальной точки (1). Пусть в начальный момент вращений t^0 угол $\beta = \beta^0$. Тогда равенства (1), (3) позволяют определить начальные координаты точки в системе $Ox'_1 x'_2$:

$$a'_1 = \cos \beta^0 a_1 - \sin \beta^0 a_2, \quad a'_2 = \sin \beta^0 a_1 + \cos \beta^0 a_2. \quad (5)$$

Подставим (2), (5) в (4). В результате придем к формуле

$$\begin{aligned} \Delta u'_1 &= (\cos 2\beta^0 a'_1 + \sin 2\beta^0 a'_2)k\Delta t, \\ \Delta u'_2 &= (\sin 2\beta^0 a'_1 - \cos 2\beta^0 a'_2)k\Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта формула повторяет (2), но уже в неподвижной системе координат $Ox'_1 x'_2$. В этой системе положение материальной точки в произвольный момент времени уже можно найти последовательным суммированием смещений по временным шагам. Так, в результате первого шага нагружения точка из положения (1), (5) переместится в следующее положение

$$x'_1 = a'_1 + \Delta u'_1, \quad x'_2 = a'_2 + \Delta u'_2. \quad (7)$$

На втором шаге нагружения угол β фиксирован и равен $\beta^0 + \Omega\Delta t$. Поэтому в правой части (6) координаты (a'_1, a'_2) надо заменить на координаты (7) и угол β^0 — на угол $\beta^0 + \Omega\Delta t$. Таким образом определятся смещения точки на втором шаге и т. д.

Итак, мы здесь имеем дискретный ряд аффинных растяжений и сжатий, которые последовательно накладываются друг на друга и приводят к некоторому процессу деформирования. Общую картину легко понять, если перейти к дифференциальным уравнениям. Действительно, описанная выше процедура суммирования соответствует интегрированию следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{dx'_1}{dt} = k(\cos 2\Omega t x'_1 - \sin 2\Omega t x'_2), \\ v'_2 &= \frac{dx'_2}{dt} = -k(\sin 2\Omega t x'_1 + \cos 2\Omega t x'_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Течение (8) обладает рядом интересных свойств. Во-первых, для него, как и следовало, ожидать отсутствуют изменения объема и вращение

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) \equiv 0; \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} \right) \equiv 0, \quad (9)$$

а максимальная скорость сдвига постоянна

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} \right)^2} = 2k.$$

При этом результатом нагружения является только поворот главных осей тензора скоростей деформаций

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1}}{\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2}} = -\operatorname{tg} \Omega t. \quad (10)$$

Теперь можно отвлечься от механического смысла системы (8) и перейти к ее решению. Сделаем формально следующую замену неизвестных функций $x'_1(t)$, $x'_2(t)$ на новые функции $x_1(t)$, $x_2(t)$:

$$x_1 = \cos \Omega t x'_1 - \sin \Omega t x'_2, \quad x_2 = \sin \Omega t x'_1 + \cos \Omega t x'_2. \quad (11)$$

Смысл этой замены очевиден. Это переход к координатам, связанным с направлением растяжения тела. Теперь можно считать, что эти координаты вращаются относительно исходных непрерывно и с постоянной угловой скоростью.

Дифференцируя равенства (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \cos \Omega t \frac{dx'_1}{dt} - \sin \Omega t \frac{dx'_1}{dt} - \Omega x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sin \Omega t \frac{dx'_1}{dt} + \cos \Omega t \frac{dx'_2}{dt} - \Omega x_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим (8) в (12) и снова воспользуемся (11). В результате придем к следующей системе уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1 - \Omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Omega x_1 - kx_2. \quad (13)$$

Итак, мы пришли к полю скоростей (13). Оно представляет собой наложение двух полей. Первое поле — это двухосное растяжение со скоростью k

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -kx_2. \quad (14)$$

Второе поле соответствует вращению тела как жесткому целому с постоянной угловой скоростью Ω :

$$\frac{dx_1}{dt} = -\Omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Omega x_1. \quad (15)$$

Один из принципов механики сплошной среды утверждает, что если на деформируемое тело наложить жесткое вращение, то на распределениях напряжений, деформаций и их скоростей это никак сказываться не должно. То есть это не должно сказываться ни на одной из объективных характеристиках процесса. Вопрос о реализации этого принципа при тех или иных конкретных построениях иногда бывает очень нетривиальным.

Действительно, поле скоростей (14) описывает аффинное растяжение и сжатие среды вдоль направлений Ox_1 , Ox_2 . Мы аддитивно добавляем к этому полю компоненты скорости (15), соответствующие жесткому вращению тела. В результате получаем качественно новое течение. Ниже будет показано, что оно совершенно отличается от жесткого поворота тела, испытывающего двухосное растяжение.

Механический смысл полученного результата ясен. Именно, равенства (13) описывают тот процесс, который конструировался с самого начала, то есть сложное нагружение

тела в условиях, когда направления растяжения-сжатия все время меняют свою ориентацию относительно самого тела.

Для сравнения теперь посмотрим, как выглядели бы уравнения, если бы мы действительно на двухосное растяжение наложили, жесткое вращение тела. Это легко сделать. Возьмем уравнения (14) и произведем в них замену переменных (3). Для этого продифференцируем (3), рассматривая угол β как функцию времени $\beta = -\Omega t$. Затем воспользуемся условиями (14). В результате придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx'_1}{dt} &= k(\cos 2\Omega t \cdot x'_2 - \sin 2\Omega t x'_2) + \Omega \cdot x'_2, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= -k(\sin 2\Omega t \cdot x'_1 + \cos 2\Omega t x'_2) + \Omega \cdot x'_1.\end{aligned}\tag{16}$$

Система (16) отличается от (8) только наличием последних слагаемых. Эти слагаемые как раз и описывают жесткий поворот тела.

Таким образом, можно сделать следующий общий вывод. Если к полю скоростей в координатах, связанных с направлением растяжения тела, добавить компоненты скорости, соответствующие жесткому вращению тела, то это приведет к уравнениям, описывающим сложное нагружение тела. (Причем этот процесс существенно отличается от жесткого поворота тела, подверженного двухосному растяжению). Ситуация будет аналогичной и в более общем случае, когда растяжение аффинным уже не будет являться. Это будет показано в главе 10.

Перейдем теперь к исследованию системы (13). Построение ее общих решений никаких трудностей не представляет. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ некоторая материальная точка A имела координаты

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2.\tag{17}$$

Характер траектории ее движения существенно зависит от соотношения скоростей растяжения и поворота. При $k < \Omega$ траектория определяется следующим общим решением

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \left(\frac{k}{\lambda} a_1 - \frac{\Omega}{\lambda} a_2 \right) \sin \lambda t + a_1 \cos \lambda t, \\ x_2(t) &= \left(\frac{\Omega}{\lambda} a_1 - \frac{k}{\lambda} a_2 \right) \sin \lambda t + a_2 \cos \lambda t,\end{aligned}\tag{18}$$

где $\lambda = \sqrt{\Omega^2 - k^2}$. Здесь траектории замкнуты и остаются все время в ограниченной области пространства.

Так, для точки, которая имела в начальный момент координаты $(a_1, 0)$, имеем

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{k}{\lambda} \sin \lambda t + \cos \lambda t, \quad \frac{x_2}{a_1} = \frac{\Omega}{\lambda} \sin \lambda t.\tag{19}$$

Для дальнейшего анализа удобнее перейти к координатам Ox повернутым относительно Ox_1x_2 на угол $\pi/4$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, y = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Механический смысл этого перехода связан со следующим обстоятельством. В координатах Ox_1x_2 компоненты тензора скоростей деформаций для течения (13) имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = k, \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -k, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0.$$

То есть Ox_1, Ox_2 , являются главными осями тензора скоростей деформаций. Следовательно, направления Ox, Oy , будут совпадать с направлением максимальной скорости сдвига:

$$\varepsilon_{xx} = 0, \varepsilon_{yy} = 0, \varepsilon_{xy} = \frac{k}{2}.$$

В этих осях уравнения траекторий частицы упрощаются и приобретают следующий вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2(\Omega + k)} + \frac{y^2}{a_1^2(\Omega - k)} = \frac{\Omega^2}{\lambda^2}. \quad (21)$$

Таким образом, траектории представляют собой эллипсы с осями равными (рис. 3.4 $k/\Omega = 0,2; 0,7$)

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{1 - k/\Omega}}, b = \frac{a_1}{\sqrt{1 + k/\Omega}}. \quad (22)$$

Закон обращения точек вокруг центра обладает одной замечательной особенностью. Если из центра к точке провести радиуса — вектор, то за одинаковое время он будет ометать одинаковые площади. Значит, секториальная скорость точки будет постоянной. Действительно, продифференцируем (19) по времени

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_1(k \cos \lambda t - \lambda \sin \lambda t), \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_1 \Omega \cos \lambda t \end{aligned} \quad (23)$$

и вычислим векторное произведение:

$$|\bar{v} \times \bar{r}| = a_1^2 \Omega, \quad (24)$$

здесь использованы обычные обозначения:

$$\bar{v} = \{v_1, v_2\}, \bar{r} = \{x_1, x_2\}.$$

Таким образом, для фиксированной материальной точки величина (24) от времени не зависит. На рис. 3.4 показано положения материальных точек через одинаковые промежутки времени. Центральные лучи строились таким образом: в начальный момент времени бралась совокупность материальных точек, лежащих на прямой $y = 0$. Затем отмечалось положение этих же точек через одинаковые промежутки времени. Здесь сразу же обнаруживается два обстоятельства. Первое — указанные точки все время остаются на прямоли-

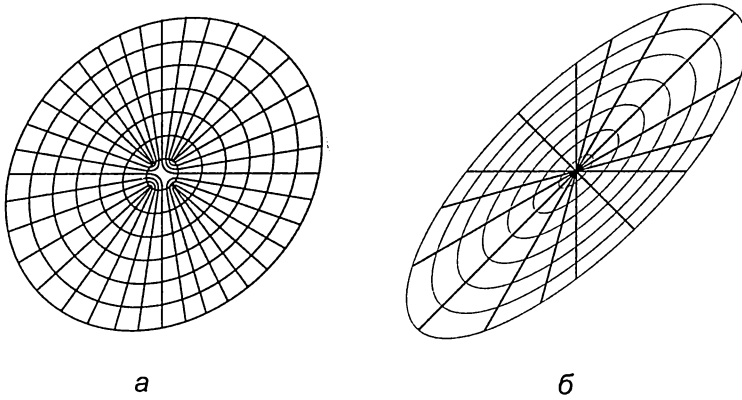


Рис. 3.4

нейном луче (это естественно, так как деформация является аффинной и поэтому любая исходная прямая может преобразоваться только в прямую. Очевидно, что если одна точка на этой прямой неподвижна, то преобразование может приводить только к вращению этой прямой и ее сжатию или растяжению). Видно также, что угловая скорость вращения меняется, а секториальная скорость — постоянна (площади

всех секторов между двумя соседними лучами одинаковы).

Если скорость растяжения k постепенно увеличивать, то траектории будут все больше вытягиваться вдоль направления наибольшего сдвига. При $k = \Omega$ эллипсы вырождаются в прямые, параллельные оси Ox .

$$x_1(t) = k \cdot (a_1 - a_2)t + a_1, \quad x_2(t) = k \cdot (a_1 - a_2)t + a_2. \quad (25)$$

Если же $k > \Omega$, то траектории становятся гиперболическими. Действительно, положим $\mu = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k}{\mu} \right) a_1 - \frac{\Omega}{\mu} a_2 \right] e^{\mu t} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{k}{\mu} \right) a_1 + \frac{\Omega}{\mu} a_2 \right] e^{-\mu t}, \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega}{\mu} a_1 + \left(1 - \frac{k}{\mu} \right) a_2 \right] e^{\mu t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega}{\mu} a_1 + \left(1 + \frac{k}{\mu} \right) a_2 \right] e^{-\mu t}. \end{aligned} \quad (26)$$

Легко показать, что этому решению отвечают гиперболы с двумя асимптотами

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\Omega}{k + \sqrt{k^2 - \Omega^2}}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\Omega}{k - \sqrt{k^2 - \Omega^2}}. \quad (27)$$

К первой асимптоте траектории стремятся при $t \rightarrow +\infty$, ко второй асимптоте — при $t \rightarrow -\infty$. Произведение угловых коэффициентов равно единице. Поэтому асимптоты симметричны относительно биссектрисы $x_1 = x_2$.

Появление в данной задаче неперiodических решений с траекториями, уходящими на бесконечность, на первый взгляд кажется парадоксальным. Однако этот результат имеет ясный механический смысл. Для его объяснения перейдем к полярным координатам $x_1 = r \cos \alpha$, $x_2 = r \sin \alpha$ и преобразуем систему (13) к следующему виду

$$\frac{d \ln r}{dt} = k \cos 2\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \Omega - k \sin 2\alpha. \quad (28)$$

Последнее уравнение показывает, что угловая скорость движения материальной точки вокруг центра зависит не только от скорости вращения Ω , но и от скорости растяжения k .

Это становится очевидным, если обратиться к рис. 3.1. Видно, что компоненты вектора скорости, связанные с растяжением, дают определенную составляющую также на нормаль к радиусу, то есть дают свой вклад в угловую скорость. Этот вклад достигает наибольшей величины при $\alpha = \pi/4$. Поэтому, если значение k приближается к величине Ω или превосходит ее, то появляются радиусы, где указанные скорости полностью компенсируют друг друга. Преодолеть этот радиус материальная точка уже не может. Поэтому вследствие непрерывного растяжения точка уходит на бесконечность по закону (25) или (26). При этом секториальная скорость точек также сохраняется постоянной (как и для эллиптических траекторий).

Рассматриваемый класс аффинных деформаций обладает еще одной очень интересной особенностью. Для того чтобы понять ее, обратимся снова к уравнениям (13). В соответствии с этими уравнениями, все точки среды движутся согласованно и по определенному закону. В чем причина такой согласованности? Причины как таковые (то есть поле напряжений) здесь не рассматриваются. Для этого необходимы данные о реологии среды. Но в общем случае можно сказать, что главная причина состоит в том, что мы рассматриваем не набор отдельных частиц, а именно сплошную среду, подверженную аффинной деформации. В свою очередь в качестве причины последней выступают определенные условия на границе. (Граничные скорости должны линейно зависеть от декартовых координат границы). Эту ситуацию рассматривалась на примере стержня в главе 1.

В задаче (13) мы имеем точно такую же ситуацию. (Здесь это не так очевидно как для стержня (см. рис. 1.2)). Теперь можно рассмотреть следующую интерпретацию равенств (13). Предположим, что все связи между элементарными объемами среды распались и их роль на себя взяли некоторые эффективные массовые силы. Возникает вопрос, какими должны быть силы, чтобы они могли обеспечить такое же движение отдельных частиц, которые реализуется при их согласованном поведении в сплошной среде.

Структура уравнений (13) позволяет легко ответить на этот вопрос. Продифференцируем каждое из уравнений (13). В результате получим систему:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(\Omega^2 - k^2)x_1, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -(\Omega^2 - k^2)x_2. \quad (29)$$

Для частиц с единичной массой силу можно отождествить с ускорением. Таким образом, видно, что при $\Omega \neq k$ поле сил является центральным с потенциалом, пропорциональным r^2 . То есть каждая частица движется под действием центробежной силы и силы притяжения или отталкивания, пропорциональной расстоянию до центра. Если $\Omega > k$, то центр выступает как точка притяжения. Поэтому траектории замкнуты и точки находятся в ограниченной области. Если же $k > \Omega$, то силы переходят в отталкивающие и точки удаляются на бесконечность. При $\Omega = k$ точки движутся по инерции со скоростями, определяемыми равенствами (13). На языке сил факт постоянства секториальной скорости движения частиц по траекториям является хорошо известным следствием центральности поля сил. Естественно, что в задаче о растяжении с поворотом поле эффективных массовых сил получилось такое же, как и в задаче о плоско-параллельном сдвиге с поворотом.

Основным является случай (13). Поэтому рассмотрим его подробнее. Как отмечалось, в этом случае все частицы среды движутся по эллиптическим траекториям. Это обстоятельство подсказывает и форму тела, которую удобнее всего выбрать для моделирования.

Форма должна быть эллиптической, причем такой, которая совпадает с одной из траекторий (21). Закон движения (23) диктует и вид необходимых краевых условий: краевые условия должны быть такими, чтобы вектор скорости был направлен по касательной к границе, а величина его определялась законом Кеплера:

$$\bar{v} \times \bar{r} = \text{const}, (\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0. \quad (30)$$

Итак, если на границе эллиптической области задается кеплеровское распределение скоростей, то при выполнении некоторых дополнительных условий (требование единственности решения и отсутствия динамических эффектов) внутри области мы получаем однородную, аффинную деформацию эллиптического типа (13). Таким способом мы воспроизводим ситуацию, которая была описана выше: имеем тело, подверженное растяжению и сжатию вдоль ортогональных направлений с некоторой постоянной скоростью. Причем указанные направления относительно тела непрерывно поворачиваются.

§ 3.2. ПРИБОР СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Итак, однородный процесс характеризуется условиями (18), (30) § 3.1. Как реализовать подобное нагружение? Поскольку материальные точки движутся по замкнутым эллиптическим траекториям, для реализации необходимо выделить эллиптическую область и на границе задавать вектор скорости, направленный по касательной к границе. Величина скорости должна меняться по закону (30) § 3.1. Технически это осуществить довольно сложно. Проще сохранить только основные черты простейшей, однородной ситуации (преобразование эллиптической области в себя), а линейную скорость задавать постоянной.

Такой процесс можно реализовать следующим образом [2]. Поместим образец материала в прямой эллиптический цилиндр, ограниченный гибкой оболочкой. Нагружающее устройство выполним в виде жесткого вертикального цилиндра, во внутреннюю полость которого точно вставляется гибкая оболочка с образцом. Нагружение произведем относительным вращением внешнего цилиндра и оболочки (рис. 3.5). Указанный способ можно обобщить на более широкий класс областей: фигур постоянного диаметра, различных овалов и др.

Замена граничных условий (30) § 3.1 на

$$|\bar{v}| = v_0 = \text{const}, (\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0 \quad (1)$$

порождает ряд вопросов. Во-первых, как неформально представить характер деформирования (1)? Для этого используем следующий прием. Пусть Γ, Γ_τ — конфигурации границы в моменты t и $t + \tau$, а D, D_τ — соответствующие им области (см. рис. 3.2). Так как на границе заданы перемещения (или скорости), то Γ и Γ_τ — известны. Совместим обе конфигурации. В общем случае при наложении появляются области трех типов: $D^0 = D \cap D_\tau$, $D^- = D \setminus D^0$ и $D^+ = D_\tau \setminus D^0$. Грубо говоря, результирующая деформация от t до $t + \tau$ сводится к тому, что из исходной области D устраняются области несовместности D^- и добавляются к ней области D^+ . Поэтому расположение и вид областей D^+ , D^- позволяют до решения задачи качественно определить характер процесса в целом и дать интегральную оценку деформаций как отношение площадей $D^+ \cup D^-$ к D . Здесь возникает одно обстоятельство. Как правило, смещения на границе задаются из соображений удобст-

ва описания кинематики нагружающих устройств. Поэтому в этих смещениях могут содержаться привходящие составляющие, отвечающие жестким переносу и повороту деформируемого тела. Их необходимо исключить. Ограничимся задачей (1) при малых временах τ . Заменяем граничные смещения u_1, u_2 на $w_1 = u_1 - \Delta\omega x_2, w_2 = u_2 + \Delta\omega x_1$.

Постоянную $\Delta\omega$ определим из условия

$$\frac{1}{L} \int_{\Gamma} \frac{\bar{w} \times \bar{r}}{r^2} dl = 0,$$

где L — длина границы. Смещения w_1, w_2 можно использовать для построения областей несовместности D^+, D^- . Видно, что их расположение таково, что в целом образец растягивается вдоль направления $x = -y$ и сжимается вдоль ортогонального направления $x = y$ (в § 8.1 рассматривается обобщение этого приема на произвольные ситуации).

Для более детального изучения удобнее исходить из краевых условий (1), хотя они и содержат неявно жесткий поворот. Это связано с тем, что в (1) граница не меняется и скорости на ней от времени не зависят. Поэтому для широкого класса материалов поля скоростей и напряжений внутри области выходят на стационарный режим. Помимо прямой экспериментальной проверки стационарности можно использовать следующий критерий. Подвергнем некоторый образец материала периодическому однородному сдвигу по методике, изложенной в главе 2. Если через определенное число циклов напряжения в образце перестают зависеть от его исходного состояния (т. е. память об исходной форме стирается) и сохраняется зависимость только от фазы внутри цикла, то материал можно отнести к указанному выше классу.

Итак, пусть течение (1) стационарно. Вследствие симметрии материальный элемент в центре не испытывает переноса, а значит, и расширения. Неизменными будут и главные направления тензора скоростей деформаций, скорости растяжения и сжатия вдоль главных осей, а также ротор скорости. Это означает, что центральный элемент находится в описанных выше „идеальных“ условиях сложного нагружения с непрерывным поворотом осей.

Постановка модельных и реометрических экспериментов предполагает регистрацию фактических данных о тензорах напряжений, деформаций и их скоростей. При исследовании сложного нагружения основной вопрос — о соосности или степени разосности тензоров. Рассмотрим вначале способ

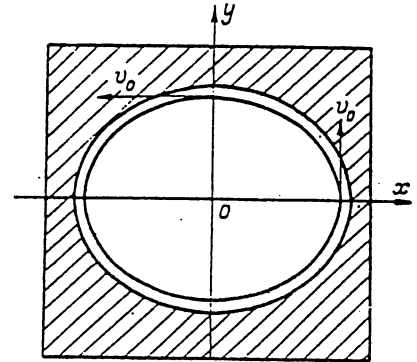


Рис. 3.5

определения компонент тензора деформаций. В данной ситуации нет никаких оснований считать повороты и деформации малыми. Для описания больших деформаций используются, как известно, различные меры, связанные с анализом изменения расстояний между парами близких точек. Возможен и другой подход, когда внимание сосредоточивается не на относительных смещениях точек, а на преобразовании некоторых малых областей в целом без „разрешения“ на смещения индивидуальных точек, принадлежащих этим областям.

Пусть a_i, x_i — лагранжевы и эйлеровы координаты материальной точки, u_i — компоненты вектора смещения:

$$x_i = a_i + u_i(a_j, t), \quad i, j = 1, 2. \quad (2)$$

Зафиксируем при $t = 0$ все материальные точки внутри круга с радиусом ε и центром $a_i = a_i^0$. Величину ε можно считать малой, но на производные $\partial u_i / \partial a_j = u_{i,j}$ никаких ограничений накладывать не будем. В процессе деформирования окружность переходит в эллипс:

$$(1 + 2E_{22})y_1^2 - 4E_{12}y_1y_2 + (1 + 2E_{11})y_2^2 = \delta^2, \quad (3)$$

где

$$y_i = [x_i - a_i - u_i(a_j, t)] / \varepsilon, \quad E_{11} = u_{1,1} + (u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2) / 2,$$

$$E_{22} = u_{2,2} + (u_{2,1}^2 + u_{2,2}^2) / 2, \quad 2E_{1,2} = u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{2,1} + u_{1,2}u_{2,1},$$

$$\delta = 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}.$$

Нетрудно доказать, что δ — инвариант, а E_{ij} — компоненты тензора второго ранга E . Тензор деформаций E фактически совпадает с тензором Фингера [192] и отличается от тензора Грина заменой производных $\partial u_i / \partial a_j$ на $\partial u_j / \partial a_i$. Механический смысл инварианта δ и компонент E определяется равенством (3). Главные направления тензора совпадают с осями эллипса, в который преобразуется окрестность точки, представляющая собой круг:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2E_{12} / (E_{11} - E_{22}). \quad (4)$$

Здесь α — угол между главным направлением и осью Ox_1 .

Для второго крайнего случая, когда в качестве „окрестности“ берется отрезок $a_1 = a_1^0 + \rho \cos \beta_0$, $a_2 = a_2^0 + \rho \sin \beta_0$, $|\rho| < \varepsilon$, соотношения (2) приводят к формуле для угла поворота

$$\operatorname{tg}(\beta - \beta_0) = \frac{u_{2,1} + (u_{2,2} - u_{1,1}) \operatorname{tg} \beta_0 - u_{1,2} \operatorname{tg} \beta_0}{(1 + u_{1,1}) + (u_{1,2} + u_{2,1}) \operatorname{tg} \beta_0 + (1 + u_{2,2}) \operatorname{tg}^2 \beta_0}.$$

Тензор E позволяет непосредственно проследить характер деформирования материальных объемов в процессе нагружения тела. Например, для течения (18) $\operatorname{tg} 2\alpha = (\Omega / \lambda) \operatorname{tg} \lambda t$, $\delta \equiv 0$ и полуоси эллипса, отнесенные к радиусу исходного круга, равны $1 \pm (k / \Omega) \sin \Omega t$. Здесь для сокращения записей принято, что $k \ll \Omega$.

Из определения (3) следует способ экспериментального измерения компонент E_{ij} . Пометим в начальный момент времени все точки внутри достаточно малого круга. Будем фиксировать параметры эллипса, в который преобразуется круг в процессе нагружения тела. Уравнение (3) позволяет по этим данным восстановить компоненты E_{ij} . Выше тензор E и вводился в связи с тем, что измерения параметров эллипса осуществить проще, чем относительные смещения близких точек. Для центрального элемента измерения подтверждают выполнение равенств (18) и, кроме того, позволяют определить скорость поворота, величину и главное направление тензора скоростей деформаций.

Перейдем к вопросу о напряжениях. Поместим в центр образца плавающие датчики нормальных и касательных напряжений. Датчики измеряют напряжения между одними и теми же материальными частицами. В стационарном режиме соответствующие диаграм-

мы носят периодический характер. Ориентация датчика, которой соответствует экстремум нормальных или нулевое значение касательных компонент, определяет главное направление тензора напряжений σ_1 . По соотношению направлений σ_1 и ε_1 можно судить о степени соосности тензоров.

Таким образом, схема нагружения (1) позволяет полностью заменить однородную схему (18) § 3.1.

Выше была описана принципиальная схема устройства сложного нагружения. Ее можно реализовать различными способами. Один из вариантов показан на рис. 3.6. Образец материала 1 помещается в камеру — цилиндрический стакан 2, выполненный из тонкого листового проката бериллиевой бронзы. Дно закрывается натянутой резиной 3. Нагружающее устройство представляет собой жесткие пластины-шаблоны 4 с соосными эллиптическими вырезами. В них вставляется цилиндрический стакан. Пластины-шаблоны охватывают оболочку в различных сечениях по высоте и закрепляются на оси 5, которая через подшипники установлена на основании 6. Привод на ось (на фигуре не показан) осуществляется от электродвигателя через редуктор со ступенчатым переключением скорости вращения вала. Вращающий момент на цилиндрическом стакане, возникающий за счет трения с шаблонами, компенсируется гибкими тягами 7. Тяги крепятся к верхней части оболочки стакана к неподвижным стойкам 8.

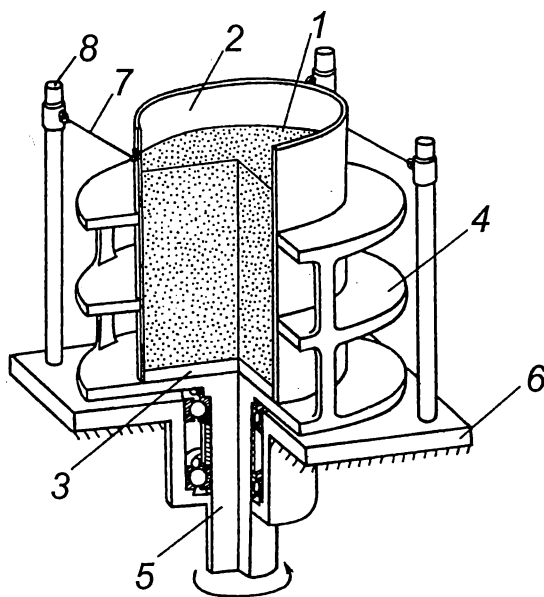


Рис. 3.6

На рис. 3.7 а, б показана фотография прибора: 1 — образец из сыпучего материала (на рис. б — жидкость), 2 — камера, 3, 4 — шаблоны, 5 — стойки, 6, 7 — электродвигатель с редуктором, 8 — гибкие тяги, 9 — неподвижные стойки.

Опыты показали, что длительное нагружение приводит к износу камеры на контакте с шаблонами. Для его уменьшения в одной из модификаций прибора, показанной на рис. 3.8 а, б, использовались ролики.

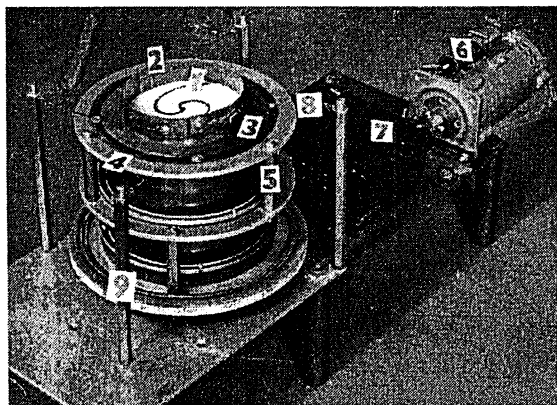


Рис. 3.7 (а)

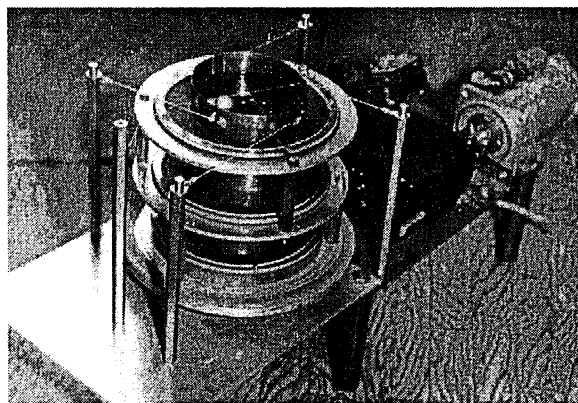


Рис. 3.7 (б)

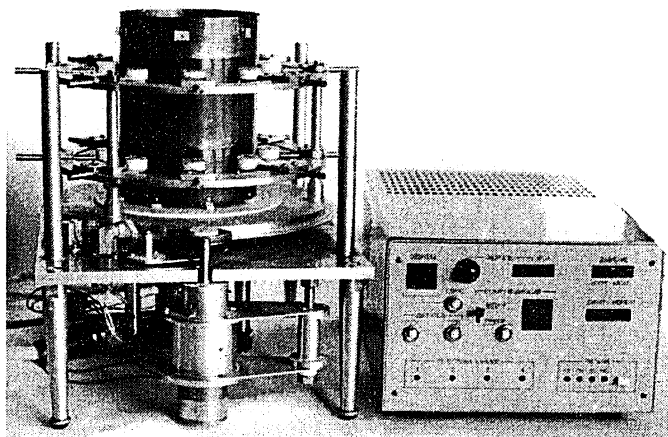


Рис. 3.8 (а)

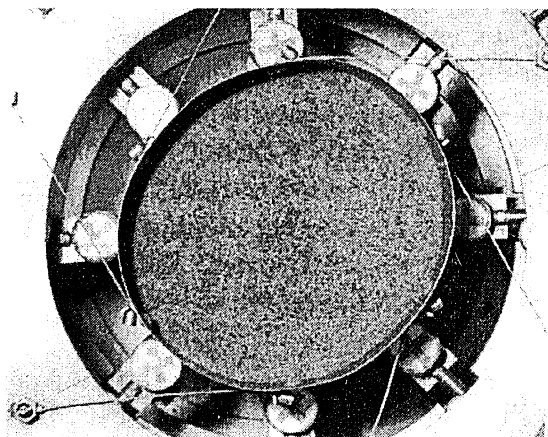


Рис. 3.8 (б)

Эксперименты проводились таким образом [16]. В центр камеры на определенной глубине помещался датчик напряжений. Затем камера заполнялась материалом. Нагружение проводилось путем вращения шаблонов. Скорость и направление вращения менялись по заданной программе. Нормальные и касательные напряжения фиксировались одним датчиком. Тензочувствительные элементы в нем устанавливались в общем корпусе и ориентировались на измерение напряжений в одной плоскости. Для интерпретации результатов необходимо знать ориентацию плоскости датчика относительно осей эллиптических шаблонов. Для контроля его положения к датчику крепилась вертикальная спица. На ее свободном конце над поверхностью образца фиксировался флажок. Плоскость флажка совпадала с плоскостью датчика. В моменты, когда малая ось шаблона совпадала с плоскостью датчика, цепь размыкалась, и на осциллограмме напряжений делались отметки (на рис. 3.9 отмечены точками). Графики напряжений как функции угла поворота выводились на самописцы.

Далее о кинематических измерениях. В качестве исходных данных известны длины осей эллиптических шаблонов a, b , скорость их вращения, а значит, и секториальная скорость граничных точек. В принятом способе нагружения она меняется в b/a раз. Можно ожидать, что при малых $(a-b)/b$ распределение скоростей деформаций будет близким к однородному. Тогда все кинематические характеристики легко определяются по исходным данным.

Представляют интерес и независимые локальные измерения. Они проводились по схеме, описанной выше. В центре области закрашивалось круглое пятно диаметром 4 мм. В процессе деформирования пятно превращалось в эллипс. Ориентация и длины его осей фиксировались через микроскоп. Затем определялись локальные значения компонент тензора скоростей деформаций и вращения.

Перейдем к описанию результатов. Обозначим через OXY лабораторную систему координат, которую жестко свяжем с неподвижным основанием стенда b (см. рис. 3.6). Начало поместим в центр камеры, оси ориентируем вдоль осей эллиптических шаблонов в исходном состоянии. Пусть α — угол между большой осью шаблона и направлением OX , κ — угол между большой осью закрашенной на образце эллиптической области и тем же направлением OX . Экспериментальные замеры хорошо ложатся на прямую $\kappa = 45^\circ + 0,5\alpha$.

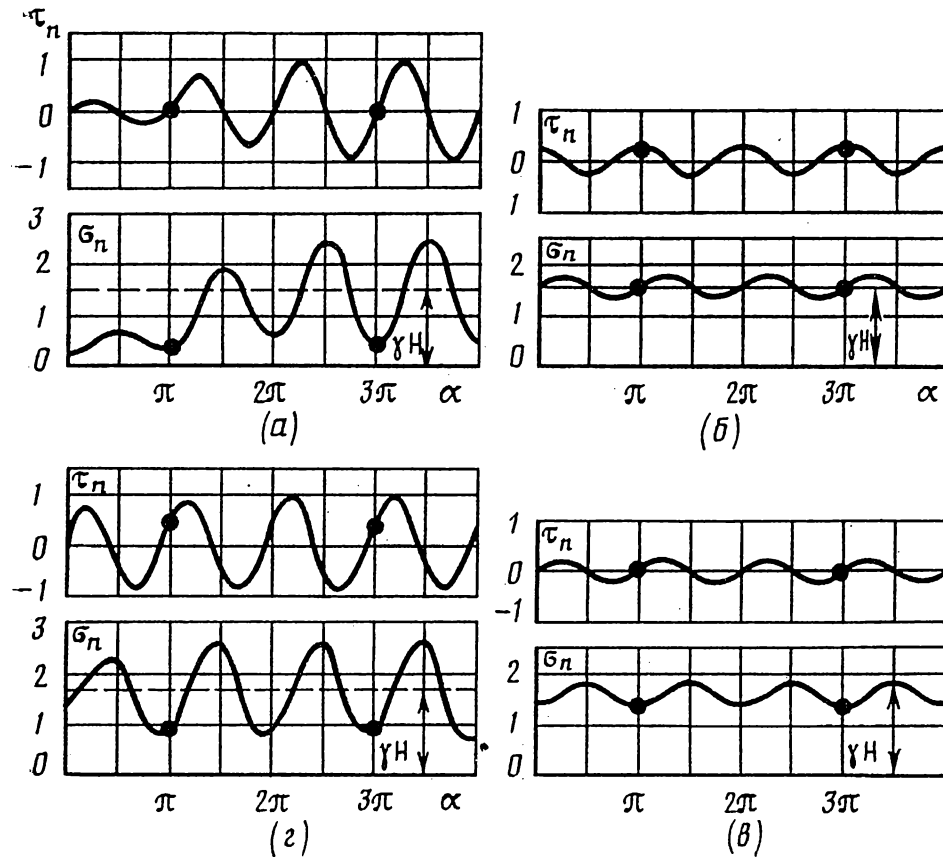


Рис. 3.9

Наличие коэффициента 0,5 здесь неслучайно и означает, что в пределах точности измерений величину $(a - b) / b$ можно считать действительно малой. (В опытах $b = 55,32; 53,64$; $a = 60,8; 62,38$ мм). Свободный член показывает, что главное направление тензора скоростей деформаций составляет с большой осью эллиптического шаблона угол 45° .

На рис. 3.9 изображены графики изменения нормальных σ_n (кПа) и касательных τ_n (кПа) напряжений для a — сухого кварцевого песка (крупность частиц 0,3 мм); $б$ — меда (кинематическая вязкость $860 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$); $в$ — смеси песка с глицерином при полностью заполненном поровом объеме (кинематическая вязкость глицерина $12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$); $г$ — смеси песка с медом (44% меда и 56% песка по весу). Датчик располагался в вертикальной плоскости на глубине 80 мм, скорость вращения шаблонов — $3,78 \text{ с}^{-1}$, коэффициент сжатия — $K = 0,91$ ($a = 60,8$ мм, $в = 55,32$ мм). В лабораторной системе координат нагружение носит периодический характер. Период равен времени поворота шаблонов на угол 180° . Для вязких жидкостей диаграммы напряжений выходят на периодический режим практически сразу, для сыпучих сред — через 12—14 циклов. Это означает, что в последнем случае материалы обладают некоторой памятью в следующем смысле. Представим эллиптическую область как набор материальных волокон, проходящих через ее центр. В начальный момент каждое волокно имеет определенную длину $2b \leq l^0 \leq 2a$ и вполне идентифицируется параметром l^0 . В процессе нагружения длина волокна l^0 периодически меняется от $2b$ до $2a$. Рассмотрим нормальные напряже-

ния в его сечении. Ясно, что в общем случае они должны зависеть от текущей длины l и начального положения l^0 . Например, для упругого тела зависимость от обоих аргументов существенна. Поэтому по известным значениям напряжений и длине всегда можно восстановить значение l^0 . В этом смысле волокно всегда „помнит“ свою первоначальную длину. Для сыпучих материалов, в том числе насыщенных вязкой жидкостью, это не так. Здесь при циклическом нагружении зависимость напряжений от аргумента l^0 быстро стирается — волокна „забывают“ свою первоначальную длину и все напряжения определяются только фазой внутри цикла.

Интересно отметить, что средние значения нормальных напряжений на вертикальной площадке (см. рис. 3.9) равны весу столба материала над датчиком γH . Как указывалось, отметки на диаграммах соответствуют моменту, когда плоскость датчика проходит через малую ось эллипса. Данные о их положении позволяют судить о степени разности тензоров напряжений и скоростей деформаций. Например, для меда отметка попадает на максимум касательных и среднее значение нормальных напряжений. Это означает, что главное направление тензора напряжений σ_1 отклоняется от оси эллиптического шаблона на угол 45° . Следовательно, тензоры напряжений и скоростей деформаций соосны. Конечно, для вязких жидкостей соосность тензоров сомнений не вызвала. Полученный здесь результат можно рассматривать как прямое экспериментальное подтверждение соосности и — главное — как тест для методики в целом.

Из диаграмм на рис. 3.9 видно также, что поведение сухого песка в определенном смысле противоположно поведению вязкой жидкости. Здесь метки приходятся на минимум нормальных и нулевое значение касательных напряжений, т. е. при периодическом деформировании любого волокна максимальному сжимающему напряжению соответствует наименьшая длина волокна (его направление совпадает с малой осью эллипса), а наименьшему сжимающему напряжению соответствует наибольшая длина волокна (ориентация вдоль большой оси эллипса). При этом главные оси тензора напряжений отклоняются от осей тензора скоростей деформаций на угол — 45° . Приведенные результаты от скорости нагружения не зависят. Не зависят от скорости нагружения и амплитуды напряжений. Это означает, что сухой песок вязких свойств не проявляет.

Перейдем теперь к случаю, когда поровое пространство заполнено вязкой жидкостью. Как и следовало ожидать, такая среда обнаруживает промежуточный тип поведения. Диаграммы напряжений рис. 3.9 показывают, что для смеси песка с медом при скорости нагружения $3,78 \text{ с}^{-1}$ угол разности тензоров напряжений и скоростей деформаций составляет 31° . С увеличением скорости амплитуда напряжений возрастает, а разность уменьшается (вязкие свойства становятся преобладающими). Смесь песка с глицерином характеризуется той же разностью, что и сухой песок (вязкость — незначительна). Влияние глицерина сказывается только на уменьшении напряжений, то есть фактически при малых скоростях он играет роль смазки.

Рассмотренный выше способ испытаний удобен и для исследования дилатансии при сложном нагружении. Очевидно, что объем камеры при любых углах поворота остается неизменным. Это означает, что изменение высоты образца в точности повторяет изменение его объема. Измерения проводились по схеме [9]. Камера заполнялась материалом. Затем устанавливался датчик высоты и проводилось нагружение. На самописец выводилось изменение высоты образца как функции угла поворота шаблонов.

На рис. 3.10 показаны дилатансионные кривые для сухого кварцевого песка (ΔH — мм, α — рад). Видно, что с увеличением угла поворота материал монотонно и необратимо уплотняется. При достаточно больших углах дилатансия себя исчерпывает, упаковка переходит в стационарное состояние и изменение объема прекращается. Стационарное значение пористости зависит от коэффициента сжатия: большему коэффициенту отвечает более плотная упаковка (кривая 1 рис. 3.10: $K = 0,82$, пористость — $\Pi = 37,2\%$, кривая 2 $K = 0,86$, пористость — $\Pi = 36,4\%$, начальная пористость в обоих случаях, соответствующая началу координат на графике, — $\Pi = 43,5\%$).

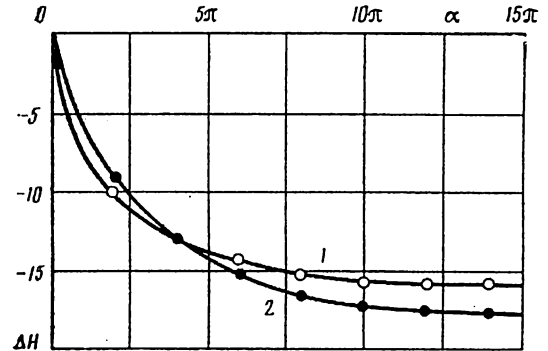


Рис. 3.10

Любой точке на дилатансионной кривой отвечает своя упаковка. Ее можно рассматривать как некоторую исходную упаковку для последующих исследований. Тогда вся предыдущая история деформирования — это только способ создания этой упаковки. Стационарной упаковке отвечает асимптота на графике дилатансии. Посмотрим, как реагирует эта упаковка на изменение направления поворота осей тензора скоростей деформаций. Если в точке A (рис. 3.11) изменить направление вращения шаблонов, то материал резко уплотнится, затем начнет разрыхляться и через несколько колебаний опять придет к стационарному состоянию (уровень 1, рис. 3.11, $\Pi = 36,4\%$, $K = 0,86$).

Рассмотрим теперь знакопеременное нагружение с небольшой амплитудой. Пусть угол поворота шаблонов меняется по программе $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$, α_0 — амплитуда, t — время, ω — достаточно малая частота, так что нагружение не вибрационное, а квазистатическое. Через определенное число циклов N дилатансионные кривые становятся периодическими. Упаковка переходит в стационарное состояние, которое соответствует новой программе. При этом достигается гораздо большая плотность, чем при монотонном нагружении $\alpha \sim t$ (рис. 3.11). Видно, что меньшей амплитуде отвечает большая плотность (уровень 2, рис. 3.11, $\alpha_0 = 45^\circ$, $N = 23$, $\Pi = 32\%$; уровень 3, $\alpha_0 = 80^\circ$, $N = 14$, $\Pi = 33,5\%$).

Если теперь из этого состояния перейти к монотонному нагружению, то произойдет резкое разрыхление и плотность постепенно выйдет на прежнее стационарное значение. Здесь обнаруживается качественно новое поведение сыпучего материала — затухающая периодичность дилатансионной кривой.

Итак, предложенные методика и прибор сложного нагружения могут быть использованы для измерения параметров и исследования реологических свойств широкого класса материалов, включая водонасыщенные грунты, суспензии, расплавы полимеров, гранулированные и порошковые материалы.

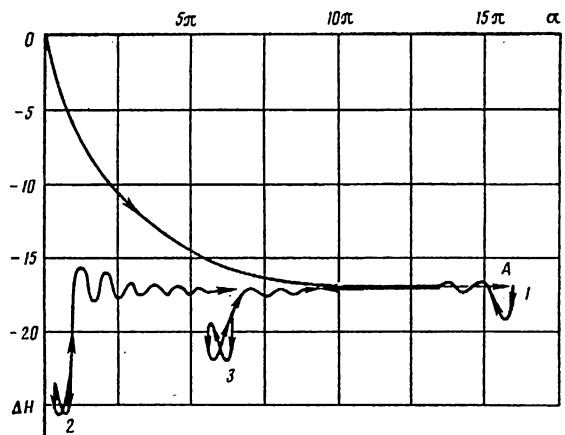


Рис. 3.11

§ 3.3. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТИПА

Следующий класс сложных нагрузений, удобных для реализации, определяется аффинным преобразованием (3.5) в § 1.2. Соответствующие схемы нагружения представлены на рис. 1.5 и 1.6. На рис. 3.12 и 3.13 показаны фотографии прибора, реализующего пространственный тип сложного нагружения. Деформирование материала осуществляется в камере 1, имеющей форму наклонного кругового цилиндра. Верхнее сечение камеры 2 закреплено неподвижно, а нижнее 3 смещается параллельно себе по круговой траектории. Последнее обеспечивается вращением диска 4, на котором эксцентрично закреплен центр основания 3. Вращение передается от двигателя 5 через редуктор 6. Боковая поверхность камеры выполнена из резины, закрепленной на жестких наклонных образующих 1. Каждая из образующих описывает коническую поверхность так, что в целом форма камеры все время переходит сама в себя.

На рис. 3.13 видна свободная поверхность образца. Так как объем камеры остается неизменным, то по изменению уровня свободной поверхности можно судить о дилатансии образца. Измерение напряжений можно делать по той же самой методике, что и в случае плоской деформации.

Следует отметить, что в описанной схеме идеальные краевые условия, которые диктуются теоретическими построениями, реализуются точнее, чем в стенде для изучения плоской деформации. Однако наличие силы тяжести искажает однородность напряженно-деформированного состояния. (Это влияние можно уменьшить, прикладывая к свободной поверхности образца сжимающую нагрузку). Последнее приводит к эффекту дифференциального вращения (направленного переноса) различных сечений образца. На рис. 3.14, 3.15 показаны результаты опыта с образцом из сыпучего материала. Вначале образец помещался в камеру 1. Диаметральная плоскость образца формировалась из сухого окрашенного песка. После нагружения образец пропитывался желатином, извлекался из камеры и часть его удалялась, чтобы можно было наблюдать новую форму диаметральной плоскости. Из рис. 3.14, 3.15 видно, что плоскость стала геликоидальной. Этот эффект необходимо учитывать при интерпретации реометрических измерений. Однако он пред-

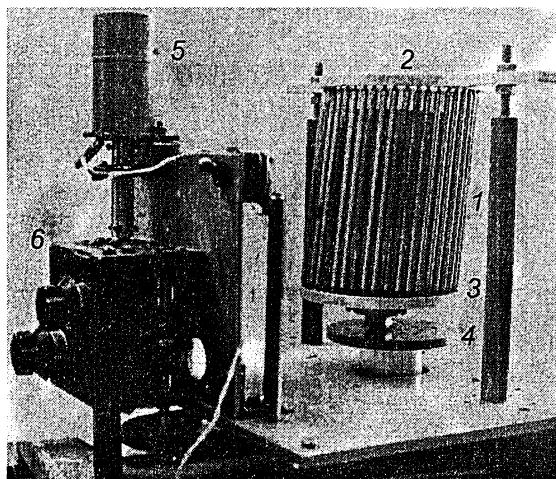


Рис. 3.12

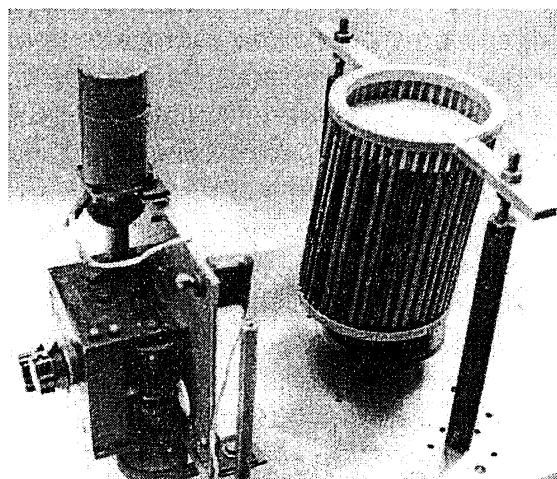
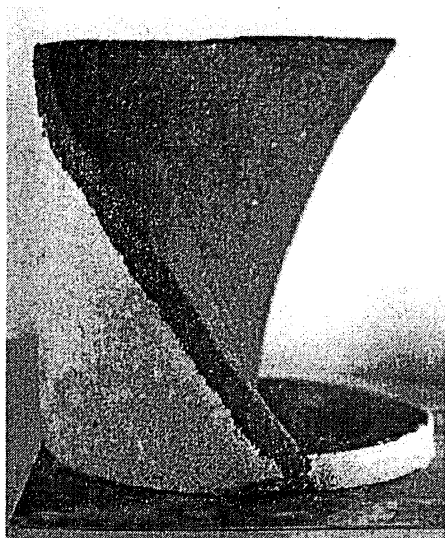


Рис. 3.13

*Рис. 3.14**Рис. 3.15*

ставляет и самостоятельный интерес. Подобный эффект направленного переноса при сложном нагружении наблюдался и в случае плоской деформации. Этот вопрос рассмотрен в главе 10.

Следующий класс аффинных деформаций можно получить, если воспользоваться схемой нагружения, показанной на рис. 1.4 (в силу ряда обстоятельств экспериментально этот процесс не изучался).

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

§ 4.1. ЛИНИИ ТОКА ЭНЕРГИИ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

В начале обратимся к классическому гидравлическому механизму. Согласно закону Паскаля, давление жидкости передается во всех направлениях без изменения. Если взять два сообщающихся цилиндра и в меньшем из них смещать поршень вниз, то в другом — поршень будет подниматься вверх. При этом жидкость сжимается, а энергия, которая затрачивается для смещения поршня вниз, будет возвращаться с выигрышем силы в другом месте. Второй пример подобного классического механизма — рычаг Архимеда.

В данных примерах хорошо видно, что деформируемый материал фактически играет роль некоторой среды, которая служит для передачи механической энергии из одной точки пространства в другую. Собственно, любое деформируемое тело можно рассматривать как определенный механизм для передачи механической энергии. Попробуем последовательно развить эту точку зрения [17]. В общем случае энергия, которая подводится к телу, частично диссипируется в нем, частично запасается в виде потенциальной энергии, а оставшаяся часть возвращается на определенных участках границы в виде работы против внешних нагрузок. Вначале рассмотрим самую простую ситуацию. Пусть упругий стержень с площадью поперечного сечения S растягивается осевой силой P , $\vec{P} = P\vec{n}$ на величину $\vec{u} = u \cdot \vec{n}$, где \vec{n} — вектор внешней нормали. Внешние силы совершают работу $A = Pu$. Вся эта работа накапливается в стержне в виде потенциальной энергии, которая протекает через сечение S в направлении, противоположном вектору \vec{n} . Отнесем эту работу к единице площади и полученную плотность обозначим через E_n :

$$E_n = -\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_n. \quad (1)$$

Итак, E_n имеет смысл энергии, переданной через единичную площадку с нормалью \vec{n} . Строго говоря, произведение Pu в буквальном смысле работой не является, так как сила P с возрастанием смещения u меняется. Но для линейно упругого тела работа равна $Pu/2$ и, кроме того, если u заменить на du , то $\sigma_n du$ действительно будет, иметь смысл работы за некоторое время dt . Поэтому в дальнейшем для краткости величину E_n будем называть работой или энергией. Соотношение (1) не меняет своего смысла и в общем случае, когда напряженно-деформированное состояние среды неоднородно. По формуле Коши имеем $\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma} \vec{n}$ и

$$E_n = -\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{E} \cdot \vec{n}, \quad (2)$$

где $\vec{\sigma}$ — тензор напряжений, $\vec{E} = -\vec{\sigma} \vec{u}$. Тензор $\vec{\sigma}$ позволяет определить вектор напряжений на любой площадке. В теле определено поле перемещений \vec{u} , это векторное поле. Поэтому

можно ввести новое понятие: вектор напряжений на площадке с нормалью, направленной вдоль вектора смещений. На первый взгляд такое понятие может показаться бессмысленным. Однако равенство (2) показывает, что при изучении процесса передачи энергии напряжение на этой площадке является основным. Итак, пусть $\bar{\sigma}_u = \sigma \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$. Тогда

$$\bar{E} = -\bar{\sigma}_u |\bar{u}|. \quad (3)$$

Из равенств (2), (3) следует механический смысл вектора \bar{E} : направление \bar{E} — это направление наибольшей плотности тока энергии. Значение модуля вектора равно этой плотности. Причем в любом другом направлении плотность тока энергии — это скалярное произведение \bar{E} на \bar{n} .

В акустике и электродинамике векторные поля аналогичного смысла известны как векторы Умова и Пойнтинга [193, 194]. В монографии [195] под потоком энергии понимается величина, отличная от (3). Так, если в теле развиваются трещины, то из общего потока энергии через площадку можно выделить ту часть, которая поступит затем в стоки энергии — вершину трещины. В соотношениях (1)—(3) рассматривается именно полный поток, безотносительно к дальнейшей судьбе его составляющих.

В общем случае, как отмечалось, часть этого потока перейдет в потенциальную энергию, часть диссипируется на необратимых деформациях, трещинах, линиях скольжения и оставшаяся часть пройдет через границу к внешним телам. Конечно, полный поток не является инвариантным по отношению к жесткому смещению и повороту тела. Это означает, что все построения выполняются с точностью до трех скалярных величин (ограничимся плоским случаем). Этим произволом всегда можно разумно распорядиться, исходя из механического смысла конкретной задачи.

Из формулы (2) следует, что всегда существует некоторое направление, вдоль которого энергия не передается. Это направление ортогонально вектору \bar{E} , или, что то же самое, — вектору $\bar{\sigma}_u$. Следовательно, линии, которые в каждой точке касаются $\bar{\sigma}_u$ представляют собой линии тока энергии. Для

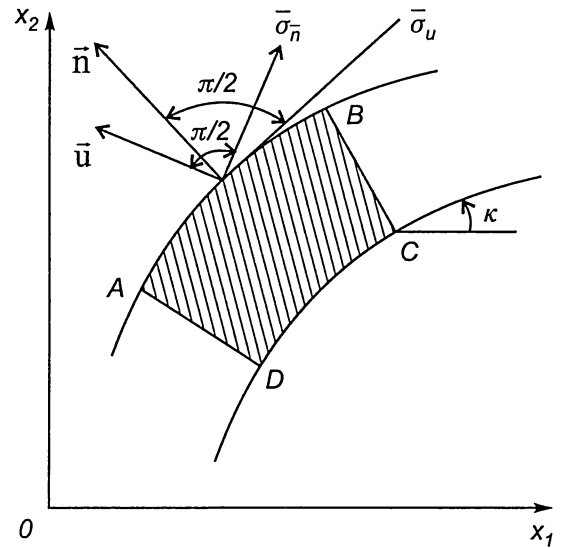


Рис. 4.1

элемента среды, выделенного этими линиями, энергия поступает только через границы AD, BC; через границы AB, BC потока энергии нет (рис. 4.1). Как следует из выражения (2), в декартовых координатах Ox_1x_2

$$\bar{E} = -\{\sigma_{11}u_1 + \sigma_{12}u_2, \sigma_{12}u_1 + \sigma_{22}u_2\}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\sigma_{12}u_1 + \sigma_{22}u_2}{\sigma_{11}u_1 + \sigma_{12}u_2}, \quad (4)$$

где κ — угол между касательной к линии тока и осью Ox_1 . Легко видеть, что

$$\operatorname{div} \bar{E} = \sigma_{12} u_{1,1} + \sigma_{12} (u_{1,1} + u_{2,1}) + \sigma_{22} u_{2,2}.$$

Поэтому

$$\int_L \bar{E} \bar{n} dl = - \int_S W ds,$$

где $W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ (ε_{ij} — по-прежнему компоненты деформаций). Пусть λ_1, λ_2 — криволинейные ортогональные координаты и линия $\lambda_2 = \text{const}$ направлена вдоль линии тока энергии. Тогда изменение вектора \bar{E} вдоль λ_1 полностью определяет его дивергенцию:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\partial E}{g_1 \partial \lambda_1} + \frac{E \partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} = \frac{1}{g_2} \frac{\partial (g_2 E)}{g_1 \partial \lambda_1},$$

где g_1 и g_2 — параметры Ламе.

Итак, в результате приложения усилия на границе любой внутренний элементарный объем тела запасает некоторую энергию. Оказывается, что эта энергия поступает в элемент не вообще с границы, а только с ее вполне определенных участков. По заданному элементу эти участки однозначно определяются соотношениями (3), (4). Интересно отметить, что полученный результат от реологии среды не зависит, т. е. не зависит от типа уравнений, описывающих деформирование среды. Конфигурация же самих линий тока от реологии среды и краевых условий, конечно, зависеть будет.

Рассмотрим потоки энергии в конкретных задачах. Начнем с простого примера — двухосного сжатия прямоугольной области с центром в точке 0 и сторонами, параллельными осям координат Ox_1, Ox_2 . Пусть область находится под действием напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22} \equiv \text{const}, \sigma_{12} \equiv 0$. В этом случае поле упругих смещений определяется формулами

$$u_1 = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) x_1, \quad u_2 = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) x_2, \quad (5)$$

где E, ν — упругие постоянные. Введем параметр:

$$\lambda = \frac{\sigma_{22} \varepsilon_2}{\sigma_{11} \varepsilon_1} = \frac{\sigma_{22} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11})}{\sigma_{11} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22})}. \quad (6)$$

Этот параметр характеризует соотношение потоков энергии с горизонтальных и вертикальных границ рассматриваемой области. Так, согласно (4) и (5),

$$\operatorname{tg} \kappa = \lambda \frac{x_2}{x_1}.$$

Тогда на линии тока выполняются соотношения:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda \frac{x_2}{x_1} \text{ или } x_2 = C x_1^\lambda. \quad (7)$$

Рассмотрим ситуации, возникающие при различных значениях параметра λ . Пусть $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, или $\lambda = 1$. В этом случае линии тока представляют собой радиусы, а точка 0

представляет собой особую точку векторного поля \vec{E} — устойчивый узел. Пусть теперь $\lambda > 1$, т. е. плотность тока энергии с горизонтальных границ больше, чем с вертикальных. В силу последнего неравенства величины $\sigma_{22}\varepsilon_{22}$ и $\sigma_{11}\varepsilon_{11}$ положительны, поэтому вектор плотности тока энергии на границах направлен внутрь области. В этом случае линиями тока являются параболы (7), касающиеся вершинами начала координат. Сравнивая семейства парабол с различными значениями λ , можно заметить, что их крутизна возрастает с ростом значений параметра λ , т. е. при уменьшении горизонтального потока энергии. В предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ семейство парабол (7) вырождается в семейство вертикальных линий $x_1 = \text{const}$. На интервале $(0,1)$ изменения параметра λ реализуется конфигурация линий тока, аналогичная рассмотренной выше. Пусть теперь $-\infty < \lambda < 0$. В этом случае линиями тока являются гиперболы, и тело играет роль посредника в передаче энергии с одних участков границы на другие.

Рассмотрим теперь задачу о деформировании упругого массива в окрестности выработки. На ее контуре $x_1^2 + x_2^2 = 1$ зададим давление p , на бесконечности — нормальные напряжения $\sigma_{11}^0 < 0$, $\sigma_{22}^0 < 0$. Эта задача имеет аналитическое решение [196]. Если это решение подставить в формулу (3), то векторное поле \vec{E} будет определено. Тогда задача построения линии тока сведется к интегрированию дифференциального уравнения (4) с правой частью, представляющей собой известную функцию координат. В качестве параметра нагружения по-прежнему будем использовать параметр λ , заданный формулой (6). Так как по мере удаления от выработки напряженное состояние приближается к однородному, то величина λ , как и выше, будет характеризовать соотношение потоков энергии с горизонтальных и вертикальных границ.

Рассмотрим вначале случай, когда контур выработки от напряжений свободен. Если $\lambda = 1$ при $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$, то линии тока представляют собой радиусы $x_2 / x_1 = \text{const}$. Величина плотности потока энергии вблизи контура уменьшается до нуля. В случае, когда горизонтальные напряжения меньше вертикальных (параметр $\lambda > 1$), линии тока вдали от контура стремятся к параболам (7). На самом же контуре появляются особые точки типа седловые с координатами $(0; +1, -1)$ и типа узловых с координатами $(\pm 1, 0)$ (рис. 4.2, $\lambda = 1,3$).

При дальнейшем увеличении λ линии тока перестраиваются. Вдали от контура их очертания близки к случаю однородного деформирования, а в окрестности контура — имеют ряд своеобразных и неожиданных на первый взгляд особенностей. Так, при $\lambda = -\infty$ ($\sigma_{11} = 0$) около контура образуются области со спиральными линиями тока, которые бесконечно закручиваются вокруг особых точек (рис. 4.3). В дальнейшем эти области будем называть областями вихревого течения. Как показал анализ, особыми точками являются фокусы с координатами $(\pm 0.11, \pm 1.08)$. Кроме отмеченных выше, появляются новые седловые точки, которые разделяют набегающий на контур поток энергии.

Рассмотрим теперь роль отпора крепи. Введем безразмерный параметр $q = p / \sigma_{22}$. Наряду с λ он

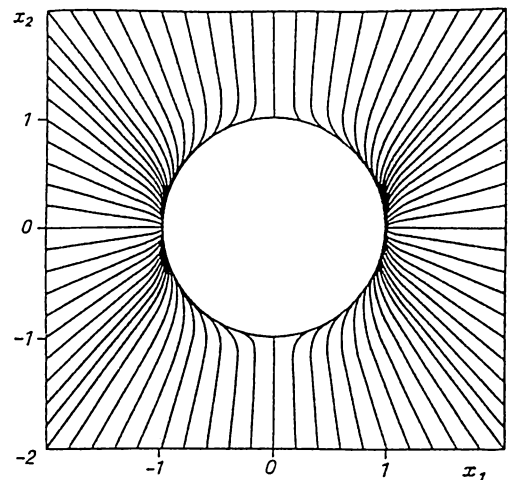


Рис. 4.2

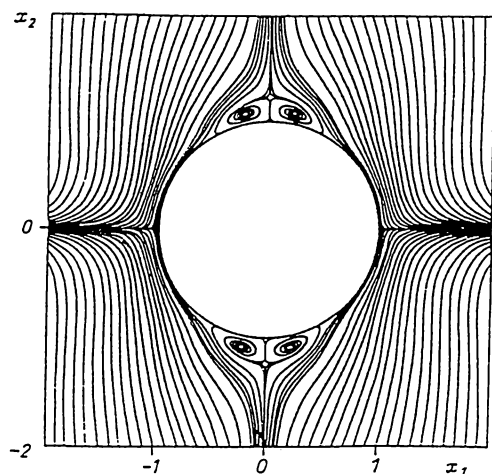


Рис. 4.3

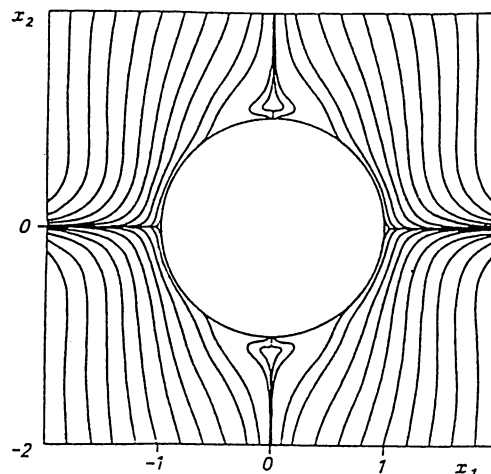


Рис. 4.4

характеризует соотношение потоков энергии с внешних границ и с контура выработки. Расчеты показывают, что при q влияние отпора заметно сказывается лишь вблизи контура. В отличие от свободного контура, линии тока теперь имеют возможность замыкаться на нем же. При этом области вихревого течения от контура отделяются (рис. 4.4, $\lambda = -\infty$, $q = 0,050$). Увеличение q до 0,055 при неизменных внешних нагрузках приводит к сжатию вихревых областей к оси Ox_2 . Дальнейший рост отпора крепи приводит к появлению потока энергии с контура в деформируемую среду.

Казалось бы этот поток должен распространиться в глубь области. Однако расчеты показывают, что реализуется парадоксальная на первый взгляд возможность, когда энергия с контура возвращается на него же (рис. 4.5, $\lambda = -\infty$, $q = 0,5$). Стрелками на рисунке отмечены направления векторных потоков \vec{E} , кружком выделены седловые точки, которые образуются в результате столкновения встречных потоков. В целом, здесь можно выделить следующие потоки энергии: с внешней границы, приходящие на контур; обтекающие контур и снова уходящие на внешнюю границу; линии тока энергии, которые исходят от

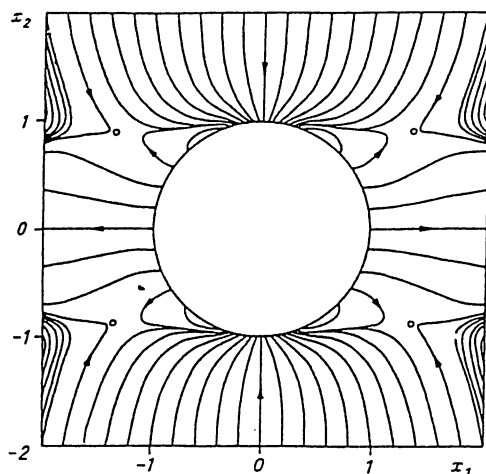


Рис. 4.5

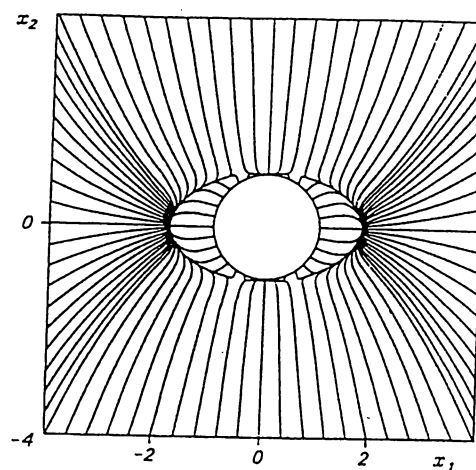


Рис. 4.6

контура и возвращаются на него и, наконец, линии тока, которые начинаются на контуре и уходят на внешнюю границу (или на бесконечность). Можно сказать, что деформируемая таким образом среда обеспечивает не только перенос энергии с одних участков внешней границы на другие, но и производит обмен энергией между внешней границей и контуром выработки, а также различными участками самого контура. При значениях $q > (3 - \sigma_{11} / \sigma_{22}) / (1 + \nu)$ поток энергии, выходящий с контура, полностью охватывает отверстие. При этом возникает огибающая семейства линий тока вблизи контура (рис. 4.6, $q = 1,8$, $\lambda = 2,16$). Она является линией раздела потоков энергии с внешней границы, и с контура отверстия, т. е. поток энергии с внутренней границы локализуется вокруг отверстия. При неизменном внутреннем давлении стремление σ_{11} к σ_{22} , или $\lambda \rightarrow 1$, вызывает переход огибающей семейства линий тока в окружность. Каждая ее точка становится особой точкой поля \vec{E} , а линии тока стремятся к радиальным. Подводя итог, можно сказать, что

1. Любое деформируемое тело можно рассматривать как определенный механизм для передачи энергии.
2. Энергия передается по линиям тока, так что любой элемент внутри тела получает энергию с вполне определенных участков границы.
3. В задаче о деформировании массива вокруг выработки линии тока энергии бесконечно закручиваются вокруг особых точек. При определенном сочетании параметров энергия локализуется у контура и переносится с одного его участка на другой.

В заключение отметим, что идея рассмотренных выше построений возникла в процессе поиска минимальных ограничений, которые обеспечивали бы единственность решения задач § 4.6. Для исследования единственности оказалось полезным ввести линии, которым можно придать смысл линий тока энергии. Позднее выяснилось, что по существу такие же аналитические выражения для потока энергии вводились ранее в трудах Умова [197] и Лява [198]. Однако развития в направлении, рассмотренном выше, они не получили. (По-видимому, в связи с отсутствием возможностей, предоставляемых в настоящее время компьютерами.)

§ 4.2. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

1. Обратимся к классической форме записи уравнений механики деформируемого твердого тела. Предположим, что деформация является плоской. Пусть, как обычно σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} — компоненты тензора напряжений, u_1 , u_2 — компоненты перемещений. Тогда должны выполняться следующие уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{12},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = a_{21}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{12}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = a_{31}\sigma_{11} + a_{32}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{12}.$$

Система (1.1) представляет собой уравнения равновесия при отсутствии массовых сил, а система (1.2) — определяющие уравнения, которые конкретизируют свойства среды. Коэффициенты a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — предполагается известным. Система записана в форме связи напряжений с деформациями. В частном случае, когда

$$a_{11} = \frac{1}{E}, a_{12} = -\frac{\nu}{E}; a_{21} = -\frac{\nu}{E}, a_{22} = \frac{1}{E},$$

$$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0; a_{33} = \frac{2(1+\nu)}{E},$$

где $\nu, E = \text{const}$, система (1.1), (1.2) описывает деформирование линейно-упругого тела. В более общем случае определяющие уравнения могут связывать приращения (или скорости) напряжений с приращениями деформаций. Здесь

$$\frac{\partial d\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial d\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial du_1}{\partial x_1} = a_{11}d\sigma_{11} + a_{12}d\sigma_{22} + a_{13}d\sigma_{12},$$

$$\frac{\partial du_2}{\partial x_2} = a_{21}d\sigma_{11} + a_{22}d\sigma_{22} + a_{23}d\sigma_{12}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial du_1}{\partial x_2} + \frac{\partial du_2}{\partial x_1} = a_{31}d\sigma_{11} + a_{32}d\sigma_{22} + a_{33}d\sigma_{12}.$$

Уравнения (1.3), (1.4) описывают гораздо более широкий класс материалов, чем (1.1) и (1.2). В общем случае коэффициенты a_{ij} в уравнениях (1.4) могут зависеть от достигнутых напряжений σ_{ij} и оператора *sign* от определенной комбинации приращений напряжений (критерий активного напряжения и разгрузки).

Ниже для определенности будем говорить об уравнениях (1.1), (1.2), хотя результаты применимы и к системе (1.3), (1.4). Структура уравнений (1.1), (1.2) является классической: уравнения равновесия плюс связи напряжений с деформациями. Однако во многих отношениях эта форма записи является неестественной и в определенном смысле — патологической. Действительно, с математической точки зрения, система представляет собой пять уравнений в частных производных первого порядка относительно пяти неизвестных функций. Однако сводится она к одному уравнению только четвертого порядка. (Например, для упругого тела — к бигармоническому уравнению относительно функций Эри). Далее запишем систему в матричной форме

$$A \frac{\partial \Sigma}{\partial x_1} + B \frac{\partial \Sigma}{\partial x_2} = 0, \quad (1.5)$$

где Σ — столбец с элементами

$$(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, u_1, u_2), \quad (1.6)$$

а A, B — матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что обе матрицы являются вырожденными, причем их ранг равен 4.

Зададим на некоторой кривой L данные Коши, то есть все переменные (1.6). Из вырожденности матриц сразу следует, что данные Коши будут всегда зависимыми между собой для любой линии $-L$. Это паталогия, и отсюда, конечно, нельзя заключить, как обычно, что линия L является характеристикой.

Есть также признаки паталогичности системы, связанные и с ее механическим смыслом. В этой системе на равных фигурируют все три напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. Поэтому сам вид системы не исключает постановок краевых задач, когда, например, на границе $x_1 = 0$ в качестве одной из переменных задается напряжение σ_{22} . С механической точки зрения такие постановки, как известно, смысла не имеют. Однако при записи системы в классическом виде (1.1), (1.2), формально они не запрещены.

Все перечисленные выше признаки, конечно, связаны между собой. Все они приводят к одному выводу: „В действительности“ в системе есть только четыре существенных уравнения первого порядка. В соответствии с этим должно быть только четыре неизвестные функции.

Рассмотрим преобразование системы, которое позволяет выделить из системы указанные уравнения и неизвестные. Положим

$$\sigma_{11} = \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \sigma_{22} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \sigma_{12} = -\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_2}. \quad (1.7)$$

Здесь p_1, p_2 — новые неизвестные функции. Нетрудно проверить непосредственными вычислениями, что пара (p_1, p_2) образует вектор. Обозначим его через \vec{p} : $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$. (Это свойство следует также из того факта, что p_1, p_2 совпадают с компонентами градиента функции Эри). Поэтому пару функций $\{p_1, p_2\}$ можно назвать векторным потенциалом поля напряжений. Таким образом, вместо „паталогической“ системы (1.1), (1.2) мы приходим к следующей естественной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= a_{11} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + a_{12} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - a_{13} \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= a_{21} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + a_{22} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - a_{23} \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= a_{31} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + a_{32} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - a_{33} \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) связывают компоненты двух векторных полей $\{u_1, u_2\}$ и $\{p_1, p_2\}$. Фигурально выражаясь, можно сказать, что оба векторных поля в уравнениях присутствуют „на равных“. То обстоятельство, что последнее уравнение связывает только компоненты вектора \vec{p} вывод не меняет. Тем более, что для несжимаемой среды появляется уравнение, которое связывает только компоненты вектора поля перемещений \vec{u} .

Интересно отметить, что и в краевых условиях векторы \vec{p} и \vec{u} также становятся полностью „равноправными“. Раньше для системы (1.1), (1.2) на границе можно было произвольно задавать обе компоненты смещения. Однако для компонент напряжений было существенное ограничение задание некоторых комбинаций напряжения было запрещено (например, σ_{22} на границе $x_1 = \text{const}$). Для системы (1.8) ситуация гораздо проще. Пусть \vec{n} — внешняя нормаль к границе, s — ее натуральный параметр, α — угол между осью Ox_1 и нормалью \vec{n} . Компоненты вектора напряжения на площадке с нормалью \vec{n} равны

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha, \quad (1.9)$$

$$\sigma_{n2} = \sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha.$$

Только эти комбинации трех переменных $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ разрешены на границе в качестве краевых условий. Подстановка (1.7) в (1.9) дает следующий результат

$$\sigma_{n1} = \frac{\partial p_2}{\partial s}, \quad \sigma_{n2} = \frac{\partial p_1}{\partial s}. \quad (1.10)$$

Последнее означает, что допустимым граничным условиям для напряжений соответствует граничное условие для вектора \vec{p} (с точностью до несущественной аддитивной постоянной). Следовательно, само преобразование системы к виду (1.8) автоматически исключает комбинации напряжений, отличные от (1.9).

Таким образом в допустимых краевых условиях для векторных полей \vec{u} и \vec{p} восстановилась полная симметрия: на границе могут задаваться как обе компоненты вектора \vec{u} , так и обе компоненты вектора \vec{p} . Возможны также их различные комбинации, соответствующие, например, внешнему сухому трению, либо более сложным зависимостям, соответствующим винклеровской податливости и т. д.

2. Во многих задачах удобно использовать криволинейные координаты. Введем криволинейную ортогональную систему координат λ_1, λ_2 :

$$x_1 = x_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad x_2 = x_2(\lambda_1, \lambda_2). \quad (2.1)$$

Все формулы упрощаются, если наряду с (2.1) ввести функцию

$$\kappa = \kappa(x_1, x_2), \quad (2.2)$$

которая имеет смысл угла между касательной к линии λ_1 и осью Ox_1 (рис. 4.7). Функция (2.2) определяет криволинейные координаты однозначно. (Две функции (2.1) также определяют координаты однозначно. Они содержат информацию о способе параметризации, которая значения не имеет).

Пусть

$$g_1 = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}, \quad g_2 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}.$$

где L_1, L_2 — длины дуг вдоль координатных линий. Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{\partial g_1}{\partial \lambda_2} = -g_2 \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \lambda_1} = g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_2}. \quad (2.3)$$

Известно, что если на плоскости задана произвольная гладкая кривая

$$x_1 = x_1(\lambda), \quad x_2 = x_2(\lambda),$$

то параметр λ всегда можно выбрать так, чтобы он имел смысл длины дуги (натуральная параметризация). Однако для сетки линий такая параметризация невозможна, исключая случай, когда координатные линии представляют собой семейство прямых. Это сразу видно из формул (2.3). Для натуральных параметров $g_1 = 1, g_2 = 1$. Из (2.3) следует, что

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (2.4)$$

То есть координаты сводятся к декартовым. Если выполняется только одно из равенств (2.4), то есть $g_1 = 1$ или $g_2 = 1$, то прямолинейным будет только одно из семейств линий: λ_1 или λ_2 .

Таким образом, натуральная параметризация сетки линий в общем случае невозможна. Это обстоятельство в ряде работ игнорируется (даже в такой известной монографии как [199], стр. 555 и ниже).

Наряду с заменой координат (2.1), как правило, удобно делать соответствующую замену напряжений, деформации и перемещений. Обозначим через w_1, w_2 проекции вектора смещений на касательные к линиям λ_1, λ_2 , через $\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$ деформации и напряжения элемента, выделенного сеткой λ_1, λ_2 , через $a_{11}^0, \dots, a_{33}^0$ соответствующие коэффициенты в определяющих уравнениях. В криволинейных координатах уравнения (1.1), (1.2) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^0}{g_2 \partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{g_2 \partial \lambda_2} - 2\sigma_{12}^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + (\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0) \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}^0}{g_1 \partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{g_2 \partial \lambda_2} - 2\sigma_{12}^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} + (\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0) \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial w_1}{g_1 \partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} = a_{11}^0 \sigma_{11}^0 + a_{12}^0 \sigma_{22}^0 + a_{13}^0 \sigma_{12}^0,$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial w_2}{g_2 \partial \lambda_2} + w_1 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} = a_{21}^0 \sigma_{11}^0 + a_{22}^0 \sigma_{22}^0 + a_{23}^0 \sigma_{12}^0, \quad (2.7)$$

$$2\varepsilon_{12}^0 = \frac{\partial w_1}{g_2 \partial \lambda_2} + \frac{\partial w_2}{g_1 \partial \lambda_1} + w_1 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} = a_{31}^0 \sigma_{11}^0 + a_{32}^0 \sigma_{22}^0 + a_{33}^0 \sigma_{12}^0.$$

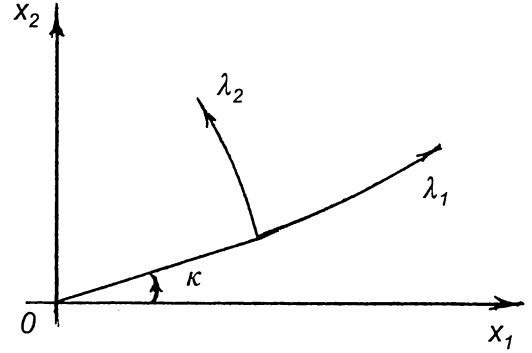


Рис. 4.7

В сущности это система тех же уравнений, что и (1.1), (1.2). Поэтому в указанных выше смыслах она также неестественна, как и исходная система. Переход к естественной системе четырех уравнений можно осуществить двумя путями: исходя либо из системы (1.8), либо из (2.6), (2.7). Выберем второй путь. Тот факт, что пара функций p_1, p_2 образует вектор имеет принципиальное значение. Обозначим проекции этого вектора на линии λ_1, λ_2 через p_1^0, p_2^0 . Тогда переход к координатам λ_1, λ_2 в равенствах (1.7) даст следующие соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^0 &= \frac{\partial p_2^0}{g_2 \partial \lambda_2} + p_1 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2}, \quad \sigma_{22}^0 = \frac{\partial p_1^0}{g_1 \partial \lambda_1} - p_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1}, \\ \sigma_{12}^0 &= -\frac{\partial p_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} + p_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} = -\frac{\partial p_2^0}{g_1 \partial \lambda_1} - p_1^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Равенства (2.8) обращают уравнения равновесия (2.6) в тождества. Их подстановка в (2.7) приводит к следующему окончательному результату:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{g_1 \partial \lambda_1} &= a_{11}^0 \frac{\partial p_2^0}{g_2 \partial \lambda_2} + a_{12}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_1 \partial \lambda_1} - a_{13}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} + (w_2 - a_{12}^0 p_2^0) \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + \\ &\quad + (a_{11}^0 p_1^0 + a_{13}^0 p_2^0) \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2}, \\ \frac{\partial w_2}{g_2 \partial \lambda_2} &= a_{21}^0 \frac{\partial p_2^0}{g_2 \partial \lambda_2} + a_{22}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_1 \partial \lambda_1} - a_{23}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} - a_{22}^0 p_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + \\ &\quad + (a_{21}^0 p_1^0 + a_{23}^0 p_2^0 - w_1) \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2}, \\ \frac{\partial w_1}{g_2 \partial \lambda_2} + \frac{\partial w_2}{g_1 \partial \lambda_2} &= a_{31}^0 \frac{\partial p_2^0}{g_2 \partial \lambda_2} + a_{32}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_1 \partial \lambda_1} - a_{33}^0 \frac{\partial p_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} - \\ &\quad - (a_{32}^0 p_2^0 + w_1) \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + (a_{31}^0 p_1^0 + a_{33}^0 p_2^0 + w_2) \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2}, \\ \frac{\partial p_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} - \frac{\partial p_2^0}{g_1 \partial \lambda_1} &= p_1^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + p_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Исследования типа исходной системы уравнений (1.1).(1.2) наталкивается на ряд трудностей, так как данные Коши, как уже отмечалось, оказываются всегда связанными между собой для любой линии L . Для системы же (2.9) вопрос о типе уравнений и соотношениях на характеристиках решается очень просто. Пусть потенциальная характеристика совпадает с линией λ_2 . Предположим, что слева от некоторой кривой $\lambda_1 = \text{const}$ решение известно. Это значит, что известны и все производные вдоль λ_2 . Требуется найти линии, через которые решения нельзя продолжить. Легко видеть, что определитель алгебраической системы относительно производных по λ_1 обращается в ноль, если

$$a_{22}^0 = 0.$$

Соотношение вдоль характеристики принимает весьма компактный вид:

$$\frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} - a_{21}^0 \frac{\partial p_2^0}{\partial \lambda_2} + a_{23}^0 \frac{\partial p_1^0}{\partial \lambda_2} = (a_{21}^0 p_1^0 + a_{23}^0 p_2^0 - w_1) \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_2}.$$

Можно ожидать, что и решения других вопросов для системы в форме (2.8) будет проще, чем для исходной системы.

Рассмотренные выше понятия (линий тока энергии и векторный потенциал) носят общий характер и могут быть использованы для анализа процессов деформирования любых сред. В работе [18] рассматриваются еще некоторые понятия общего характера, связанные с деформированием сплошных сред. Известно, что описания движения материальной точки и сплошной среды под действием внешних сил, отличаются друг от друга принципиально. В первом случае используются понятия перемещение — сила, во втором — деформация — напряжение. Деформация — кинематическая переменная, напряжение — силовая. Считается, что силы и напряжения являются причиной смещений точки и деформаций сплошной среды. Однако и в этих связях можно усмотреть одно существенное различие: сила всегда вызывает соответствующее ускорение точки, в то время, как нормальные напряжения вызывают не только нормальную деформацию, но и некоторую деформацию в поперечном направлении. Есть основания считать, что причиной поперечной деформации является не собственно напряжение, а именно деформация элемента среды в продольном направлении (последнее находит отражение и в самом определении коэффициента Пуассона для изотропного упругого тела). Поэтому деформации среды можно разбить на две части: активные деформации, которые непосредственно вызываются напряжениями, и пассивные — это те деформации, которые вызываются не напряжениями, а активными деформациями. В работе [18] приводятся соответствующие уравнения. Вопрос о поперечных деформациях, исходя примерно из таких же посылок, исследовался также в [200].

§ 4.3. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ С УПРОЧНЕНИЕМ И РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

1. Классическое описание кинематики деформирования сплошной среды базируется на предположении о достаточной гладкости поля перемещений. Предположение о гладкости позволяет ввести понятие тензора деформаций и использовать аппарат дифференциальных уравнений для описания деформирования среды. Однако существуют широкие классы движений среды, в которых поле перемещений не обладает достаточной гладкостью. Для твердых тел негладкость поля смещений может быть связана с появлением пластической деформации. Эксперименты с различными материалами показывают, что механизм пластической деформации связан с локализацией сдвигов вдоль определенных поверхностей [6, 201]. Последнее означает, что на указанных поверхностях вектор перемещений испытывает сильный разрыв. В общем случае это обстоятельство оказывается существенным и должно учитываться при описании пластического деформирования. Принимая некоторые ограничения, негладкое поле смещений можно описать с помощью совокупности гладких функций [20—22].

Рассмотрим в качестве иллюстрации случай одной функции одного переменного. Обозначим через $F(x)$ исходную функцию, имеющую сильные разрывы в точках x_i . Предпо-

ложим, что расстояния между точками разрыва малы, между точками разрыва функция $F(x)$ достаточно гладка, значения производных $F'(x)$ справа и слева от точек разрыва равны между собой, т. е. функция

$$p(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{при } x \neq x_i, \\ F'(x_i \pm 0) & \text{при } x = x_i \end{cases}$$

является достаточно гладкой.

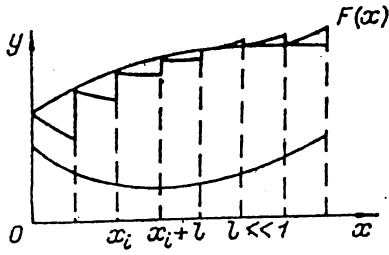


Рис. 4.8

Пусть $f(x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $f(x_i) = F(x_i + 0)$ и $P(x) = \int p(x)dx$. Тогда исходную функцию $F(x)$ можно характеризовать парой гладких функций $(f(x), P(x))$ и последовательностью точек разрыва x_i (рис. 4.8). Функция $f(x)$ имеет смысл осреднения исходной функции и характеризует с определенной точностью значения $F(x)$ во всей области определения. Функция $P'(x) - f'(x)$ характеризует различие в локальном поведении исходной и осредненной функций и при заданных точках

разрыва определяет величины скачков исходной функции. Так, скачок функции $F(x)$ в точке x_{i+1} с точностью до l_i^2 равен $\{f'(x_i) - P'(x_i)\} l_i$, где $l_i = x_{i+1} - x_i$ — расстояние между соседними точками разрыва (см. также § 5.2 и главу 12).

Аналогично рассмотрим случай векторной функции $\bar{V} = V_1 \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2$ векторного аргумента $\bar{r} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$ (\bar{e}_1, \bar{e}_2 — ортонормированный базис). Пусть $l \ll 1$ — характерный размер областей, в которых функция $\bar{V}(\bar{r})$ достаточно гладка. В дальнейшем такие области будем называть элементами. Предположим, что для исходной функции существует гладкое осреднение $\bar{v}(\bar{r})$ такое, что в центрах элементов $\bar{r}_i \bar{v}(\bar{r}_i) = \bar{V}(\bar{r}_i)$. На границе, разделяющей элементы с центрами в точках \bar{r}_i, \bar{r}_{i+1} разрыв $\bar{V}(\bar{r})$ с точностью до $|\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i|^2$ равен $A(\bar{r}_i)(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i)$, где A — тензор второго ранга с гладкими компонентами A_{km} , $k, m = 1, 2$. Исходному полю $\bar{V}(\bar{r})$ будем ставить в соответствие гладкие векторное поле $\bar{v}(\bar{r})$ и тензорное поле $A(\bar{r})$. Можно показать, что введенное описание накладывает на класс разрывных функций следующее ограничение: на линиях разрыва значения односторонних производных $\partial V_k / \partial x_m$ должны быть равны между собой. Очевидно, что

$$A_{km} = \partial v_k / \partial x_m - \partial V_k / \partial x_m, \quad (1.1)$$

где функции $\partial V_k / \partial x_m$ на линиях разрыва доопределены своими односторонними значениями.

Таким образом, некоторые классы негладких функций можно описать совокупностями гладких функций, одна из которых имеет смысл осреднения исходной функции, остальные — характеризуют разрывы исходной функции. Применительно к полю перемещений такое описание означает, что наряду с гладким (осредненным) полем перемещений вводятся новые кинематические переменные, восполняющие информацию о разрывах, которая теряется при осреднении.

Дополнительные кинематические переменные на основе различных гипотез вводились во многих работах (например, в [202]), непосредственно деформирование сплошных сред с негладким полем скоростей исследовалось в [203].

Рассмотрим пример описания разрывного поля смещений с помощью гладких тензорного и векторного полей. Предположим, что линии разрыва прямолинейны, ортогональны и параллельны координатным осям. Обозначим через x_1^i, x_2^i координаты пересечения линий разрыва с соответствующими осями. Пусть гладкое описание разрывного поля $\bar{V}(\bar{r})$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= sx_2, \quad v_2 = 0, \\ A_{11} &= 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = s - s_e, \quad A_{21} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где коэффициенты s, s_e зависят только от параметра нагружения. Рассмотрим механический смысл течения (1.2). Прежде всего из (1.2) следует, что нормальные к линиям разрыва компоненты вектора перемещений непрерывны

$$A_{11} = \partial v_1 / \partial x_1 - \partial V_1 / \partial x_1 = 0, \quad A_{22} = \partial v_2 / \partial x_2 - \partial V_2 / \partial x_2 = 0.$$

Разрывы касательных компонент вектора смещений на линиях $x_1 = x_1^i, x_2 = x_2^i$ равны

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^0 &= A_{21} \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2} = 0, \\ \gamma_{21}^0 &= A_{12} \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i-1}}{2} = (s - s_e) \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i-1}}{2}. \end{aligned}$$

Из (1.2) также следует, что

$$\partial V_1 / \partial x_2 = -A_{12} + \partial v_1 / \partial x_2 = s_e, \quad \partial V_2 / \partial x_1 = -A_{21} + \partial v_2 / \partial x_1 = 0.$$

Таким образом, описание (1.2) и данные о x_1^i, x_2^i позволяют восстановить разрывное поле перемещений и картину течения: (1.2) представляет собой плоско-параллельное течение в условиях, когда разрывы касательной компоненты смещения происходят только по семейству линий $x_2 = \text{const}$ (рис. 4.9 а).

Если же

$$\begin{aligned} v_1 &= sx_2, \quad v_2 = 0, \\ A_{11} &= 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = s - s_e, \end{aligned} \quad (1.3)$$

то

$$\gamma_{21}^0 = 0, \quad \gamma_{12}^0 = A_{21} \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2} = (s - s_e) \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2},$$

т. е. равенства (1.3) определяют плоско-параллельное течение в условиях, когда разрывы касательной компоненты смещения происходят только по семейству линий $x_1 = \text{const}$ (рис. 4.9 б).

В дальнейшем линии разрыва вектора смещений будем называть линиями скольжения, а величины разрывов касательной к линии скольжения компоненты вектора смещений — проскальзыванием или локализованной деформацией сдвига.

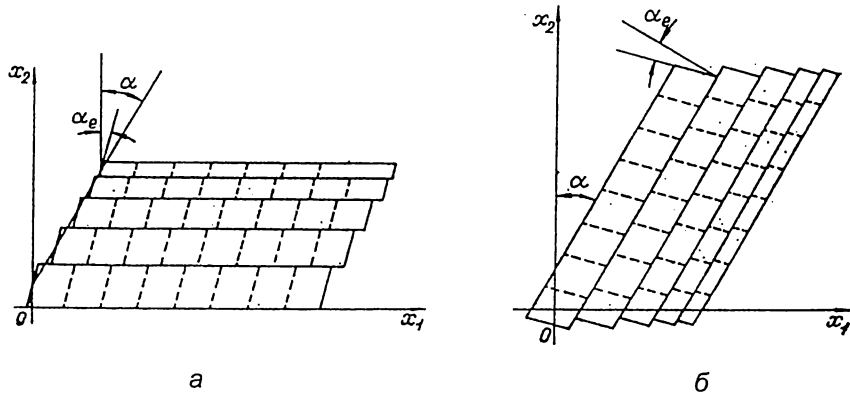


Рис. 4.9

2. Рассмотрим плоскую деформацию пластической среды. Как указывалось, пластические деформации связаны с локализацией сдвигов. Естественно ожидать, что этот факт должен отражаться в соответствующих уравнениях пластичности. Однако из классических уравнений только уравнения идеальной пластичности выделяют особые направления (направления характеристик полей скоростей и напряжений), которые можно интерпретировать как отражение сдвигового механизма деформирования по линиям скольжения. Уравнения упрочняющейся пластичности относятся к эллиптическому типу и особых направлений в развитии деформации не выделяют.

В работе [7] рассматривался способ построения моделей сред с произвольным реологическим поведением, механизм деформирования которых имеет сдвиговый характер по определенным направлениям. Ниже рассматривается реализация схемы [7] для жестко- и упруго-пластических сред с диаграммой, которая может иметь возрастающие и ниспадающие ветви [22].

Предположим, что при некоторых внешних нагрузках деформируемая область целиком перешла в пластическое состояние. Пусть условие пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений и линии скольжения ортогональны. Обозначим через λ_1, λ_2 параметры линий скольжения. Тогда

$$\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} = \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2},$$

$$a_1 = \frac{\partial l_1}{\partial \lambda_1}, \quad a_2 = \frac{\partial l_2}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_2} = -a_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_1} = -a_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2},$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты; $\theta - \pi/4$ — угол между касательной к линии λ_1 и осью Ox_1 ; l_1, l_2 — длины дуг вдоль соответствующих линий.

Пусть история деформирования материала известна. Тогда угол $\theta = \theta(x_1, x_2)$ равен углу между направлением наибольшего главного напряжения и осью Ox_1 в момент, когда максимальные касательные напряжения в точке (x_1, x_2) достигнут некоторой известной величины k . Для определения угла θ и, следовательно, ориентации сетки линий скольжения в общем случае необходимо решать упруго-пластическую задачу. В частности, если материал имеет развитую площадку текучести, то ориентация сетки может быть определена методами теории идеальной пластичности. В некоторых случаях ориентация может

быть определена из условий симметрии, различных вариационных соображений и т. д. В дальнейшем угол θ будем считать известным во всей области пластического деформирования.

Вторым параметром, характеризующим сетку линий скольжения, являются размеры элементов. Выберем две координатные линии λ_2 , $\lambda_1 = \text{const}$, которые разобьем на элементарные отрезки

$$\Delta\lambda_1 = f_1(\lambda_1)\varepsilon, \Delta\lambda_2 = f_2(\lambda_2)\varepsilon. \quad (2.1)$$

Равенства (2.1) определяют разбиение всей пластической области на элементы: длины сторон элемента в точке (λ_1, λ_2) равны

$$l_1 = f_1(\lambda_1)a_1(\lambda_1, \lambda_2)\varepsilon, \quad l_2 = f_2(\lambda_2)a_2(\lambda_1, \lambda_2)\varepsilon. \quad (2.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что разбиение всей пластической области на правильные элементы возможно только при условии $\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} \ln \frac{a_1}{a_2} = 0$. В общем случае такое разбиение невозможно.

Данные физики твердого тела показывают, что предел пластичности элементов, выделенных сеткой линий скольжения, выше предела пластичности макротела. Если макротело переходит в пластическое состояние при максимальных касательных напряжениях, равных k , то элементы переходят в пластическое состояние при максимальных касательных напряжениях $k(l)$, причем $k(l) >> k$. Ограничимся только такими путями нагружения, при которых касательные напряжения внутри элементов не превосходят $k(l)$. Чем больше отношение $k(l)/k$, тем шире класс таких нагружений.

Предел пластичности элемента зависит от его размера l . Поэтому можно предположить, что напряжения, действующие на элемент, определяют и его размер, т. е. густота сетки определяется полем напряжений. Вопросы дробления элементов, которое может произойти при упрочнении материала, а также развития линий скольжения из наиболее напряженных областей в области с меньшими напряжениями в работе не исследуются. В дальнейшем рассматривается деформирование материала после образования сетки линий скольжения, причем функции $f_1\varepsilon$, $f_2\varepsilon$, характеризующие густоту сетки, предполагаются известными.

Предположим, что при сдвигах изменения плотности материала (дилатансии) не происходит и четыре компоненты тензора A из (1.1) определяются только двумя инвариантами функциями Γ и Ω :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cos 2\theta \cdot \Gamma, \quad A_{22} = -\cos 2\theta \cdot \Gamma, \\ A_{21} &= -\Omega + \sin 2\theta \cdot \Gamma, \quad A_{12} = \Omega + \sin 2\theta \cdot \Gamma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия (2.3) означают, что нормальные к сторонам элементов компоненты неосредненного поля перемещений непрерывны. Механический смысл переменной Ω следует из равенства

$$\Omega = \frac{1}{2} (A_{12} - A_{21}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right),$$

т. е. переменная Ω характеризует различие роторов исходного и осредненного полей перемещений. Наряду с переменной Ω будем использовать переменную ω

$$\omega = \Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right),$$

имеющую смысл половины ротора исходного негладкого поля перемещений.

В примере (1.2):

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v} = -\frac{s}{2}, \quad \Omega = \frac{s - s_e}{2}, \quad \omega = -\frac{s_e}{2}.$$

В примере (1.3):

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v} = -\frac{s}{2}, \quad \Omega = -\frac{s - s_e}{2}, \quad \omega = -s + \frac{s_e}{2}.$$

Покажем, что ограничения на класс разрывных функций, накладываемые описанием (1.1), с механической точки зрения являются вполне приемлемыми. Действительно, на линии разрыва перемещений касательная и нормальная компоненты тензора напряжений непрерывны. Предположим непрерывность всех компонент. Производные $\partial V_k / \partial x_m$ определяют деформирование и поворот элемента под действием напряжений. Пусть деформации элемента связаны с напряжениями законом Гука. Тогда непрерывность упругих деформаций следует из непрерывности напряжений (если на некоторых линиях напряжения разрывны, то анализ можно провести обычными методами). Непрерывность поворотов можно показать из условий непрерывности нормальных к сторонам элементов компонент вектора перемещений. Отсюда следует непрерывность (равенство односторонних значений) каждой из производных $\partial V_k / \partial x_m = \partial v_k / \partial x_m - A_{km}$. Очевидно, что для компонент тензора упругих деформаций $(1/2)(\partial V_k / \partial x_m + \partial V_m / \partial x_k) = (1/2)(\partial v_k / \partial x_m + \partial v_m / \partial x_k - A_{km} - A_{mk})$ условие совместности в общем случае не выполняется и выполняться не должно. Действительно, если по гладкому полю напряжений построить поле упругих деформаций, то, несмотря на гладкость последнего, совместности не будет, так как напряжения в общем случае не удовлетворяют уравнениям Бельтрами—Митчела. С другой стороны, для компонент тензора полных деформаций $(1/2)(\partial v_k / \partial x_m + \partial v_m / \partial x_k)$ „полные“ смещения v_1, v_2 (то есть гладкое поле осредненных смещений) существуют, и поэтому для полных деформаций условие совместности выполняется.

Более сложным является вопрос о „совместности“, связанной с переменностью кривизны линий скольжения. Ниже будет показано, что принятый механизм деформирования совпадает с механизмом деформирования идеально пластического материала, который можно ввести как интерпретацию ассоциированного закона течения (соотношения Гейрингера). Поэтому так же, как и для идеально пластического материала, „совместность“, связанная с переменностью кривизны линий скольжения, будет выполняться только при достаточно малых деформациях. В дальнейшем ограничимся только такими деформациями.

3. Рассмотрим случай, когда упругими деформациями элементов можно пренебречь. Из условия жесткости и условия непрерывности нормальных к сторонам элементов компонент вектора перемещений следуют уравнения

$$\frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} = 0, \quad (3.1)$$

где w_1, w_2 — проекции вектора перемещений на нормали к линиям скольжения λ_1, λ_2 .

Вычислим величину скачка касательной к стороне элемента компоненты перемещения. Обозначим через V_n, v_n проекции исходного и осредненного векторов перемещения на направление (рис. 4.10). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial m} = & \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (2.3), (3.2) и условия жесткости элементе следует, что величина скачка равна

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^0 = & \left(\frac{\partial v_n}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial m} \right) f_{1a_1} \varepsilon = (\Gamma - \Omega) f_{1a_1} \varepsilon = \\ = & \left\{ \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega \right\} f_{1a_1} \varepsilon = \left(\frac{1}{a_1} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_1} + \frac{w_1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - \omega \right) f_{1a_1} \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогично для другой стороны элемента

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^0 = & \left(\frac{\partial v_m}{\partial n} - \frac{\partial V_m}{\partial n} \right) f_{2a_2} \varepsilon = (\Gamma + \Omega) f_{2a_2} \varepsilon = \\ = & \left\{ \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega \right\} f_{2a_2} \varepsilon = \left(\frac{1}{a_2} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} - \frac{w_2}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + \omega \right) f_{2a_2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величины скачков явно зависят от расстояний между линиями скольжения. Формулы (3.3), (3.4) определяют локализованную деформацию сдвига (проскальзывание). В отличие от сдвигов, определяемых тензором деформаций и характеризующих изменение произвольно ориентированных углов, величины $\gamma_{12}^0, \gamma_{21}^0$ имеют смысл только на соответствующих площадках скольжения и характеризуют реальный сдвиг (величину проскальзывания размерности длины) элементов по этим площадкам.

Касательные напряжения, которые могут развиваться на площадках скольжения, определяются величинами локализованной деформации на этих же площадках, т. е.

$$\sigma_{12}^0 = T(\gamma_{12}^0), \quad \sigma_{21}^0 = T(\gamma_{21}^0), \quad (3.5)$$

или

$$\gamma_{12}^0 = S(\sigma_{12}^0), \quad \gamma_{21}^0 = S(\sigma_{21}^0). \quad (3.6)$$

Здесь и в дальнейшем индексом „0“ отмечены переменные, отнесенные к соответствующим площадкам скольжения.

Формально в качестве меры сдвига на площадке скольжения можно взять любую величину, по которой можно восстановить значения $\gamma_{12}^0, \gamma_{21}^0$ (например, безразмерную величину $\gamma_{12}^0 / f_{1a_1} \varepsilon$ и т. д.). Критерием выбора меры являются соотношения типа (3.5): за меру сдвига необходимо принять величину, которую можно использовать в определяющих уравнениях. Во всех рассматриваемых уравнениях за меру сдвигов приняты сами разрывы

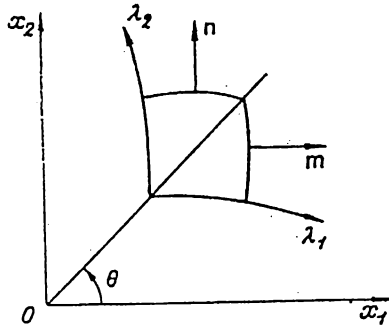


Рис. 4.10

перемещений $\gamma_{12}^0, \gamma_{21}^0$ имеющие размерность длины. Если же для некоторого материала будет установлена возможность использования безразмерной меры пластического сдвига, то все необходимые выкладки можно провести аналогично.

Равенства (3.3), (3.4) показывают, что локализованные деформации на площадках скольжения из различных семейств могут быть неодинаковыми даже при $l_1 = l_2$. Запишем условие функционирования семейств линий скольжения в виде

$$b_1 \gamma_{12}^0 + b_2 \gamma_{21}^0 = 0. \quad (3.7)$$

Если один из коэффициентов b_1, b_2 равен нулю, то функционирует только одно из семейств линий скольжения, если $b_1 + b_2 = 0$ оба семейства функционируют одинаково и т. д. Вопрос о выборе коэффициентов рассмотрим ниже.

Уравнения (3.1), (3.5), (3.7) совместно с уравнениями равновесия образуют замкнутую систему относительно:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, w_1, w_2, \omega, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} a_2 \sigma_{11}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \sigma_{21}^0 - a_2 \sigma_{12}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - a_1 \sigma_{22}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + a_1 a_2 X_1^0 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_2 \sigma_{12}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \sigma_{22}^0 + a_2 \sigma_{11}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} + a_1 \sigma_{21}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + a_1 a_2 X_2^0 = 0, \\ & \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} = 0, \\ & \sigma_{12}^0 = T \left[\left(\frac{1}{a_1} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_1} + \frac{w_1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - \omega \right) a_1 f_1 \varepsilon \right], \\ & \sigma_{21}^0 = T \left[\left(\frac{1}{a_2} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} - \frac{w_2}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + \omega \right) a_2 f_2 \varepsilon \right], \\ & f_1 b_1 \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_1} + f_2 b_2 \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} + f_1 b_1 w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - f_2 b_2 w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + (b_2 a_2 f_2 - b_1 a_1 f_1) \omega = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $X_1^0 X_2^0$ — проекции вектора объемной силы на касательные к линиям скольжения λ_1, λ_2 .

Соотношения (3.5) показывают, что возможны случаи, когда $\sigma_{12}^0 \neq \sigma_{21}^0$. Это означает, что для сохранения равновесия на сторонах элементов должны появиться распределенные моменты (объемные моменты предполагаются отсутствующими). Из условий равновесия следует уравнение относительно моментов

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} a_2 \mu_{11}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \mu_{22}^0 + a_1 a_2 (\sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0) = 0. \quad (3.9)$$

Система (3.8), (3.9) замкнута относительно всех переменных, кроме μ_{11}^0, μ_{22}^0 . Неопределенность моментов связана с предположением о жесткости элементов и в каждой конкретной задаче либо устраняется из дополнительных соображений, либо сохраняется. В декартовых координатах система (3.8), (3.9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \\
 & \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\
 & -\sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\
 & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} = T \left(\left[\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega \right] a_1 f_1 \varepsilon \right), \\
 & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta + \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} = T \left(\left[\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega \right] a_2 f_2 \varepsilon \right), \\
 & \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda\Omega = 0, \\
 & \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где введены обычные обозначения и $\Lambda = (b_2 a_2 f_2 - b_1 f_1 a_1) / (b_2 a_2 f_2 + b_1 f_1 a_1)$. Система (3.10) — гиперболического типа. Слабые разрывы перемещений v_1, v_2 возможны только на линиях скольжения λ_1, λ_2 . Причем, если слабый разрыв реализуется, то в общем случае он влечет за собой сильный разрыв напряжений. Из уравнений равновесия и (3.5) следует, что сильные разрывы напряжений в условиях, когда поле смещений v_1, v_2 гладко, также возможны только на линиях скольжения λ_1, λ_2 .

Третье и четвертое уравнения системы (3.10) показывают, что для деформаций существует пластический потенциал

$$\begin{aligned}
 \Phi(\sigma_{km}, \theta) &= \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{2} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta, \\
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}},
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{21}}, \quad k, m = 1, 2.$$

Так как для рассматриваемых путей нагружения угол θ зависит только от координат, то (3.11) можно легко преобразовать к соотношениям относительно скоростей деформаций.

Последние уравнения системы (3.10) можно рассматривать как соотношения, определяющие поверхность нагружения:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\sigma_{km}, \theta)| - |T[(\lambda/2 - \Omega)a_1 f_1 \varepsilon]| &= \Phi_1(\sigma_{km}, \varepsilon_{km}, x_1, x_2, \theta) = 0, \\ |\varphi_2(\sigma_{km}, \theta)| - |T[(\lambda/2 + \Omega)a_2 f_2 \varepsilon]| &= \Phi_2(\sigma_{km}, \varepsilon_{km}, x_1, x_2, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sigma_{12}^0(\sigma_{km}, \theta), \quad \varphi_2 = \sigma_{21}^0(\sigma_{km}, \theta), \\ \lambda &= \cos 2\theta(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 2 \sin 2\theta \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}^0}{f_1 a_1 \varepsilon} + \frac{\gamma_{21}^0}{f_2 a_2 \varepsilon}, \quad \Omega = -\frac{\lambda}{2\Lambda}. \end{aligned}$$

Поверхность нагружения в общем случае сингулярна и состоит из двух поверхностей Φ_1, Φ_2 : область $\Phi_1 < 0, \Phi_2 < 0$ соответствует жесткому состоянию материала, область $\Phi_1 \Phi_2 = 0$ — пластическому состоянию. Форма записи (3.12) выбрана с учетом того, что функция (функционал) T нечетна.

Понятия нагружения и разгрузки определены в пространстве деформаций: нагружение происходит, если хотя бы одна из величин $\gamma_{12}^0, \gamma_{21}^0$ меняется. Если обе величины фиксированы, то происходит разгрузка или нейтральное нагружение: разгрузка, если $\frac{\partial |\varphi_i|}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km} < 0$, нейтральное нагружение, если $\frac{\partial |\varphi_i|}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km} = 0$, где $i = 1$ или 2 .

Таким образом, уравнения (3.10) показывают: в общем случае в результате пластического деформирования материал становится анизотропным и неоднородным; вид анизотропии связан с ориентацией сетки линий скольжения, неоднородность — с геометрией и густотой этой сетки; для тензора пластической деформации существует потенциал; поверхность нагружения сингулярна; закон деформирования неассоциирован. В частных случаях возможны ситуации, когда поверхность нагружения гладка, закон деформирования ассоциирован, материал однороден. Если $T \equiv 0$, то уравнения (3.10) переходят в уравнения идеальной пластичности. Модель идеальной пластичности, рассматриваемая как предельный случай (3.10), обладает рядом исключительных свойств: несмотря на возможную неоднородность материала, связанную с геометрией и густотой сетки линий скольжения, уравнения деформирования от этой неоднородности не зависят. Они также не зависят от возможного различия в функционировании линий скольжения из различных семейств; тензор напряжений симметричен даже при неравных локализованных сдвигах (проскальзываниях) по площадкам из различных семейств.

4. Перейдем к модели упруго-пластического тела. Предположим, что деформирование элементов целиком обратимо, а вся локализованная деформация (проскальзывание) необратима. Рассмотрим сначала вопрос об упругих деформациях элементов при напряжениях σ_{km}^0 . Нормальные напряжения σ_{kk}^0 вызывают растяжение элемента в направлении своего

действия и сжатие в поперечном направлении. Из условия непрерывности нормальных к сторонам элемента компонент вектора перемещения следует, что деформация сжатия для исходного негладкого и осредненного гладкого полей перемещений совпадают. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - \frac{w_2}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0, \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + \frac{w_1}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Как и для жестко-пластического тела, можно показать, что касательные напряжения $\sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0$ в общем случае неравны между собой. Действие напряжений $\sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0$ представим как наложение двух систем напряжений τ_+^0, τ_-^0 : $\sigma_{12}^0 = \tau_+^0 + \tau_-^0, \sigma_{21}^0 = \tau_+^0 - \tau_-^0$. Из соображений симметрии следует, что упругий сдвиг элемента происходит только под действием составляющей $\tau_+^0 = (\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0)/2$. Величина упругого сдвига равна

$$\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{4\mu}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим уравнения для локализованной деформации. Локализованный сдвиг на площадке скольжения по определению равен

$$\begin{aligned}\gamma_{12}^0 &= \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{\partial V_n}{\partial t} \right) f_1 a_1 \varepsilon = \left[\left\{ \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) - \Omega \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \right] \right\} f_1 a_1 \varepsilon.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Соотношения (3.6), отражающие связь локализованного сдвига и соответствующего касательного напряжения, остаются без изменений. Подставляя (4.2) в (4.3) и затем в (3.6), получим уравнение

$$\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega = \frac{1}{f_1 a_1 \varepsilon} S(\sigma_{12}^0) + \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{4\mu}. \quad (4.4)$$

Аналогично для другой площадки скольжения

$$\frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega = \frac{1}{f_2 a_2 \varepsilon} S(\sigma_{21}^0) + \frac{\sigma_{21}^0 + \sigma_{12}^0}{4\mu}. \quad (4.5)$$

В упруго-пластическом теле элементы деформируются как под действием напряжений σ_{km}^0 , так и под действием моментов. Последнее обстоятельство позволяет замкнуть систему относительно всех переменных, включая моменты.

Из принятого выше механизма деформирования следует, что усилия между элементами передаются только через напряжения, распределенные по их сторонам. Поэтому мо-

менты μ_{11}^0, μ_{22}^0 могут возникнуть только вследствие неравномерности такого распределения. В данном случае распределение напряжений на стороне элемента достаточно считать линейным. Линейную эпюру представим как наложение двух эпюр: постоянной, которая дает то же усилие на стороне элемента, что и исходная, но не дает момента, и линейную, которая не дает в сумме никакого усилия, но дает момент. Обозначим наибольшее напряжение на стороне элемента λ_2 , соответствующее второй эпюре, через \sum_{11}^0 .

Тогда

$$\mu_{11}^0 = \sum_{11}^0 a_2 f_2 \varepsilon / 6.$$

Аналогично для стороны λ_1

$$\mu_{22}^0 = \sum_{22}^0 a_1 f_1 \varepsilon / 6.$$

Неравномерные напряжения, действующие на стороне элемента λ_2 , вызывают не только растяжение элемента, которое учитывается первым уравнением (4.1), но и поворот этой стороны на угол Ω_{11}^0 . По обычным формулам можно связать изменение Ω_{11}^0 вдоль λ_1 (Ω_{11}^0 гладко вдоль λ_1) с μ_{11}^0

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial \Omega_{11}^0}{\partial \lambda_1} = \frac{12 \mu_{11}^0}{E(a_2 f_2 \varepsilon)^2}, \quad (4.6)$$

где E — модуль Юнга.

Аналогично вдоль λ_2

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial \Omega_{22}^0}{\partial \lambda_2} = \frac{12 \mu_{22}^0}{E(a_1 f_1 \varepsilon)^2}. \quad (4.7)$$

Если следовать идеям моментных теорий упругости, то необходимо положить $\Omega_{11}^0 = \Omega_{22}^0$ (в данном случае неважно, является ли переменная $\Omega_{11}^0 = \Omega_{22}^0$ независимой или определяется, как в [204], ротором поля перемещений) и получить замыкающее уравнение на моменты перекрестным дифференцированием (4.6), (4.7). Однако принятый выше механизм деформирования приводит к необходимости дополнительно ввести в точке (λ_1, λ_2) три кинематические переменные: Ω и $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$. Причем априорно нет никаких оснований считать, что переменные $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$ связаны между собой и с переменной Ω . Поэтому два уравнения (4.6), (4.7) вводят в систему уравнений две новые неизвестные $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$ и не позволяют непосредственно замкнуть систему относительно моментов.

Замыкающее уравнение можно получить следующим образом. Обозначим через W часть упругой энергии, которая запасается в области D упруго-пластического тела вследствие деформирования элементов под действием моментов μ_{11}^0, μ_{22}^0 . Можно показать, что

$$W = \frac{6}{E} \int_D \left[\frac{(\mu_{11}^0)^2}{(a_2 f_2 \varepsilon)^2} + \frac{(\mu_{22}^0)^2}{(a_1 f_1 \varepsilon)^2} \right] a_1 a_2 d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (4.8)$$

Предположим, что из всех возможных распределений моментов, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям, реализуется то, которое доставляет минимум потенциальной энергии W . Минимум функционала (4.8) при условии (3.9) реализуется, если моменты удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{a_2 \mu_{22}^0}{(a_1 f_1 \varepsilon)^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{a_1 \mu_{11}^0}{(a_2 f_2 \varepsilon)^2}. \quad (4.9)$$

Во всех рассмотренных уравнениях функции l_1, l_2 из равенств (2.2) можно интерпретировать как неоднородные характеристики материала размерности длины. Если сетка линий скольжения правильна и состоит из прямых ($l_1 \equiv l_2 = l$), то неоднородные характеристики сводятся к одной постоянной, которая фигурирует в уравнениях, как постоянная материала размерности длины. С другой стороны, в моментных теориях упругости также появляется постоянная материала размерности длины. Постоянная моментной теории упругости (с точностью до несущественного множителя, который вводится для удобства) совпадает с l — параметром густоты сетки линий скольжения. В этом случае уравнение (4.9) переходит в соответствующее уравнение моментной теории упругости $\partial \mu_{11} / \partial x_2 = \partial \mu_{22} / \partial x_1$ [204].

Уравнения равновесия совместно с уравнениями (4.1), (4.4)—(4.7), (4.9) образуют замкнутую систему относительно следующих переменных

$$\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, w_1, w_2, \Omega, \Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0, \mu_{11}^0, \mu_{22}^0.$$

В декартовых координатах система преобразуется к виду.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \\ & \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = \\ & = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \cos 2\theta \right], \\ & - \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = \\ & = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \cos 2\theta \right], \\ & \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\mu} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4\mu} \sin 2\theta + \\ & + \frac{1}{f_1 a_1 \varepsilon} S \left[\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\mu} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4\mu} \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{f_2 a_2 \varepsilon} S \left[\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta + \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} \right], \\ \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda\Omega &= 0. \end{aligned}$$

Для сокращения записей уравнения относительно моментов в декартовых координатах не выписаны.

Пусть $\sigma_{12}^0 < k$, $\sigma_{21}^0 < k$. Следовательно, локализованной деформации нет и $S(\sigma_{12}^0) \equiv S(\sigma_{21}^0) \equiv 0$, $\Omega = 0$. В этом случае угол θ из системы (4.10) исключается и система сводится к уравнениям теории упругости. Отсюда упругую среду можно определить как среду, в которой условие непрерывности нормальной компоненты перемещения (4.1) выполняется для всевозможных направлений λ_1 , λ_2 .

Запишем систему (4.10) в приращениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{21}}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \sin 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) &= \\ = \frac{1}{2\mu} [(\Delta \sigma_{11} - \Delta \sigma_{22}) \sin 2\theta - (\Delta \sigma_{12} + \Delta \sigma_{21}) \cos 2\theta], \\ \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} &= \frac{1-2\nu}{2\mu} (\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22}), \\ \cos 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) &= \rho_2 (\Delta \sigma_{21} - \Delta \sigma_{12}) + \\ + \rho_1 [(\Delta \sigma_{11} - \Delta \sigma_{22}) \cos 2\theta + (\Delta \sigma_{12} + \Delta \sigma_{21}) \sin 2\theta], \\ 2\Delta \Omega &= \rho_2 [(\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22}) \cos 2\theta + (\Delta \sigma_{12} + \Delta \sigma_{21}) \sin 2\theta] + \left(\rho_1 - \frac{1}{2\mu} \right) (\Delta \sigma_{21} - \Delta \sigma_{12}), \\ \cos 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda \Delta \Omega &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$2\rho_1 = \frac{S'(\sigma_{12}^0)}{f_1 a_1 \varepsilon} + \frac{S'(\sigma_{21}^0)}{f_2 a_2 \varepsilon} + \frac{1}{\mu}, \quad 2\rho_2 = \frac{S'(\sigma_{21}^0)}{f_2 a_2 \varepsilon} - \frac{S'(\sigma_{12}^0)}{f_1 a_1 \varepsilon}.$$

Остановимся на вопросе о коэффициентах b_1 , b_2 , фигурирующих в уравнениях (3.7), т. е. на вопросе о функционировании линий скольжения из различных семейств. Пусть

(λ_1, λ_2) — координаты некоторого исходного элемента, а $(\lambda_1 + \Delta \lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2 + \Delta \lambda_2)$, $(\lambda_1 + \Delta \lambda_1, \lambda_2 + \Delta \lambda_2)$ — координаты элементов, граничащих с исходным. Условия совместности деформирования элементов (λ_1, λ_2) , $(\lambda_1 + \Delta \lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2 + \Delta \lambda_2)$, приводят к уравнениям (3.1) или (4.1). При этом должно выполняться условие совместности деформирования элементов (λ_1, λ_2) и $(\lambda_1 + \Delta \lambda_1, \lambda_2 + \Delta \lambda_2)$, приводящее к тому, что в любой фиксированный момент времени t $b_1(t)b_2(t) = 0$, т. е. в рассматриваемой среде возможно только попеременное функционирование линий скольжения из различных семейств (турбулентное пластическое течение [205]). (Прямые экспериментальные данные описаны в главе 7). Поэтому приращения всех искоемых переменных складываются из двух частей: одна часть (с индексом $-$) удовлетворяет уравнениям (4.11), в которых положено $b_1 = 0$, другая (с индексом $+$) тем же уравнениям, в которых $b_2 = 0$. Так как обе системы линейны, то при сложении соответствующих уравнений получим ту же систему (4.11), в которой $\Lambda = (\Delta^- \Omega - \Delta^+ \Omega) / (\Delta^- \Omega + \Delta^+ \Omega)$. При этом необходимо учесть, что $S'(\sigma_{12}^0)$, $S'(\sigma_{21}^0)$ и, следовательно, ρ_1 , ρ_2 зависят от знака приращений $\Delta \sigma_{12}^0$, $\Delta \sigma_{21}^0$.

Если величина Λ известна (например, из условий симметрии $\Lambda = 0$ или граничных условий, как в задаче о штампе [22], $\Lambda = 1$ и т. д.), то можно сразу решать систему относительно приращений без индексов, если же нет, то необходимо решать системы относительно приращений с индексами $+$ и $-$. При этом возникает вопрос, в течение каких промежутков времени граничные условия удовлетворяются за счет скольжения по одному семейству и за счет скольжения по другому семейству. В каждой задаче этот вопрос решается из дополнительных соображений с учетом конкретных условий нагружения материала.

Рассмотрим теперь вопрос о типе системы (4.11). Из последних пяти уравнений выразим $\Delta \sigma_{km}$ через Δv_1 , Δv_2 . Затем, подставляя выражения для $\Delta \sigma_{km}$ в уравнения равновесия, получим два квазилинейных уравнения второго порядка относительно Δv_1 , Δv_2 . Обозначим через κ тангенс угла наклона характеристики к оси Ox_1 в локальных координатах $\theta = \pi / 4$. Тогда

$$\kappa = \pm \sqrt{\frac{-(1 - \nu \xi_1) \pm \sqrt{(1 - \nu \xi_1)^2 - (1 - \nu)(\xi_1^2 - \xi_2^2)}}{(1 - \nu)(\xi_1 + \xi_2)}}, \quad (4.12)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_1 + \rho_2 / \Lambda - 1 / 4\mu}{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1 / 4\mu}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_1 / \Lambda + \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1 / 4\mu}.$$

Тип системы (4.11) определяется знаками подкоренных выражений в формуле (4.12).

Формула (4.12) показывает, что тип системы (4.11) зависит от производных функции S . Рассмотрим механический, смысл этой зависимости в случае, когда $\sigma_{12}^0 \equiv \sigma_{21}^0$. При этом условии

$$\xi_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\rho_1}, \quad \xi_2 = 0, \quad \Lambda = -\frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (4.13)$$

Соотношение (4.12) с учетом (4.13) показывает, что система (4.11) принадлежит к эллиптическому типу в случае, когда материал упрочняется ($\xi_1 > 0$) и к гиперболическому

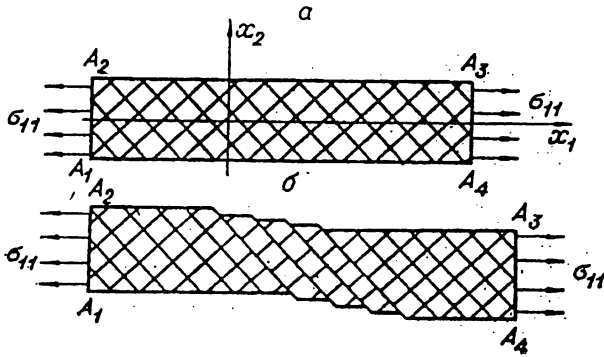


Рис. 4.11

положим, что на границе и внутри области деформирования $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$, $\theta = 0$. Из уравнений (4.11) можно найти, связь приращения длины полосы с приращением растягивающих напряжений

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta \sigma_{11}} = \left[\frac{1}{\xi_1} + (1-2\nu) \right] \frac{x_1}{4\mu}. \quad (4.14)$$

Если материал упрочняется, то знаки Δv_1 , $\Delta \sigma_{11}$ одинаковы, т.е. увеличение или уменьшение растягивающей силы приводит к увеличению или уменьшению длины полосы. Пусть теперь на площадке скольжения увеличение локализованного сдвига приводит к уменьшению касательных напряжений — материал разупрочняется. С одной стороны, увеличение локализованного сдвига приводит к увеличению длины полосы. С другой стороны, уменьшение касательных напряжений приводит к упругой разгрузке элементов, что вызывает уменьшение длины полосы.

При $\xi_1 > -1/(1-2\nu)$ первый фактор превалирует над вторым, и при уменьшающейся внешней нагрузке происходит общее удлинение полосы — система (4.11) принадлежит к гиперболическому типу. Если же $\xi_1 < -1/(1-2\nu)$, то превалирующим фактором будет второй: при уменьшающейся растягивающей силе и увеличивающихся локализованных сдвигах общая длина полосы будет уменьшаться за счет упругого сжатия элементов, т.е. внешне материал ведет себя как и упрочняющийся, и тип системы меняется на эллиптический. Если $\xi_1 = -1/(1-2\nu)$, то растягивающее усилие уменьшается при постоянной длине полосы. В этих условиях система энергетически изолирована и внутри нее происходит необратимый переход запасенной упругой энергии в работу, совершаемую на площадке скольжения.

Остановимся еще на одном обстоятельстве. Пусть растягивающее напряжение σ_{11} монотонно увеличивается от нуля и затем, если есть падающая ветвь, уменьшается. Тогда на возрастающей ветви функция $S(\sigma_{11}/2)$ однозначна и, следовательно, $\rho_2 = 0$. Из уравнений (4.11) следует, что в этом случае $\Delta\Omega = 0$, т.е. локализованные сдвиги на обеих семействах линий скольжения одинаковы и линии функционируют симметрично (см. рис. 4.11 а). Если материал начинает разупрочняться, то функция $S(\sigma_{11}/2)$ становится неоднозначной и появляется возможность второго режима деформирования, когда $\rho_2 \neq 0$ и $\Delta\Omega \neq 0$ (см. рис. 4.11 б). Это означает, что уменьшение касательных напряжений, на одной из площадок: происходит за счет увеличения сдвига, а на другой — за счет разгруз-

типу в случае идеального течения материала ($\xi_1 = 0$). Если материал разупрочняется и его разупрочнение не очень велико ($-1/(1-2\nu) \leq \xi_1 < 0$), то система также принадлежит к гиперболическому типу. Если же разупрочнение материала становится достаточно большим ($-\infty < \xi_1 < -1/(1-2\nu)$), то тип системы меняется на эллиптический.

Этот парадоксальный на первый взгляд результат можно пояснить на следующем примере. Пусть полоса $A_1A_2A_3A_4$ растягивается в направлении x_1 (рис. 4.11). Пред-

ки. Если учесть попеременность в функционировании линий скольжения, то можно сделать вывод, что на падающей ветви реализуется второй режим деформирования. Не останавливаясь на вопросах общей постановки краевых задач, существования, единственности и устойчивости решений системы (4.10), отметим, что на падающей ветви можно ожидать неединственности решения. Причем некоторые из решений будут неустойчивыми. Анализ устойчивости дает естественный критерий выбора решения.

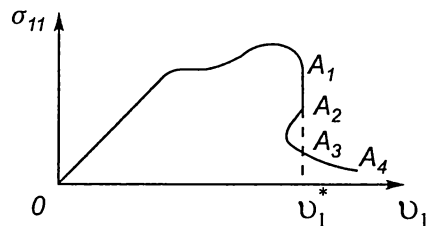


Рис. 4.12

Можно показать, что решение (4.14) при свободных поверхностях A_1A_4 , A_2A_3 неустойчиво и неединственно. Так как роль этого решения иллюстративная, то предположим, что на границах A_1A_4 , A_2A_3 заданы кинематические ограничения, подавляющие возмущения, приводящие к неустойчивости. Решение (4.14) указывает еще на одну особенность, присущую деформированию упруго-пластических разупрочняющихся материалов. Из (4.14) следует, что диаграмма „растягивающая сила — удлинение полосы“ может иметь вид, изображенный на рис. 4.12. Предположим, что нагружение производится с контролируемым, монотонно увеличивающимся удлинением. Тогда при удлинении, равном u_1^* , в материале произойдет неконтролируемое освобождение части потенциальной упругой энергии, соответствующее переходу из точки A_1 в A_2 и затем в A_3 . Причем при переходе из A_1 в A_2 освобождаемая потенциальная энергия полностью диссипируется на линиях скольжения, а при переходе из A_2 в A_3 диссипируется только часть энергии, другая часть переходит в кинетическую энергию элементов. Если такая „разрядка“ не разрушит образец, то дальнейшее его деформирование будет проходить по ветви A_3A_4 .

В рамках рассмотренной модели решен ряд краевых задач. В [22] — задачи о выдавливании штампа и напряженно-деформированном состоянии вокруг выработки (см. также главу 6 и [40]), в [64, 65] — задача о сдвиге, когда неустойчивость процесса подавляется кинематическими ограничениями на границе. Это приводит к формированию в материале определенной регулярной структуры (см. гл. 7, 8). Кроме того, рассмотренная модель оказалась адекватной для описания искусственно созданных структур. В [46, 47] дано решение задач о деформировании рулонированных оболочек (часть результатов изложена также в гл. 6).

§ 4.4. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ С НАРУШЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Прейдем теперь к моделям пластических сред, обладающих внутренним трением. Как известно, в случае идеально пластического течения плоские задачи допускают статически определяемые постановки. Аналогичные постановки имеют место и для среды с внутренним трением [206]. Однако для подобных сред является характерным наличие ниспадающей ветви на диаграмме „напряжение — деформация“. Причем в типичном случае диаграмма выходит на горизонтальную прямую. Здесь также возможны статически определяемые постановки задач, но уже для среды, обладающей деформационной анизотропией. Следуя традиции, будем говорить о сыпучей среде, хотя все построения в полной мере относятся и к горным породам, а также к другим материалам с внутренним трением и сцеплением.

Вначале рассмотрим плоскую деформацию первоначально изотропной сыпучей среды. В допредельном состоянии между приращениями напряжений и деформаций существует однозначное соответствие: деформирование происходит устойчиво, прочность сохраняется во всех направлениях. С изменением нагрузок в некоторых точках среды возможна потеря устойчивости. Согласно закону Кулона, в предельном состоянии

$$\tau = -c_1\sigma + c_2, \quad (1)$$

где

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Пусть $\tau_\alpha, \sigma_\alpha$ — касательное и нормальное напряжения на площадке α (α — угол между площадкой и наибольшим главным напряжением). Из (1) следует, что

$$\tau_\alpha = -c_3\sigma_\alpha + c_4, \quad (2)$$

где

$$c_3 = \frac{c_1 \sin 2\alpha}{1 + c_1 \cos 2\alpha}, \quad c_4 = \frac{c_2 \sin 2\alpha}{1 + c_1 \cos 2\alpha}.$$

Пусть теперь σ_α — вес твердого тела на горизонтальной шероховатой поверхности, а τ_α — сдвигающее усилие. Если τ_α определяется равенством (2) при некоторых критических значениях c_3, c_4 , то тело получает возможность неограниченных смещений относительно поверхности. Аналогичным свойством обладают и контакты между частицами сыпучей среды. Предположим, что для частиц сыпучей среды коэффициенты $c_3(\alpha), c_4(\alpha)$ достигают критических значений при $|\alpha| = \alpha_*$. Отсюда следует, что на площадках $\pm\alpha_*$ контакты между частицами среды могут быть нарушены. С другой стороны, при $|\alpha| \neq \alpha_*$ значения $c_3(\alpha), c_4(\alpha)$ неравны критическим и поэтому контакты на этих площадках находятся в допредельном состоянии. Предположим, что α_* есть либо постоянная материала, либо известная однозначная функция предельных напряжений. Предположим далее, что некоторая область S целиком находится в предельном состоянии (1). Уравнение (1) замыкает систему уравнений равновесия (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \left(\cos 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \sin 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right) + 2\tau \left(-\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \left(\sin 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_1} - \cos 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right) + 2\tau \left(\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где X_1, X_2 — компоненты массовых сил, ψ — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси Ox_1 . Под действием напряжений (1), (3) в среде происходят некоторые смещения. Для площадок $\pm\alpha_*$ эти смещения означают реализацию возможного скольжения при критических коэффициентах $c_3(\alpha_*) = \tan \varphi_*$, $c_4(\alpha_*) = k_*$. Последнее, как правило, приводит к изменению свойств контакта между частицами, т. е. к нарушению первоначальной структуры, которое выражается в уменьшении критических значений φ_*, k_* [207]. Обозначим новые критические коэффициенты через φ^0, k^0 . Значения φ^0, k^0 могут зависеть от величины взаимных смещений между частицами, от их относительных ско-

ростей (вязкость) и других факторов. Предположим однако, что на границе и внутри области распределение скоростей тривиально. Таким образом исключается проявление вязких свойств. Влияние градиента смещений характерно только при малых сдвигах $\gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2} < \gamma_e$. Пусть смещения на границе таковы, что во всех точках внутри области $\gamma \geq \gamma_e$. Следовательно, в результате деформирования среда меняет свойства одинаково для всех своих точек и остается однородной.

В связи с изменением φ_* , k_* меняется также и уровень напряжений, необходимых для поддержания предельного равновесия среды. Задача отыскания новых предельных напряжений входит как частный случай в следующую задачу: при достижении предельного состояния (1), (3) и последующей конечной разгрузке требуется найти напряжения, при которых предельное состояние наступит вновь в случае произвольного повторного нагружения.

Методы решения системы (1), (3) разработаны в монографии [206]. Пусть σ , τ , ψ — известное распределение напряжений в первоначальном предельном состоянии (1), (3). Переобозначим $\psi(x_1x_2)$ через $\theta(x_1x_2)$. Наличное напряженное состояние при повторном нагружении будем по-прежнему обозначать через σ , τ , ψ . В результате деформирования в предельном состоянии (1), (3) среда становится анизотропной: вдоль линий $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_*)$ прочность нарушена и характеризуется коэффициентами φ^0 , k^0 вдоль линий $x'_2 \neq \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_*)$ сохраняется прежнее значение прочности φ_* , k_* . Поскольку $\varphi^0 \leq \varphi_*$ и $k^0 \leq k_*$, то при повторном нагружении наиболее вероятен случай, когда предельное состояние будет достигнуто на ослабленных площадках $\pm\alpha$. Напряжения на площадке $\alpha = \alpha_*$. Равны $\tau_\alpha = -\tau \sin 2(\theta - \psi + \alpha_*)$, $\sigma_\alpha = \sigma - \tau \cos 2(\theta - \psi + \alpha_*)$, предельное состояние наступит при $|\tau_\alpha| = -\operatorname{tg} \varphi^0 \sigma_\alpha + k^0$, или при

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau [\cos 2(\theta - \psi + \alpha_*) + \delta_1 \operatorname{ctg} \varphi^0 \sin 2(\theta - \psi + \alpha_*)] + k^0 \operatorname{ctg} \varphi^0, \\ \delta_1 &= -\operatorname{sign} \sin 2(\theta - \psi + \alpha_*). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично предельное состояние на площадке $-\alpha_*$ наступит, если

$$\sigma = \tau [\cos 2(\theta - \psi + \alpha_*) + \delta_2 \operatorname{ctg} \varphi^0 \sin 2(\theta - \psi + \alpha_*)] + k^0 \operatorname{ctg} \varphi^0, \quad (5)$$

где $\delta_2 = -\operatorname{sign} \sin 2(\theta - \psi - \alpha_*)$. При специальных путях нагружения предельное состояние может наступить на площадках с ненарушенной структурой. В этом случае уравнения (1), (3) усиливаются неравенствами, обеспечивающими устойчивость деформирования на ослабленных площадках $\pm\alpha_*$. При уменьшении $\operatorname{tg} \varphi^0 / \operatorname{tg} \varphi_*$, k^0 / k_* последние неравенства становятся все более жесткими, и класс специальных нагружений сужается.

Рассмотрим случай предельного состояния на ослабленных площадках. Пусть выполняются уравнения (3)—(5). Данная система существенно переопределена. Это значит, что при повторном нагружении невозможно получить предельное состояние на обеих ослабленных площадках одновременно, т. е. вообще говоря, даже на паре ослабленных площадок всегда есть нереализованный запас прочности. Легко видеть, что больший запас прочности реализуется на путях нагружения с наименьшим отклонением $|\theta(x_1x_2) - \psi(x_1x_2)|$.

Предположим, что предельное состояние достигнуто на площадке $+\alpha_*$. Уравнения (3), (4) можно преобразовать к виду (6):

$$\begin{aligned}
& \left[\sin \delta_1 \varphi^0 \cos 2\psi + \sin 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) \right] \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \sin \delta_1 \varphi^0 \sin 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_2} - \\
& - 2\tau \left[\sin \delta_1 \varphi^0 \sin 2\psi + \cos 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \\
& + 2\tau \sin \delta_1 \varphi^0 \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sin \delta_1 \varphi^0 X_1 = -2\tau \cos 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) \frac{\partial (\theta + \alpha_*)}{\partial x_1}, \quad (6) \\
& \sin \delta_1 \varphi^0 \sin 2\psi \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \left[\sin 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) - \sin \delta_1 \varphi^0 \cos 2\psi \right] \frac{\partial \tau}{\partial x_2} + \\
& + 2\tau \sin \delta_1 \varphi^0 \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + 2\tau \left[\sin \delta_1 \varphi^0 \sin 2\psi - \cos 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \\
& + \sin \delta_1 \varphi^0 X_2 = -2\tau \cos 2 \left(\theta - \psi + \alpha_* + \frac{\delta_1 \varphi^0}{2} \right) \frac{\partial (\theta + \alpha_*)}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Система (6) — гиперболического типа. Интересно отметить, что характеристики $x_2 = x_2(x_1)$ системы почти не зависят от наличного распределения напряжений и определяются в основном свойствами анизотропии среды:

$$x'_2 = \operatorname{tg}(\theta + \alpha_*), \quad (7)$$

$$x'_2 = \operatorname{tg} \left(\theta + \alpha_* + \frac{\pi}{2} + \delta_1 \varphi^0 \right). \quad (8)$$

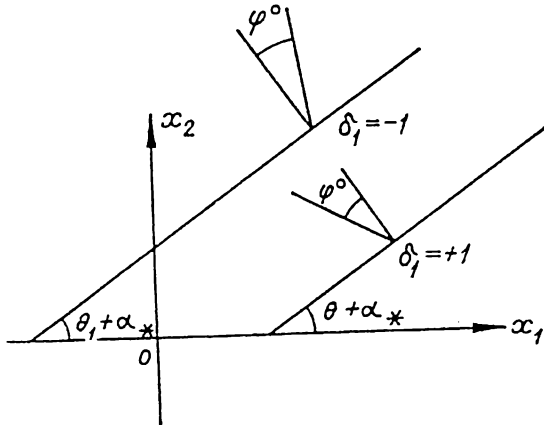


Рис. 4.13

От напряжений зависят только величина δ_1 : при $\delta_1 = +1$ касательное напряжение $\tau_{\alpha_*} > 0$, при $\delta_1 = -1$ $\tau_{\alpha_*} < 0$. Отсюда следует механический смысл характеристик: касательные отрезки к характеристикам первого семейства совпадают с площадками скольжения, а направления характеристик второго семейства — с направлениями векторов приведенных сил, действующих на предельных площадках (рис. 4.13). Подобная интерпретация характеристик (7), (8) при $\delta_1 = -1$, $\varphi^0 = \varphi_*$, $\alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_*}{2}$ возможна и для изотропной сыпучей среды (1), (3). В некоторых случаях она представляется естественной, например,

когда одно из семейств есть пучок прямых, а другое семейство — логарифмические спирали [206]. Логарифмические спирали в этом случае будут линиями скольжения, а направления прямых — направлениями сил, действующих на площадки скольжения.

В работе [19] проведено исследование полученной системы, рассмотрены постановки краевых задач, свойства обобщенных решений и задача о вдавлении штампа в среду с предварительно нарушенной структурой.

§ 4.5. КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИДЕАЛЬНО СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

1. Рассмотрим, следуя [20], плоскую деформацию сыпучей среды в предельном состоянии

$$\tau = -\sin \varphi \sigma + k,$$

где τ, σ инварианты тензора напряжений, φ, k — постоянные материалы. На площадке α (α — угол между площадкой и наибольшим сжимающим напряжением) касательное и нормальное напряжения $\tau_\alpha, \sigma_\alpha$ связаны равенством

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= c_1(\alpha)\sigma_\alpha + c_2(\alpha), \\ c_1 &= \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}, \quad c_2 = \frac{k \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Структура выражений (1.2) отражает закон трения между частицами сыпучей среды: если $\tau_\alpha, \sigma_\alpha$ удовлетворяют (1.2) при некоторых критических коэффициентах $\pm c_1^0, \pm c_2^0$, то между частицами сыпучей среды возможно относительное скольжение. Если $c_1(\alpha), c_2(\alpha)$ не равны критическим, то контакты между частицами находятся в допредельном состоянии и на площадке сохраняется устойчивость деформирования. Пусть $c_1(\alpha) = c_1^0, c_2(\alpha) = c_2^0$ при $\alpha = \alpha_0 > 0$, где α_0 — известная постоянная величина. Величина угла α_0 может зависеть как от свойств материала, так и от условий его нагружения в допредельном состоянии.

Таким образом, в предельном состоянии (1.1) механизм деформирования среды анизотропный: на площадках, касательных к линиям $x'_2(x_1) = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, между частицами среды возможны неограниченные относительные смещения, на всех остальных площадках смещения между частицами малы [208] (θ — угол наклона σ_1 у оси Ox_1, Ox_1x_2 — декартова система координат). Подобный механизм деформирования можно интерпретировать следующим образом: в предельном состоянии среда разделяется линиями $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$ на отдельные правильные элементы и ее дальнейшее деформирование происходит вследствие вращения, сжатия и скольжения элементов друг по другу. Для построения замкнутой системы уравнений, описывающей деформирование среды, необходимо сформулировать требования, которым должна удовлетворять эта система. Согласно [21], необходимым в данном случае является только одно требование: система должна в инвариантной форме описывать процессы, которые происходят на площадках $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Возможные дополнительные условия, в том числе и условие совпадения характеристик поля скоростей и напряжений, необходимыми не являются.

Кинематика деформирования среды зависит от закона трения между ее элементами. Возможны два принципиально различных режима трения: вязкий и нормальный [208], или невязкий. При вязком режиме трения скорость сдвига между элементами зависит как от нелокальных факторов — поведения окрестных элементов и граничных условий, так и от локальных факторов — напряжений, действующих на площадке скольжения. При невязком режиме трения от напряжений зависит только момент наступления скольжения. В дальнейшем скорость от напряжений не зависит и может быть ограничена только нелокальными факторами. В упрочняющихся пластических телах реализуется первый режим

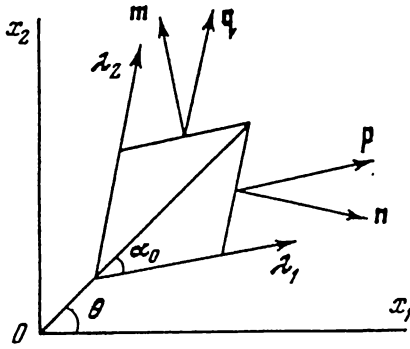


Рис. 4.14

трения, в идеально-пластических — второй. В дальнейшем, ограничимся моделью сыпучей среды с невязким трением идеально сыпучей среды. Распределение σ, θ будем предполагать фиксированным и известным из решения краевой задачи для напряжений [206].

2. Пусть $v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)$ поле скоростей в декартовой системе координат. Обозначим через δ приращения скоростей и координат при переходе от элемента к элементу, а через δ — приращения внутри одного и того же элемента. Скорости сдвигов на площадках AB, BC (рис. 4.14) можно характеризовать инвариантными величинами

$$\gamma_{qp} = \frac{\partial v_p}{\partial q} + \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \omega \sin 2\alpha_0, \quad (2.1)$$

$$\gamma_{pq} = \frac{\partial v_q}{\partial p} - \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \omega \sin 2\alpha_0,$$

где $\omega = 1/2 (\delta v_2 / \delta x_1 - \delta v_1 / \delta x_2)$. Так как скольжение по неортогональным площадкам AB, BC не вызывает изменения объема, то, следовательно, с изменением должна быть связана сумма $\delta v_n / \delta p + \delta v_m / \delta q$. Последняя преобразуется к виду

$$\frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right). \quad (2.2)$$

Если предположить непрерывность компонент скорости v_n, v_m и их производных, то можно получить оценку

$$\frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + o(l)_n. \quad (2.3)$$

где l — расстояние между линиями скольжения. Для равенств (2.1) подобные оценки невозможны, так как разрывность на сторонах элементов касательных скоростей и возможная независимость скоростей сдвигов γ_{qp}, γ_{pq} связана с существом деформирования среды. Поэтому при $l \rightarrow 0$ переменную ω необходимо оставить в качестве независимой функции. Приращения δ в этом случае можно рассматривать как дифференциалы, что позволяет описывать поведение несплошной среды при малых расстояниях между линиями несплошности методами механики сплошной среды.

Пусть (λ_1, λ_2) — параметры линий скольжения $x'_2 = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, а w_1, w_2 — проекции скорости на орты к сторонам элемента. Так как трение среды предполагается невязким, то

скорость элемента (λ_1, λ_2) может быть ограничена только скоростями элементов $(\lambda_1 \pm d\lambda_1, \lambda_2 \pm d\lambda_2)$. Из условия непрерывности v_n, v_m и условия возможного скольжения по сторонам элемента следует, что вдоль линии λ_1 может передаваться информация только о нормальной к стороне элемента скорости w_1

$$\begin{aligned} \bar{v}(\lambda_1 + d\lambda_1) \cdot \bar{n}(\lambda_1) &= w_1(\lambda_1) - \omega(\lambda_1) \cos 2\alpha_0 - \varepsilon_1(\lambda_1), \\ \frac{\partial w_1}{g_1 \partial \lambda_1} - \frac{w_2 + \cos 2\alpha_0 w_1}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{g_1 \partial \lambda_1} + \omega \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ε_1 — скорость сжатия элемента вдоль линии λ_1 . Аналогично вдоль λ_2

$$\frac{\partial w_2}{g_2 \partial \lambda_2} + \frac{w_1 + \cos 2\alpha_0 w_2}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{g_2 \partial \lambda_2} - \omega \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_2 = 0. \quad (2.5)$$

Здесь g_1, g_2 — параметры Ламе.

Из уравнений (2.4), (2.5) следует, что в общем случае поле скоростей зависит от поля ω , которое отражает возможное различие в функционировании площадок скольжения. Исключением является идеально-пластическая среда, для которой $\alpha_0 = \pi/4$ и уравнения (2.4), (2.5) замкнуты независимо от уравнения для ω . Можно показать, что условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций в идеальной пластичности эквивалентно условию симметрии сжимаемости: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Если при этом $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv 0$, то уравнения (2.4), (2.5) превращаются в уравнения для несжимаемой идеально-пластической среды [209].

Пусть величина ε известна как функция гидростатического давления, а величина $\Delta = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ — либо известна из дополнительных соображений, либо равна единице. Соотношение (2.5) отражает факт возможного скольжения по линиям $x'_2 = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Однако линия $x'_2 = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$ будет характеристикой системы для w_1, w_2, ω только в том случае, если в уравнение для ω не войдут производные вдоль λ_1 . В противном случае слабые разрывы скорости будут распространяться по линии, отличной от линии скольжения. Из (2.5) следует, что „локально“ линия слабого разрыва состоит из отрезков $x'_2 = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$, но за счет вращения элементов направление распространения слабых разрывов может отклониться от линии скольжения. Идеально-пластический материал в этом отношении является исключением. При $\alpha_0 = \pi/4$ имеет место равенство $\omega \cos 2\alpha_0 \equiv 0$, и перенос линии скольжения за счет вращения происходит вдоль самой линии скольжения. Поэтому характеристики поля скоростей идеально-пластического материала совпадают с линиями скольжения (если их определить, как в п. 1) и характеристиками поля напряжений.

Рассмотрим уравнения для замыкания системы (2.4), (2.5). Если история нагружения материала в допредельном и граничные условия в предельном состояниях не выделяют ни одну из систем линий скольжения, то можно предположить что средние по некоторому промежутку времени скорости сдвигов γ_{qp}, γ_{pq} равны между собой. В этом случае $\omega = 1/2(\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2)$ и характеристики поля скоростей совпадают с линиями наибольших касательных напряжений $x'_2 = \text{tg}(\theta \pm \pi/4)$. Если при этом $\Delta = 1$, то тензоры напряжений и скоростей деформаций будут соосными.

Рассмотрим другой крайний случай, когда скольжение происходит только по одной из линий λ_1, λ_2 например, по линии λ_1 . В этом случае $\gamma_{pq} \equiv 0$ и полная система уравнений имеет вид

$$\sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_1 = 0, \\ & - \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_2 = 0, \\ & \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - 2\omega \sin 2\alpha_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система (2.6), (2.7) гиперболического типа. Если μ_1, μ_2 — параметры характеристик $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$, $x'_2 = \operatorname{ctg}(\theta - \alpha_0)$, системы, u_1, u_2 — проекции скорости на характеристики, а f_1, f_2 — проекции скорости на линию скольжения λ_2 ортогональную к ней траекторию, то систему (2.6), (2.7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{g_1 \partial \mu_1} - u_2 \frac{\partial \theta}{g_1 \partial \mu_1} &= -\varepsilon_1 \sin 2\alpha_0, \\ \frac{\partial u_2}{g_2 \partial \mu_2} + u_1 \frac{\partial \theta}{g_2 \partial \mu_2} &= -\frac{\varepsilon_1 \cos^2 2\alpha_0 + \varepsilon_2}{\sin 2\alpha_0}, \\ \frac{\partial f_1}{g_1 \partial \mu_1} - f_2 \frac{\partial \theta}{g_1 \partial \mu_1} &= \omega \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Постановка краевых задач определяется типом системы (2.6), (2.7). Если вдоль границы $x_2 = x_2(x_1)$, $\nu = \operatorname{arctg} x'_2$ задаются обе компоненты скорости, то задача будет корректной при условии, что граница не имеет характеристических направлений μ_1, μ_2 . Вдоль характеристик граничные условия должны удовлетворять первым двум соотношениям (2.8). Пусть на границе задана величина ω . Дополнительно к этому условию на границе можно задать только некоторую комбинацию частных производных от скорости, например P_β

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} x'_2 \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} x'_2 \right) \sin \beta = \frac{1}{\cos \nu} P_\beta.$$

Корректность такой задачи зависит не только от уравнений (2.6), (2.7), но и от вида граничного условия на скорость: задача будет корректной, если

$$x'_2 \neq \frac{\cos(\theta + \alpha_0 - \beta)}{\cos(\theta - \alpha_0 - \beta)} \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0).$$

При $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$ граничные условия связаны соотношением

$$\omega \sin(\theta - \alpha_0 - \beta) + \varepsilon_1 \sin(\theta + \alpha_0 - \beta) = -P_\beta.$$

Если $\beta = \theta - \alpha_0 + \pi/2$, то при любом положении границы должно выполняться равенство

$$\omega \cos(\theta - \alpha_0 - \nu) \sin 2\alpha_0 + \varepsilon_1 \cos 2\alpha_0 \sin(\theta + \alpha_0 - \nu) + \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha_0 - \nu) = \sin 2\alpha_0 P_\beta.$$

Таким образом, для системы (2.6), (2.7) корректными будут задачи Коши, Гурса, различные смешанные задачи и т. д.

Так как скорости входят в систему (2.6), (2.7) дифференциально, а ω алгебраически, то при анализе разрывных решений необходимо рассматривать совместно слабые разрывы скоростей и сильный разрыв ω . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ непрерывны. Слабые разрывы скоростей возможны только на характеристиках $x'_2 = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$, $x'_2 = \operatorname{ctg}(\theta - \alpha_0)$. Роли характеристик при этом будут различными: на линии скольжения слабый разрыв скорости реализуется при сохранении непрерывности величины ω , на линии, ортогональной к линии скольжения, слабый разрыв скорости влечет за собой сильный разрыв ω .

Пример решения краевой задачи рассмотрен в [20]. В [20] также обсуждается случай, когда реализуется попеременное функционирование линий скольжения. Прямые экспериментальные данные о возможности такого режима приводятся в главе 7.

§ 4.6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД

Первый шаг, который представляется целесообразным, — это ограничиться сначала случаем плоской деформации. В этом случае можно использовать плоские „реальные“ модели, которые проще пространственных. Однако сразу возникает вопрос, в какой мере такие модели будут описывать плоскую деформацию реальной сыпучей среды, состоящей из трехмерных частиц. Плоские „физические“ модели предполагают, что поровое пространство представляет собой двумерные области, т. е. описывают, строго говоря, ситуацию, когда частицы среды имеют цилиндрическую или дискообразную форму с неизменными осями Ox_3 . Удобнее, однако, начать все же с такой „плоской“ деформации.

1. Дилатансия. В упругих телах изменение объема происходит только вследствие объемного сжатия. Изменение объема сыпучего материала (дилатансия) происходит более сложно и может быть связано не только с гидростатическим сжатием. Нет необходимости приписывать свойство дилатансии твердым частицам среды.

Поэтому дилатансию можно переопределить как свойство изменения порового пространства в процессе деформирования. Один из механизмов такого изменения, который обычно приводится для иллюстрации дилатансии, изображен на рис. 4.15 а. Он соответствует классическому определению дилатансии как изменению объема при сдвиге. Здесь можно усмотреть два почти тривиальных на первый взгляд обстоятельства, которые в дальнейшем будут иметь большое значение. Первое обстоятельство связано не столько с механизмом, изображенным на рис. 4.15, сколько с сущностью деформирования сыпучей среды. Пусть $\vec{V}(x_1, x_2)$ — поле скоростей в декартовых координатах Ox_1x_2 . Внутри частиц это поле определено, в поровом пространстве не определено, а на контактах частиц либо гладко, либо разрывно, либо резко меняет характер (в случае качения без скольжения). Модель, изображенная на рис. 4.15 а, показывает, что дилатансия является следствием скольжения (величина проскальзывания — размерности длины) частиц друг по другу, т. е.

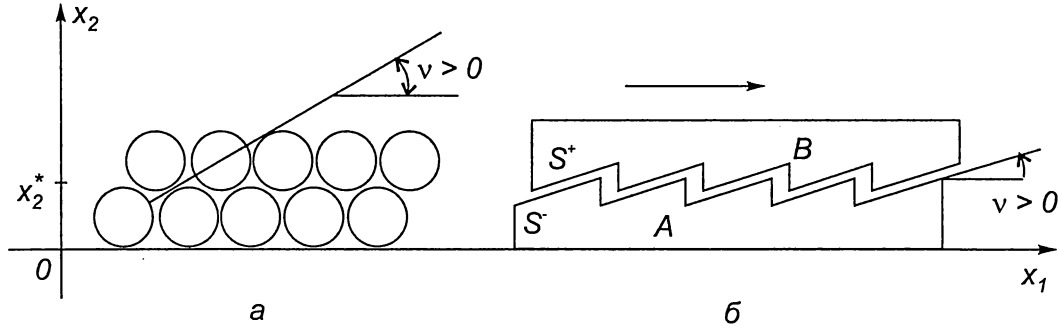


Рис. 4.15

следствием появления контактных разрывов поля \bar{V} . И второе — тоже очевидное обстоятельство — скольжение происходит по площадкам, составляющим определенный угол ν с осью Ox_1 . Естественно, что угол ν в общем случае зависит от величины проскальзывания. Для постоянного ν механизм дилатансии можно представить еще более просто (см. рис. 4.15 б). Поле \bar{V} определено в областях S^+ , S^- и разрывно на площадках скольжения AB . На первый взгляд очевидно, что вместо этих площадок можно ввести линию разрыва $x_2 = x_2^* = \text{const}$ и считать, что поле скоростей определено при $x_2 > x_2^*$; $x_1 < x_1^*$ и на линии $x_2 = x_2^*$ испытывает сильный разрыв. При этом разрывы касательной и нормальной к линии $x_2 = x_2^*$ компонент поля связаны между собой. Линии разрыва должны быть дискретными.

Рассмотрим сдвиг первоначально правильного элементарного объема конечных размеров L (здесь и ниже под объемом понимается сечение тела плоскостью $x_3 = \text{const}$). Для удобства примем временно, что $\nu = \text{const}$. Это позволит анализировать смещения и деформации, а не их скорости. Ясно, что для определяющих соотношений имеют значения связи переменных только на границах элементарного объема. Поэтому внутри этого объема можно рассматривать любые разрывные поля. Информация о них войдет через связи на границах. В соответствии с этим деформации $\varepsilon_{ij}(i, j = 1, 2)$ будут определяться только на базе L . Пусть объем сдвигается на угол $\gamma > 0$. Упругую или иную деформацию частиц пока исключим. Тогда касательная составляющая разрыва смещений равна

$$\Delta s = l \operatorname{tg} \gamma,$$

где l — расстояние между линиями разрыва (рис. 4.16 а). Вследствие дилатансии появится нормальный разрыв, равный

$$\Delta h = \Delta s \operatorname{tg} \nu = l \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \nu.$$

Пусть $l \ll L$. Тогда на базе L число линий разрыва равно $n = L/l$ и $\Delta L n \Delta h = L \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \nu$, где ΔL — общее приращение высоты образца. Отсюда $\varepsilon_{22} = \Delta L / L = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \nu$. Естественно, что в данном случае горизонтальная деформация отсутствует. Таким образом, принятая модель дилатансии приводит к следующему результату:

$$\varepsilon_{11} = 0, \varepsilon_{22} = \gamma \operatorname{tg} \nu, \quad (1.1)$$

где $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma$ — величина сдвига. Модель, изображенная на рис. 4.15 а, иллюстрирует еще одно свойство сыпучей среды: ориентация контактов между частицами, по которым происходит скольжение, зависит от направления сдвига элементарного объема. Так, при

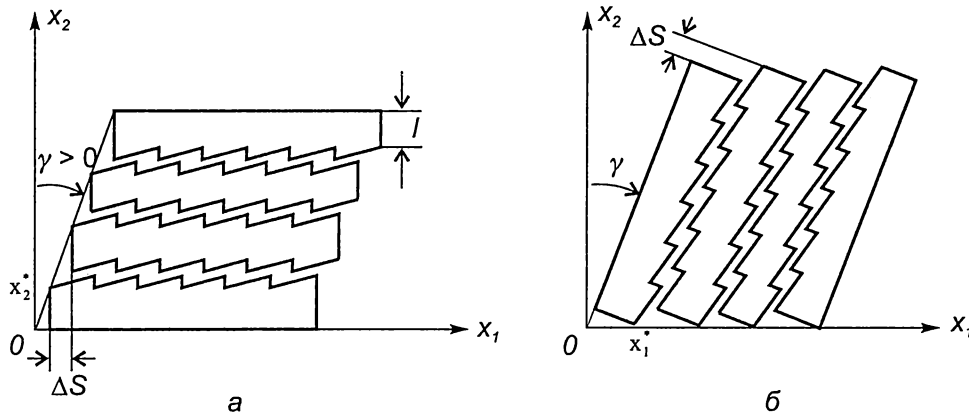


Рис. 4.16

сдвиге в обратную сторону ($\gamma < 0$) угол ν заменяется на $(-\nu)$. Это свойство следует из (1.1). Если эту формулу применять при всех γ , то знак ε_{22} получится зависящим от знака γ . С другой стороны, очевидно, что направление сдвига элементарного объема, который предварительно не деформировался и не составлен из частиц с некоторой специальной укладкой, не должно влиять на величину дилатансии. Отсюда и (1.1) следует, что угол ν должен зависеть от знака $\Delta\gamma$. Однако, если элемент получил предварительную деформацию (например, сдвиг $\gamma > 0$), то приращение его объема может зависеть от знака $\Delta\gamma$. Эту ситуацию легко представить с помощью модели, показанной на рис. 4.15 б, если принять, что угол ν не зависит от направления сдвига.

Вернемся к результату (1.1). Так как жесткое вращение элемента не влияет на его деформации, то сдвиг в рамках принятой модели дилатансии (см. рис. 4.15 б) можно осуществить и за счет разрывов по вертикальным линиям (см. рис. 4.16 б). Тогда

$$\varepsilon_{11} = \gamma \operatorname{tg} \nu, \quad \varepsilon_{22} = 0 \quad (1.2)$$

Таким образом, использование принятой модели дилатансии приводит к неоднозначному результату. Более того, ни один из результатов (1.1), (1.2) не может быть удовлетворительным по следующей причине. Пусть материал первоначально изотропен. Условия нагружения (сдвиг) не выделяют ни одно из направлений Ox_1 , Ox_2 . Поэтому из соображений симметрии можно заключить, что деформации ε_{11} , ε_{22} должны быть равны между собой. Так как требования симметрии не связаны с типом среды и носят фундаментальный характер, то устранение полученного противоречия должно идти только за счет модельных представлений о среде.

Можно ввести несколько вариантов, совмещающих принятый механизм дилатансии с требованием симметрии. Например, можно предположить, что в одних частях элементарного объема дилатансия происходит вследствие разрывов по вертикальным линиям, в других — вследствие разрывов по горизонтальным линиям и т. д. Однако этот и другие подобные варианты вызывают сомнение по соображениям чисто логического характера. Единственный удовлетворительный вариант, к которому приводят требования симметрии и принятый механизм дилатансии, следующий: во всем объеме есть и вертикальные и горизонтальные линии разрыва, они равноправны, разрывы на них реализуются одновременно и дают суммарный сдвиг γ одинаковые деформации в направлениях Ox_1 , Ox_2 . Так

как все линии разрыва равноправны, то разрывы по горизонтальным линиям дают вклад $\gamma/2$ в общий сдвиг. По формуле (1.1) определяем $\varepsilon_{22} = \gamma \operatorname{tg} \nu / 2$. Аналогично $\varepsilon_{11} = \gamma \operatorname{tg} \nu / 2$.

Общее изменение объема равно

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon = \gamma \operatorname{tg} \nu. \quad (1.3)$$

На рис. 4.17 показаны линии разрыва $x_1, x_2 = \text{const}$ и соответствующие площадки скольжения.

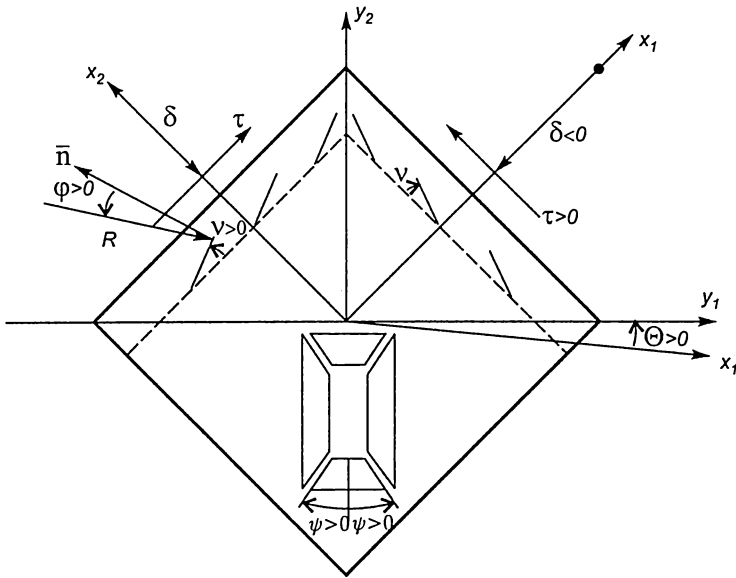


Рис. 4.17

Таким образом, развитие классического определения дилатансии приводит к соотношению (1.3) и модели, изображенной на рис. 4.17. Однако полученный результат оставляет чувство неудовлетворенности. Действительно, исходный механизм дилатансии (см. рис. 4.15) предельно ясен. Для окончательной же модели (рис. 4.17), предполагающей одновременные разрывы по обеим семействам линий $x_1, x_2 = \text{const}$, такой ясности пока нет.

Вторая причина более серьезна. Вернемся к первоначальному определению дилатансии как процессу изменения порового объема. Такое изменение можно представить себе моделью, показанной на рис. 4.18 а.

Здесь поле скоростей $\bar{V}(y_1, y_2)$ также разрывно и скольжение происходит по контактам, касательная к которым составляет угол ψ с осью Oy_2 . Для постоянного угла ψ модель упрощается (рис. 4.18, б). Если $\Delta s_1, \Delta s_2$ приращения расстояний между точками A_1, B_1 и A_2, B_2 , то $\Delta s_2 = -\Delta s_1 \operatorname{ctg} \psi$. Рассмотрим деформирование элементарного объема. Пусть

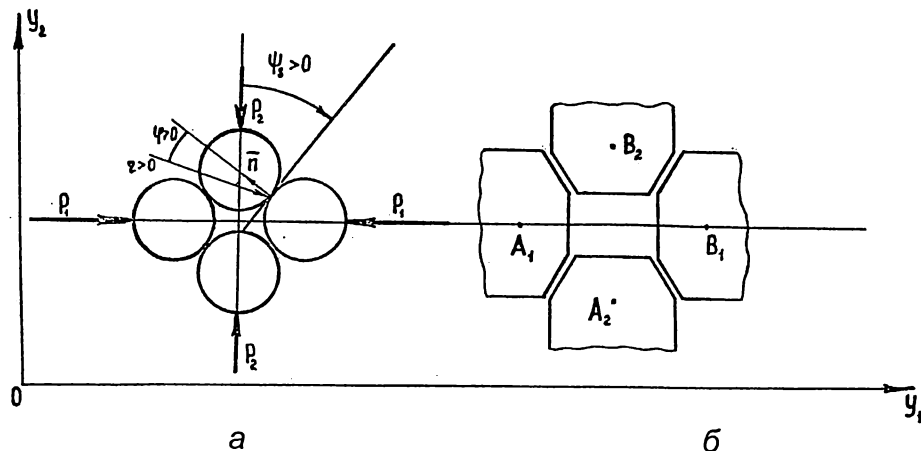


Рис. 4.18

объем получает деформацию сжатия $\varepsilon_1 < 0$. Тогда в направлении Oy_2 появится деформация растяжения ε_2 . Пусть $l_1, l_2 \ll L$ — расстояния между точками A_1, B_1 и A_2, B_2 . Общие изменения размеров элемента в направлениях Oy_1, Oy_2 равны

$$\Delta S_1 = (L/l_1)\Delta s_1, \Delta S_2 = (L/l_2)\Delta s_2.$$

Отсюда

$$\varepsilon_2 = -\operatorname{ctg} \psi (l_1/l_2)\varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_2 = \Delta S_2/L$, $\varepsilon_1 = \Delta S_1/L$ главные деформации. При $l_1 = l_2$

$$\varepsilon_2 = -\operatorname{ctg} \psi \varepsilon_1. \quad (1.4)$$

Если в (1.4) $\psi = \pi/4$, то изменения объема нет, если $\psi < \pi/4$, то материал разрыхляется, при $\psi > \pi/4$ — уплотняется. Таким образом, модель, показанная на рис. 4.18, также описывает явление дилатансии. Возникает вопрос, связанный со следующим обстоятельством. Уравнения (1.3), (1.4) являются определяющими. После их формулировки они уже не связаны с историей их вывода (внутренним механизмом деформирования) и приобретают самостоятельное значение. В частности, их можно преобразовывать по правилам тензорного проектирования — правилам аппаратного характера, не связанным ни с сыпучей средой, ни с модельными представлениями о ней. Возникает опасение, что два равноправных с логической точки зрения механизма (см. рис. 4.15, 4.18) приведут к различным определяющим уравнениям. Преобразуем (1.4) к инвариантам $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\gamma = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \psi \right) \gamma.$$

Отсюда следует условие совпадения уравнений (1.3), (1.4):

$$\frac{\pi}{4} - \varphi = \nu. \quad (1.5)$$

Рассмотрим механический смысл этого условия. Будем исходить из уравнения (1.4), записанного в системе координат Oy_1, Oy_2 . Оси этой системы совпадают с главными осями тензора деформаций. Однако можно рассмотреть деформирование того же элементарного объема (естественно, с прежним, „пуассоновским“ — рис. 4.18 — механизмом дилатансии) в системе координат Ox_1, Ox_2 , повернутой относительно прежней на угол $\pi/4$. Площадки скольжения связаны только с материальным объемом и поэтому в системе координат Ox_1x_2 они будут отклоняться от оси Ox_1 на углы $\pi/4 \pm \psi$. С другой стороны, тензорные правила показывают, что в Ox_1x_2 : $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon/2$, $\varepsilon_{12} = \gamma/2$, т. е. в этой системе координат деформирование можно рассмотреть и по сдвиговому механизму дилатансии. Для этого механизма площадки скольжения отклоняются от осей Ox_1, Ox_2 на угол ν . Условие (1.5) показывает, что „пуассоновские“ и сдвиговые площадки скольжения совпадают между собой. Этот замечательный факт разрешает возникшее сомнение. Из него, в частности, следует, что „совместность деформации“ (неперекрывание частиц) при сдвиговом механизме деформирования, когда допускается одновременное скольжение по площадкам из различных семейств (неважно, ортогональным или нет), возможна только за счет наличия порового пространства. Для „пуассоновской“ интерпретации это очевидно.

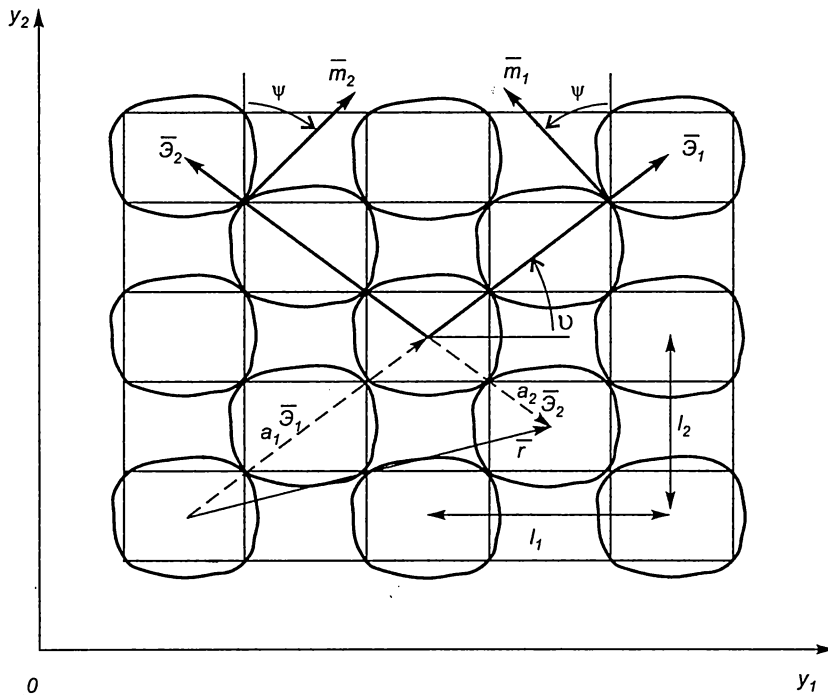


Рис. 4.19

анализе действительного разрывного поля скоростей \bar{V} . Поле \bar{V} , как отмечалось, определено в частицах среды, неопределено в поровом пространстве, а на контактах между частицами в общем случае разрывно. Зафиксируем точку в одной из частиц и поставим задачу определения приращения \bar{V} при движении вдоль некоторой кривой Γ . Для частей контура Γ , которые проходят внутри частицы, приращение определяется из условий вращения частицы как жесткого целого и ее деформирования. При пересечении контуром контакта между частицами приращение определяется из условия разрыва на контакте. Очевидно, что пересечение порового пространства должно быть запрещено. Таким образом, разрешенные пути Γ , вдоль которых непосредственно можно определить приращение скорости, проходят только по частицам и контактам между ними. Основное условие на поле \bar{V} состоит в том, что приращение \bar{V} вдоль любого разрешенного замкнутого контура должно равняться нулю. Удобно рассматривать приращения вдоль произвольных путей Γ' . В этом случае необходимо принять, что приращение \bar{V} вдоль Γ' и контура Γ , дополняющего Γ' до замкнутого, равно нулю.

Выше действительная упаковка частиц фактически заменялась эффективной периодической (без ограничения на форму частиц). Схематически периодическую упаковку можно изобразить, как показано на рис. 4.19 (выделены ориентация контактов и — пунктиром — линии, которые не должен пересекать контур Γ). Исключим вращение частиц и их собственную деформацию. Тогда приращения скорости будут связаны только с касательными разрывами на контактах. Величину скорости разрыва для всех контактов внутри элементарного объема будем предполагать одинаковой и равной $\dot{\lambda}$. Условие равенства нулю приращения по замкнутому контуру выполнено. Есть два вида контуров Γ , которые пересекают контакты только одного семейства. Это прямые, параллельные единичным

Результат (1.5) порождает новые вопросы. Во-первых, совпадение сдвигового и „пуассоновского“ механизмов дилатансии получено только при $l_1 = l_2$. Вопрос о их связи при $l_1 \neq l_2$, неясен. Кроме того, „пуассоновский“ механизм легко обобщается на случай $l_1 \neq l_2$ в то время, как для сдвигового механизма подобные обобщения неочевидны. И, наконец, даже в случае $l_1 = l_2$ остается открытым вопрос о соотношении расстояний между линиями разрыва l и $l_1 = l_2$. Оказывается, что наиболее простой путь решения этих вопросов состоит не в формализации принятых моделей и их обобщении, а в

векторам $\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_2$. Приращение \bar{V} отнесенное к длине Γ , если она достаточно велика, обозначим через $D\bar{V}/D\mathcal{E}_i$. Легко показать что

$$\frac{D\bar{V}}{D\mathcal{E}_1} = \dot{\Lambda} \bar{m}_1, \frac{D\bar{V}}{D\mathcal{E}_2} = \dot{\Lambda} \bar{m}_2, \quad (1.6)$$

где $\dot{\Lambda} = 2\dot{\lambda}/\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, $\bar{m}_1 = \{-\sin\psi, \cos\psi\}$, $\bar{m}_2 = \{\sin\psi, \cos\psi\}$.

Вычислим аналогичную „производную“ в направлении произвольного вектора $\bar{r} = r \cdot \bar{n} = a_1 \bar{\mathcal{E}}_1 + a_2 \bar{\mathcal{E}}_2$, $|\bar{n}| = 1$. Разрешенный эквивалентный контур Γ должен состоять из отрезков, параллельных векторам $\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_2$. Поэтому

$$\frac{D\bar{V}}{Dn} = \frac{a_1}{r} \cdot \frac{D\bar{V}}{D\mathcal{E}_1} + \frac{a_2}{r} \cdot \frac{D\bar{V}}{D\mathcal{E}_2}. \quad (1.7)$$

Последняя формула означает, что разрывное поле \bar{V} допускает гладкое осреднение \bar{v} такое, что производные \bar{V} в произвольном направлении \bar{n} совпадают с „производными“ в смысле (1.7).

Рассмотрим с этой точки зрения сдвиговый и „пуассоновский“ механизмы дилатансии. При $l_1 = l_2$ векторы $\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_2$ ортогональны. Поэтому вместо разрывов на контактах оказалось возможным ввести разрывы на двух ортогональных семействах линий, параллельных векторам $\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_2$. Причем при вычислении разрывов поперек одного из семейств необходимо использовать разрывы только одного из семейств контактов между частицами. Аналогично для „пуассоновского“ механизма вводились два семейства ортогональных линий разрыва, повернутых относительно векторов $\bar{\mathcal{E}}_i$ на угол $\pi/4$. Ясно, что при $l_1 \neq l_2$ сдвиговый механизм теряет смысл, так как при вычислении разрыва поперек одного из семейств ортогональных линий разрыва необходимо использовать разрывы по контактам обоих семейств (1.7). Таким образом, классический сдвиговый механизм дилатансии в общем случае не допускает последовательного развития для формулировки определяющих соотношений. Единственно возможный вариант описания дилатансии связан с анализом действительного поля скоростей \bar{V} , которое претерпевает разрывы на заданных контактах, а не на линиях разрыва.

В заключение запишем дилатансионное соотношение в параметрической форме относительно скоростей деформаций. Из (1.6), (1.7) следует:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^p &= -\dot{\Lambda} \frac{\sin\psi}{\cos\vartheta}, \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, \\ \dot{\varepsilon}^p &= 2\dot{\Lambda} \frac{\cos(\psi + \nu)}{\sin 2\vartheta}, \quad \dot{\gamma}^p = 2\dot{\Lambda} \frac{\cos(\psi - \nu)}{\sin 2\vartheta}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\operatorname{tg} \vartheta = l_2/l_1$. При $l_1 = l_2$ $\vartheta = \pi/4$, $\dot{\lambda} = \sqrt{2} \dot{\lambda}/l_1$ и

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^p &= -\sqrt{2}\dot{\Lambda} \sin\psi, \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \sqrt{2}\dot{\Lambda} \cos\psi, \\ \dot{\varepsilon}^p &= 2\dot{\Lambda} \sin\nu, \quad \dot{\gamma}^p = 2\dot{\Lambda} \cos\nu. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь и ниже $\nu = \pi/4 - \psi$ по определению, точками отмечены скорости, индекс p указывает на необратимый характер деформирования вследствие проскальзывания. Угол ν в соотношениях для скоростей может быть переменным.

2. Внутреннее трение сыпучего материала связано с внешним трением слагающих его частиц. В первом приближении внешнее трение, как известно, характеризуется следующим свойством. Пусть F и P — сдвигающее и нормальное сжимающие усилия, действующие на контакте. Тогда при $|\varphi| = \arctg |F|/P < \varphi^*$ относительное проскальзывание частиц либо отсутствует, либо очень мало, при $|\varphi| = \varphi^*$ проскальзывание не определено и может быть ограничено только внешними препятствиями; ситуация $|\varphi| > \varphi^*$ невозможна.

Перейдем к вопросу о внутренних напряжениях в сыпучей среде. Для представительных элементарных объемов можно ввести определения напряжений, которые подчиняются правилам тензорного проектирования. Как и в теории пластичности, сжимающие напряжения будем считать отрицательными. Выделим элементарный объем, нагрузим его гидростатическим давлением $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma < 0$ и будем от нуля увеличивать сдвигающее напряжение $\sigma_{12} \equiv \sigma_{21} = \tau$. Представления о внутреннем трении приводят к следующим предварительным требованиям к модели: 1) должно существовать некоторое критическое значение $\tau = \tau^*$, при котором сдвиг элемента может быть неограниченным; 2) значение τ^* должно зависеть от параметров внешнего трения частиц, причем при $\sigma \rightarrow 0$ величина τ^* также должно стремиться к нулю, 3) энергетические соображения показывают, что значение τ^* должно как-то зависеть и от угла ν , имеющего кинематическую природу, причем с увеличением ν значение τ^* также должно увеличиваться.

Естественно, что при исследовании напряжений необходимо исходить из тех же модельных представлений, которые использовались для анализа дилатансии. Пусть в предельном состоянии эффективный угол трения на площадках, которые являются причиной дилатансии, равен φ^* .

Обычно в континуальной механике (в том числе и сыпучих материалов) правила тензорного проектирования предполагаются верными для определения напряжений внутри элементарного объема. Рассмотрим следствие из этой гипотезы. Обозначим через R — величину напряжения, действующего на площадке возможного проскальзывания, через φ — угол, на который отклоняется это напряжение от нормали к площадке. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -R\Sigma_1(\varphi, \nu), \quad \sigma_2 = -R\Sigma_2, \\ \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = -R\Sigma, \quad \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = RT,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где Σ_i , Σ , T — известные функции углов φ и ν или ψ . Из правил тензорного проектирования следует, что

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi}, \quad \Sigma_2 = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \psi}, \\ \Sigma &= \frac{\cos(\varphi + 2\nu)}{\cos 2\nu}, \quad T = \frac{\sin \varphi}{\cos 2\nu}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Отсюда

$$\tau = -\sigma \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi + 2\nu)}.\tag{2.3}$$

Возможна и другая точка зрения на связь макронапряжений с усилиями на площадках дилатансии (т. е. напряжениями внутри элементарного объема — микронапряжениями).

Выше действительная упаковка частиц заменялась эффективной регулярной. (Замена производилась не для всего материала, а только для его элементарных объемов, поэтому в различных точках среды эффективная упаковка в общем случае различна.) Вычислим усилия на контакте из условия равновесия отдельных частиц среды. Если P_1, P_2 — силы, действующие вдоль осей Oy_1, Oy_2 , то (см. рис. 4.18).

$$P_1 = 2r \cos(\psi - \varphi), P_2 = 2r \sin(\psi - \varphi),$$

где r — величина силы, действующей на контакте, φ — угол, на который отклоняется эта сила от нормали к контакту. Для достаточно большого элементарного объема $P_1 = -\sigma_1 l_2$, $P_2 = -\sigma_2 l_1$ и

$$\sigma_1 = -\frac{2r}{l_2} \cos(\psi - \varphi), \sigma_2 = -\frac{2r}{l_1} \sin(\psi - \varphi). \quad (2.4)$$

Если величину $2r/\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, имеющую размерность напряжения, обозначить через R , то соотношения (2.4) можно предать форму (2.1), где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sin \vartheta}, \Sigma_2 = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\cos \vartheta}, \\ \Sigma &= \frac{\cos(\psi - \varphi - \vartheta)}{\sin 2\vartheta}, T = \frac{\cos(\psi - \varphi + \vartheta)}{\sin 2\vartheta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $l_1 = l_2$ имеем $\vartheta = \pi/4$, $R = \sqrt{2}r/l_1$ и

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sqrt{2} \cos(\psi - \varphi), \Sigma_2 = \sqrt{2} \sin(\psi - \varphi), \\ \Sigma &= \cos(\varphi + \nu), T = \sin(\varphi + \nu). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что

$$\tau = -\sigma \operatorname{tg}(\varphi + \nu). \quad (2.7)$$

Пусть элемент перешел в предельное состояние, т. е. угол φ достиг значения φ^* и не меняется. Если в соотношениях (2.3), (2.7) положить $\varphi = \varphi^*$, то они станут играть роль определяющих уравнений (значение ν предполагается известным). Оба эти уравнения удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям $\tau^* \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, τ^* зависит от φ^* и ν , τ^* увеличивается с увеличением ν . Анализ механического смысла соотношений (2.2), (2.5) и следствий из них покажет, какой из этих вариантов является приемлемым.

3. Математическая модель. Соотношения (1.8), (2.5) записаны для общего случая без ограничений на характерные масштабы в направлениях Oy_1, Oy_2 . Ограничимся более простым случаем одинаковых масштабов, т. е. случаем, когда дополнительный параметр состояния ϑ отсутствует ($\vartheta \equiv \pi/4$).

Следующий вопрос, который возникает на пути к замкнутой системе — это вопрос о соосности. Выше предполагалось, что элементарный объем нагружается так, что в фиксированной локальной системе координат всегда $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Для изотропного материала из соображений симметрии можно заключить, что и $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{22}$ (касательное напряжение и сдвиг на симметрию не влияют). Последнее равенство эквивалентно условию соосности. Если оси тензора напряжений поворачиваются, то ситуация может осложниться. Так как

при решении конкретных задач заранее неизвестно, будут оси поворачиваться или оставаться неподвижными, то в модели необходимо предусмотреть общий случай поворота осей. Предположим для определенности, что тензор скоростей пластических деформаций всегда соосен тензору напряжений:

$$\frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^p}{\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (3.1)$$

В пользу (3.1) можно привести три аргумента: 1) есть экспериментальные данные, подтверждающие условие соосности (3.1) для определенных классов нагружений [159]; 2) условие (3.1) принималось в ряде моделей сыпучих и пластических материалов [189], и основной аргумент — 3) это уравнение является наиболее простым и пока нет необходимости его усложнять.

Если через Ox_1x_2 обозначать теперь не локальную, а исходную систему координат, то (см. рис. 4.17)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta, \\ \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p, \quad \dot{\gamma}^p = -(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p) \cos 2\theta - 2\dot{\varepsilon}_{12}^p \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (3.3)$$

Уравнения (2.1), (3.2) вводят две новые неизвестные функции R и φ и пока не несут никакой информации. (Они представляют собой просто определение R и φ через напряжения. Вопрос о параметре ν в этих определениях рассмотрим ниже.) Аналогично два уравнения (1.8) вводят одну новую неизвестную $\dot{\Lambda}$. Однако в дальнейшем эти уравнения будут играть существенную роль, так как новые переменные R , φ и $\dot{\Lambda}$ имеют ясный механический смысл и могут быть использованы при выводе замыкающих уравнений.

Основное замыкающее уравнение, которое обычно используется в механике сыпучей среды, следует из гипотезы о том, что весь материал находится в некотором предельном состоянии (т. е. в каждой точке принудительно ставится условие типа Кулона). В математической модели эта гипотеза приводит к уравнению, в котором фигурируют только напряжения. Указанное предположение является наиболее сильным и в общем случае представляется наименее оправданным. К такому выводу приводит анализ экспериментов [6, 51, 59] (здесь не обсуждается ситуация, когда гипотезу о предельном состоянии в каждой точке можно принять только для оценок действительного процесса деформирования).

Уравнение, заменяющее условие предельного состояния, запишем пока символически в виде

$$I = 0 \quad (3.4)$$

Определяющие соотношения должны быть дополнены уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \quad (3.5)$$

где X_i — объемные силы, и условием совместности скоростей деформаций. Если деформациями твердых частиц среды пренебречь, то условие совместности обеспечивается следующими соотношениями:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad (3.6)$$

где v_1, v_2 — осредненное гладкое поле скоростей. Система (1.9), (2.1), (3.1), (3.4)—(3.6) замкнута, если угол ν известен. Итак, если деформациями твердых частиц можно пренебречь, то с точностью до уравнения (3.4) и выбора параметра ν задачу построения модели в рамках принятых гипотез можно было бы считать решенной. Однако наличие деформаций частиц (будем считать, что они целиком обратимы) имеет принципиальное значение как с механической точки зрения (заранее неизвестно, будут ли пластические деформации преобладать над упругими), так и с математической, так как учет упругих деформаций влияет на тип системы, постановку краевых задач и устойчивость решений. В первом приближении примем, что упругие деформации ε_{ij}^e связаны с напряжениями законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{22}^e &= \frac{1}{G} \cdot \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \quad \varepsilon_{12}^e = \sigma_{12}/2G, \\ \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e &= \frac{1}{K} \cdot \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где G, K — эффективные модули сдвига и объемного сжатия.

Введение упругих деформаций влечет за собой одно осложнение, связанное с тем обстоятельством, что совместность имеет место только для суммы

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{11}^e = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^e = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \dot{\varepsilon}_{12}^p + \dot{\varepsilon}_{12}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

Последнее означает, что в уравнениях должны фигурировать не сами упругие деформации, а их скорости, а следовательно, и скорости напряжений. Поэтому три уравнения (3.7), продифференцированные по t вводят в систему не три, а шесть новых неизвестных $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^e$. Два из недостающих уравнений получаются дифференцированием системы (3.5).

Следовательно, введение упругих деформаций приводит к тому, что число неизвестных становится на единицу больше числа уравнений. Аналогичная ситуация возникает и в случае идеального упругопластического тела.

Ход дальнейших построений удобнее проиллюстрировать на этой более простой модели. Для идеально пластического тела $\nu \equiv 0$ и уравнение (3.4) имеет вид

$$I(\sigma_{ij}) - k = 0, \quad (3.8)$$

где I — заданная функция, k — постоянная материала. Ясно, что недостающее уравнение должно быть получено дифференцированием условия текучести (3.8). Умножим теперь все уравнения, в которых фигурируют скорости на Δt , и переобозначим $\sigma_{ij}\Delta t, \dots$ через $\Delta\sigma_{ij}, \dots$. Тогда указанная выше система будет замкнута относительно $\sigma_{ij}, \Delta\sigma_{ij}, \dots$. Пусть решение этой системы известно при $t = t_0$ и $t = t_0 + \Delta t$. Обозначим разности двух решений $\sigma_{ij}(t_0 + \Delta t) - \sigma_{ij}(t_0)$ через $\delta\sigma_{ij}$. Структура замкнутой системы и граничных условий

такова, что решение полной системы $\Delta\sigma_{ij}$ при $t = t_0$ будет совпадать с разностью решений $\delta\sigma_{ij}$. Предположим теперь, что при $t = 0$ распределение напряжений известно. Тогда подсистема относительно приращений будет замкнута. Определяя ее решение при $t = 0$ и прибавляя $\Delta\sigma_{ij}(t = 0)$ к известному распределению $\sigma_{ij}(t = 0)$, получим, очевидно, распределение напряжений при $t = \Delta t$. Таким образом можно получить решение полной системы при всех t .

Аналогично поступим и с уравнениями сыпучей среды. Отметим, что уравнение (3.8) в подсистеме относительно приращений не фигурирует. Поэтому в модели сыпучей среды достаточно сформулировать только „продифференцированное“ уравнение (3.4).

Рассмотрим требования к этому уравнению, которые вытекают из механических свойств среды. Прежде всего отметим, что в общем случае нельзя принудительно ставить условие активного нагружения каждого элементарного объема деформируемой массы. Вопрос об областях активного нагружения и разгрузки должен рассматриваться в процессе решения краевой задачи. Поэтому в описании необходимо предусмотреть возможную разгрузку. Естественный критерий разгрузки — $\varphi \cdot \Delta\varphi < 0$. Следовательно, при $\varphi \cdot \Delta\varphi < 0$ приращение проскальзывания должно отсутствовать ($\Delta\Lambda = 0$). Если внутреннему трению среды приписывать те же свойства, что и внешнему трению слагающих ее частиц, то получим следующее соотношение $\Delta\varphi \div \Delta\Lambda$: пока $|\varphi| < \varphi^*$ $\Delta\Lambda = 0$, при $|\varphi| = \varphi^*$ и активном нагружении $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\Lambda$ — не определено.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Для регулярных упаковок угол φ определяется через напряжения по формулам (2.1) и постоянен внутри элементарного объема. Для действительной нерегулярной упаковки угол φ в пределах элемента будет уже переменным. Поэтому даже при малых значениях $|\tau|/|\sigma|$ могут найтись контакты, на которых φ достигает предельного значения. В этих точках начнутся проскальзывания, которые дадут определенный вклад в общую пластическую деформацию элементарного объема. Подобные проскальзывания будут ограниченными либо вследствие изменения угла ν , либо вследствие кинематических ограничений со стороны окружающих частиц. Таким образом, нерегулярность упаковки может привести к постепенному накоплению пластической деформации. Этот эффект можно описать, если явно учесть переменность ν в пределах элементарного объема (в частности, используя статистическое описание). Однако уже сейчас без усложнения всех построений эффект нерегулярности упаковки можно учесть феноменологически. Предположим, что $|\Delta\Lambda|$ является некоторой неубывающей функцией $|\varphi|$ ($\Delta\Lambda\Delta\varphi \geq 0$). Причем график этой функции либо асимптотически стремится к прямой $|\varphi| = \varphi^*$, либо сопрягается с этой прямой. Отметим, что выбор $\Delta\varphi$ в качестве аргумента означает, что приращения сдвигов определяются не самими напряжениями, а только их безразмерными отношениями. Такой выбор аргумента отвечает сущности внутреннего трения. Случай $\sigma_{ij} \rightarrow 0$ к парадоксу не приводит (тем более эта ситуация при решении реальных краевых задач значения не имеет).

Можно сформулировать несколько вариантов зависимости $\Delta\Lambda \div \Delta\varphi$, которые с механической точки зрения будут практически эквивалентными. Однако в математическом отношении эти варианты могут существенно различаться. Так, наличие изломов на графике $\Delta\Lambda \div \Delta\varphi$ приводит к проблеме определения неизвестных границ, возможная регуляризация (сглаживание изломов) приводит к существенной нелинейности в системе относительно приращений и т. д. Поэтому окончательный выбор варианта замыкающего уравне-

ния должен определяться спецификой конкретной задачи и соображениями математического характера. Остановимся на кусочно-линейном варианте:

$$\Delta\Lambda - \eta \frac{\Delta\varphi + |\Delta\varphi|}{2} = 0. \quad (3.9)$$

Предполагается, что угол θ выбран так, что $\varphi \geq 0$. Если $\Delta\varphi < 0$ (разгрузка, $\varphi > 0$), то $\Delta\Lambda = 0$, при $\Delta\varphi \geq 0$ $\Delta\Lambda = \eta\Delta\varphi$. Коэффициент η представляет собой известную функцию, зависящую от решения на предыдущем шаге. Причем при $\varphi \rightarrow \varphi^* \eta \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь вопрос об угле дилатансии ν . Предположим, что угол ν зависит только от величины проскальзывания. Если эта функция гладкая, то

$$\Delta\nu = \xi\Delta\Lambda, \quad (3.10)$$

где ξ — известный коэффициент. Отметим, что в определенных ситуациях функция ν может быть разрывной. Например, сдвиг в рыхлом структурно неустойчивом материале приводит к резкому уплотнению и скачкообразному изменению ν . Эту ситуацию можно описать уравнением (3.10), если разрыв сгладить. Аналогично можно рассмотреть более сложные случаи, когда характеристики дилатансии зависят от ориентации направления сдвига относительно материального объема и другим параметров.

Полученные выше соотношения приводят к замкнутой системе уравнений относительно следующих 19 неизвестных:

$$\Delta\sigma_{ij}, \Delta\tau, \Delta\varphi, \Delta R, \Delta\varepsilon_{ij}^p, \Delta\varepsilon_{ij}^e, \Delta\varepsilon^p, \Delta\gamma^p, \Delta\Lambda, \Delta u_i, \Delta\nu.$$

4. Замкнутая система уравнений. Преобразуем уравнения к системе, в которой фигурируют только напряжения и смещения. Снимем ограничение $\vartheta \equiv \pi/4$ (п. 3) и будем считать $\vartheta \equiv \text{const}$. Это позволит изотропную модель включить в более широкий класс моделей. Возможно дальнейшее обобщение на случай, когда соотношение масштабов $l_1/l_2 = \text{tg } \vartheta$ в процессе деформирования меняется. Запишем уравнение (3.9) в виде

$$\Delta\Lambda = \eta_s \Delta\varphi, \quad (4.1)$$

где

$$\eta_s = \begin{cases} \eta, & 0 \leq \eta \leq \infty \text{ при нагрузке,} \\ 0 & \text{при разгрузке.} \end{cases}$$

Здесь и ниже индекс s указывает на зависимость от знака определенных выражений. Через φ_e (рис. 4.20) обозначен предел упругости (при $0 \leq \varphi \leq \varphi_e$ $\eta \equiv 0$), причем случай $\varphi_e = 0$ не исключен. Из (2.1) следует, что

$$\Delta \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \right) \Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \right) \Delta\nu. \quad (4.2)$$

Используя связи (3.10), (4.1), получим

$$\Delta\Lambda = h_s \Delta \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad \Delta\varphi = \frac{1}{d_s} \Delta \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (4.3)$$

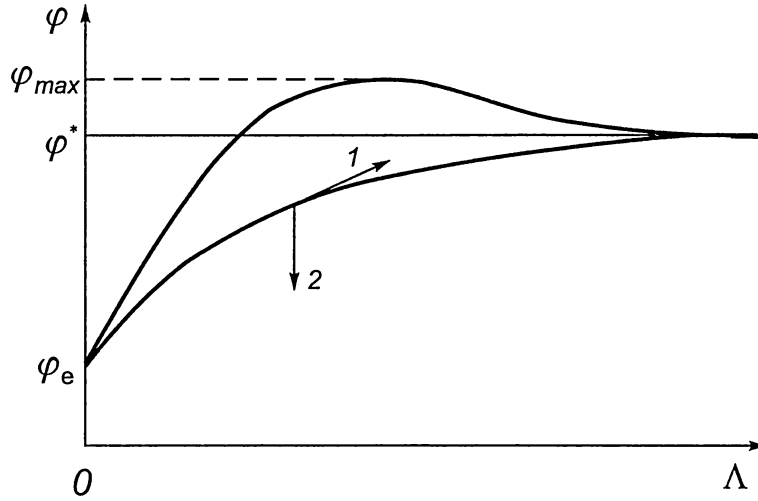


Рис. 4.20

где

$$d_s = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \right) + \xi \eta_s \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \right), \quad h_s = \frac{\eta_s}{d_s}. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.3) позволяют связать приращения пластических деформации и главных напряжений. Последние определяются как разности главных напряжений, действующих, вообще говоря, на различных площадках (в общем случае нагружение происходит с поворотом осей), например,

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22}}{2} + \frac{\Delta \sigma_{11} - \Delta \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \\ + \Delta \sigma_{12} \sin 2\theta + [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta] \Delta \theta.$$

В силу определения (3.3) последнее слагаемое равно нулю (главные напряжения экстремальны). Поэтому

$$\Delta \sigma_1 = \Delta \sigma'_{11}, \quad \Delta \sigma_2 = \Delta \sigma'_{22}, \quad \Delta s = \Delta \sigma'_{12}, \quad (4.5)$$

где штрихами отмечены компоненты в системе Oy_1y_2 (см. рис. 4.17). Из (1.8), (3.7) и (4.3) следует:

$$\Delta \varepsilon'_{11} = \left(\frac{1}{E} - h_s \frac{\sin \psi}{\cos \vartheta} \frac{1}{\sigma_2} \right) \Delta \sigma_1 + \left(-\frac{\nu_e}{E} + h_s \frac{\sin \psi}{\cos \vartheta} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \Delta \sigma_2, \\ \Delta \varepsilon'_{22} = \left(-\frac{\nu_e}{E} + h_s \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \frac{1}{\sigma_2} \right) \Delta \sigma_1 + \left(\frac{1}{E} - h_s \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \Delta \sigma_2, \\ \Delta \varepsilon'_{12} = \frac{1 + \nu_e}{E} \Delta s. \quad (4.6)$$

Здесь закон Гука использован в следующей форме:

$$\Delta \varepsilon_{11}^e = \frac{1}{E}(\Delta \sigma_{11} - \nu_e \Delta \sigma_{22}), \quad \Delta \varepsilon_{22}^e = \frac{1}{E}(\Delta \sigma_{22} - \nu_e \Delta \sigma_{11}),$$

$$\Delta \varepsilon_{12}^e = \frac{1 + \nu_e}{E} \Delta \sigma_{12}.$$

Если $\Delta \varepsilon_{33}^e = 0$ и через G_3 , E_3 , k_3 , ν_3 обозначены модули сдвига, упругости коэффициенты объемного сжатия и Пуассона, как они обычно определяются в случае трехмерного деформирования, то

$$E = \frac{E_3}{1 - \nu_3}, \quad \nu_e = \frac{\nu_3}{1 - \nu_3}, \quad G = G_3, \quad K = \frac{1}{2k_3(1 + \nu_3)}.$$

Используя формулы тензорного проектирования и соотношения (4.5), (4.6), окончательно получим:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_2} + \Delta X_1 = 0, \quad \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{22}}{\partial x_2} + \Delta X_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} = a_{11} \Delta \sigma_{11} + a_{12} \Delta \sigma_{22} + a_{13} \Delta \sigma_{12}, \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} = a_{21} \Delta \sigma_{11} + a_{22} \Delta \sigma_{22} + a_{23} \Delta \sigma_{12},$$

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} = a_{31} \Delta \sigma_{11} + a_{32} \Delta \sigma_{22} + a_{33} \Delta \sigma_{12}, \quad (4.7)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E} \{1 + H_s(\tau + \sigma \cos 2\theta) [\cos(\psi + \vartheta) - \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta]\},$$

$$a_{12} = \frac{1}{E} \{-\nu_e + H_s(\tau - \sigma \cos 2\theta) [\cos(\psi + \vartheta) - \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta]\},$$

$$a_{13} = \frac{2}{E} H_s \sigma \cdot \sin 2\theta [\cos(\psi + \vartheta) - \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta],$$

$$a_{21} = \frac{1}{E} \{-\nu_e + H_s(\tau + \sigma \cos 2\theta) [\cos(\psi + \vartheta) + \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta]\},$$

$$a_{22} = \frac{1}{E} \{1 + H_s(\tau - \sigma \cos 2\theta) [\cos(\psi + \vartheta) + \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta]\},$$

$$a_{23} = \frac{2}{E} H_s \sigma \cdot \sin 2\theta [\cos(\psi + \vartheta) + \cos(\psi - \vartheta) \cos 2\theta],$$

$$a_{31} = -\frac{2}{E} H_s(\tau + \sigma \cos 2\theta) \cos(\psi - \vartheta) \sin 2\theta, \quad (4.8)$$

$$a_{32} = -\frac{2}{E} H_s(\tau - \sigma \cos 2\theta) \cos(\psi - \vartheta) \sin 2\theta,$$

$$a_{33} = \frac{2}{E} [(1 + \nu_e) - 2H_s \sigma \cos(\psi - \vartheta) \sin^2 2\theta],$$

$$H_s = E \frac{h_s}{\sigma_2^2 \cdot \sin 2\vartheta}.$$

Уравнения, разрешенные относительно напряжений, имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{11} &= b_{11}\Delta\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{13}\Delta\varepsilon_{12}, \\ \Delta\sigma_{22} &= b_{21}\Delta\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{23}\Delta\varepsilon_{12}, \\ \Delta\sigma_{12} &= b_{31}\Delta\varepsilon_{11} + b_{32}\Delta\varepsilon_{22} + b_{33}\Delta\varepsilon_{12},\end{aligned}\tag{4.9}$$

где

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1+\nu_e}{2} + \frac{1-\nu_e}{2} \cos^2 2\theta + H_s(-\sigma + \tau \cos 2\theta) [\cos(\psi - \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} + \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin^2 2\theta, \\ b_{12} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1+\nu_e}{2} - \frac{1-\nu_e}{2} \cos^2 2\theta + H_s(-\sigma + \tau \cos 2\theta) [\cos(\psi - \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} - \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin^2 2\theta, \\ b_{13} &= \frac{2}{D} \left[\frac{1-\nu_e}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta + H_s(-\sigma + \tau \cos 2\theta) \cos(\psi + \vartheta) \sin 2\theta \right] - \\ &\quad - \frac{E}{1+\nu_e} \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta, \\ b_{21} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1+\nu_e}{2} - \frac{1-\nu_e}{2} \cos^2 2\theta - H_s(\sigma + \tau \cos 2\theta) [\cos(\psi - \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} - \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin^2 2\theta, \\ b_{22} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1+\nu_e}{2} + \frac{1-\nu_e}{2} \cos^2 2\theta - H_s(\sigma + \tau \cos 2\theta) [\cos(\psi - \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} + \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin^2 2\theta, \\ b_{23} &= \frac{2}{D} \left[-\frac{1-\nu_e}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta - H_s(\sigma + \tau \cos 2\theta) \cos(\psi + \vartheta) \sin 2\theta \right] + \\ &\quad + \frac{E}{1+\nu_e} \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
b_{31} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1-\nu_e}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta + H_s \tau \sin 2\theta [\cos(\psi - \vartheta) + \right. \\
&\quad \left. + \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} - \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta, \\
b_{32} &= \frac{1}{D} \left\{ -\frac{1-\nu_e}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta + H_s \tau \cdot \sin 2\theta [\cos(\psi - \vartheta) - \right. \\
&\quad \left. - \cos(\psi + \vartheta) \cos 2\theta] \right\} + \frac{E}{2(1+\nu_e)} \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta, \\
b_{33} &= \frac{2}{D} \left[\frac{1-\nu_e}{2} \sin^2 2\theta + H_s \cdot \tau \sin^2 2\theta \cdot \cos(\psi + \vartheta) \right] + \frac{E}{1+\nu_e} \cos^2 2\theta, \\
D &= \frac{1+\nu_e}{E} \left\{ (1-\nu_e) + 2H_s \left[\tau \cdot \cos(\psi + \vartheta) - \frac{1-\nu_e}{1+\nu_e} \sigma \cdot \cos(\psi - \vartheta) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

В несколько иной форме выражения для коэффициентов (4.10) (при $\vartheta = \pi/4$) приведены в [41]. Если $\vartheta \neq \pi/4$, то в выражениях [41] необходимо заменить $\sin \nu$ на $\cos(\psi + \vartheta)$, $\cos \nu$ на $\cos(\psi - \vartheta)$. Часто удобно использовать криволинейную ортогональную систему координат λ_1, λ_2 . Обозначим через κ угол между касательной к линии λ_1 и осью Ox_1 (рис. 4.21). Функция $\kappa(x_1, x_2)$ однозначно (с точностью до параметризации) определяет криволинейные координаты. В общем случае невозможно ввести координаты так, чтобы λ_i представляли собой длины дуг L_i вдоль координатных линий. Пусть, как и прежде,

$$g_1 = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}, \quad g_2 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial g_1}{\partial \lambda_2} = -g_2 \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \lambda_1} = g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda_2}. \quad (4.11)$$

Наряду с заменой независимых переменных сделаем естественную замену искоемых функций. Пусть u_i^0, X_i^0 — проекции векторов смещений и объемных сил на касательные к линиям λ_i , $\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0$, напряжения и деформации элемента, выделенного сеткой λ_i . В этих переменных система (4.7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \sigma_{11}^0}{g_1 \partial \lambda_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{12}^0}{g_2 \partial \lambda_2} - 2 \Delta \sigma_{12}^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + (\Delta \sigma_{11}^0 - \Delta \sigma_{22}^0) \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} + \Delta X_1^0 &= 0, \\
\frac{\partial \Delta \sigma_{12}^0}{g_1 \partial \lambda_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{22}^0}{g_1 \partial \lambda_2} + 2 \Delta \sigma_{12}^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} + (\Delta \sigma_{11}^0 - \Delta \sigma_{22}^0) \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} + \Delta X_2^0 &= 0, \\
\Delta \varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial \Delta u_1^0}{g_1 \partial \lambda_1} - \Delta u_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} &= a_{11}^0 \Delta \sigma_{11}^0 + a_{12}^0 \Delta \sigma_{22}^0 + a_{13}^0 \Delta \sigma_{12}^0,
\end{aligned}$$

$$\Delta \varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial \Delta u_2^0}{g_2 \partial \lambda_2} + \Delta u_1^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} = a_{21}^0 \Delta \sigma_{11}^0 + a_{22}^0 \Delta \sigma_{22}^0 + a_{23}^0 \Delta \sigma_{12}^0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} 2\Delta \varepsilon_{12}^0 &= \left[\frac{\partial \Delta u_1^0}{g_2 \partial \lambda_2} + \frac{\partial \Delta u_2^0}{g_1 \partial \lambda_1} + \left(\Delta u_1^0 \frac{\partial \kappa}{g_1 \partial \lambda_1} - \Delta u_2^0 \frac{\partial \kappa}{g_2 \partial \lambda_2} \right) \right] = \\ &= a_{31}^0 \Delta \sigma_{11}^0 + a_{32}^0 \Delta \sigma_{22}^0 + a_{33}^0 \Delta \sigma_{12}^0. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов a_{kl}^0 (индексы $k, l = 1, 2, 3$) совпадают с правыми частями (4.8), если в них θ заменить на $\theta^0 = \theta - \kappa$.

5. Диссипация энергии. Процесс деформирования сыпучей среды сопровождается проскальзыванием между ее частицами. Это приводит к необратимому рассеянию работы внешних сил. Вычислим скорость диссипации энергии в единице объема

$$W = \dot{\varepsilon}_{11}^p \sigma_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}^p \sigma_{22} + 2\varepsilon_{12}^p \sigma_{12}. \quad (5.1)$$

Рассмотрим сначала нетензорный вариант связей микро- и макронапряжений. Из формул (2.1), (2.5) следует, что

$$W = \frac{2\dot{\Lambda}R}{\sin 2\vartheta} \sin \varphi. \quad (5.2)$$

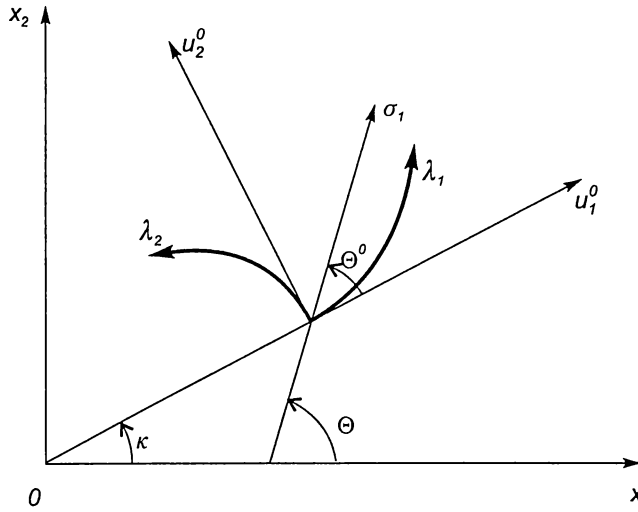


Рис. 4.21

Величина R неотрицательна (растягивающие напряжения на контактах невозможны), направление проскальзывания совпадает с направлением сдвигающего усилия ($\dot{\Lambda} \cdot \varphi \geq 0$), поэтому скорость диссипации энергии всегда неотрицательна.

Выражение для скорости диссипации (5.2), а следовательно, и модель деформирования обладают двумя замечательными свойствами: первое — скорость диссипации не зависит от дилатансионных характеристик среды, и второе — скорость диссипации определяется углом внутреннего трения φ и стремится к нулю при $\varphi \rightarrow 0$. Можно показать, что выражение (5.2), полученное из континуальной модели, совпадает с суммой скоростей диссипации энергии на отдельных контактах в физической дискретной модели.

Вычислим теперь скорость диссипации энергии для тензорного варианта (2.2)

$$W = 2\dot{\Lambda}R \frac{\sin(\varphi + \nu) - \sin 2\nu \cos(\varphi + \nu)}{\cos 2\nu}. \quad (5.3)$$

Здесь достаточно ограничиться случаем $\vartheta = \pi/4$. Формула (5.3) показывает, что скорость диссипации зависит от дилатансионных характеристик среды и при $\varphi \rightarrow 0$ к нулю не стремится. Более того, при $\nu > 0$, $\varphi \rightarrow 0$ скорость диссипации становится отрицательной. Таким образом, если раньше нетензорному варианту можно было отдать предпочтение, исходя только из требования последовательности построений и механических соображений, то теперь видно, что тензорный вариант вообще неприемлем и приводит к парадоксам.

6. Микровращения. В [9] (см. гл. 2) было обнаружено два режима дилатирования сыпучего материала: неустановившийся, когда деформирование сопровождается необратимым изменением упаковки частиц за счет разрушения дефектов структуры, и установившийся, когда разрушение дефектов прекращается и упаковка переходит в обратимое состояние. Наличие большого числа равномерно распределенных дефектов приводит к исходной неупорядоченной структуре, макросвойства которой можно считать однородными и изотропными. Это означает, что ориентация соответствующей эффективной регулярной упаковки частиц определяется направлением главных напряжений. При последующем деформировании упаковка становится более регулярной и, следовательно, ориентация соответствующей эффективной упаковки — более консервативной по отношению к изменениям направлений главных напряжений. Это приводит к тому, что проскальзывания на контактах из различных семейств могут быть неодинаковыми.

Рассмотрим кинематику деформирования. Мгновенное состояние эффективной упаковки характеризуется ориентацией векторов $\bar{\Xi}_i$, или углами ϑ_i , параметрами χ_i , определяющими направления касательных \bar{m}_i и нормалей \bar{n}_i к контактам скольжения, а также линейными параметрами s_i , l_i (после осреднения — их безразмерными комбинациями) (рис. 4.22, 4.23). Если частицы жесткие, то

$$\frac{D\bar{V}}{D\Xi_1} = \dot{\omega}\bar{e}_1 + \dot{\Lambda}_1\bar{m}_1, \quad \frac{D\bar{V}}{D\Xi_2} = -\dot{\omega}\bar{e}_2 + \dot{\Lambda}_2\bar{m}_2, \quad (6.1)$$

где $\dot{\Lambda}_i = 2\dot{\lambda}_i / s_i$, $\dot{\lambda}_i$ — скорости проскальзываний на соответствующих контактах, \bar{e}_i — орты к векторам $\bar{\Xi}_i$, $\dot{\omega}$ — скорость собственного вращения частиц (микровращение). Используя (1.7), (6.1) и правило осреднения п. 1, получим следующие связи компонент гладкого осредненного поля скоростей (макропеременных v_i) с внутренними кинематическими переменными $\dot{\Lambda}_i$, $\dot{\omega}$:

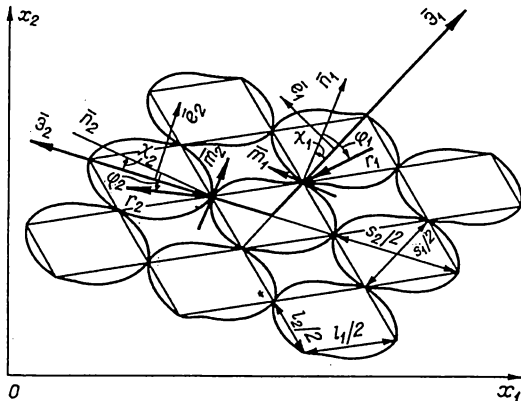


Рис. 4.22

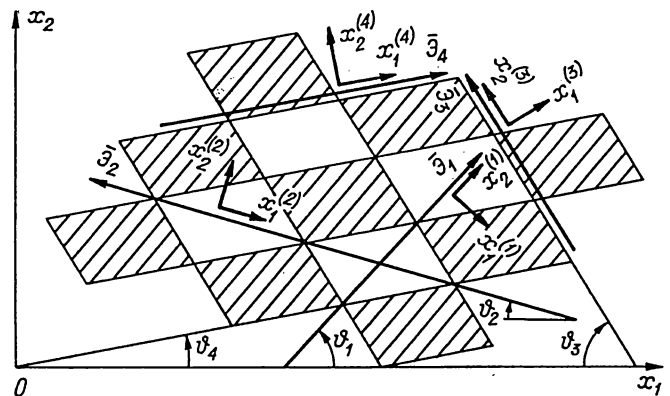


Рис. 4.23

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \dot{\varepsilon}_{11}^e - \frac{\dot{\Lambda}_1 \sin(\vartheta_1 + \chi_1) \sin \vartheta_2 + \dot{\Lambda}_2 \sin(\vartheta_2 + \chi_2) \sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= \dot{\varepsilon}_{22}^e + \frac{\dot{\Lambda}_1 \cos(\vartheta_1 + \chi_1) \cos \vartheta_2 + \dot{\Lambda}_2 \cos(\vartheta_2 + \chi_2) \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= \dot{\varepsilon}_{12}^e - \dot{\omega} + \frac{-\dot{\Lambda}_1 \sin(\vartheta_1 + \chi_1) \cos \vartheta_2 + \dot{\Lambda}_2 \sin(\vartheta_2 + \chi_2) \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= \dot{\varepsilon}_{12}^e + \dot{\omega} + \frac{\dot{\Lambda}_1 \cos(\vartheta_1 + \chi_1) \sin \vartheta_2 - \dot{\Lambda}_2 \cos(\vartheta_2 + \chi_2) \sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Отсюда

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p = -(\dot{\Lambda}_1 \sin \chi_1 + \dot{\Lambda}_2 \sin \chi_2) + \operatorname{ctg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)(\dot{\Lambda}_1 \cos \chi_1 + \dot{\Lambda}_2 \cos \chi_2).$$

Последнее соотношение показывает механизм изменения объема вследствие скольжения по контактам между частицами. Изменение объема складывается из двух частей: в силу изменения расстояний между центрами частиц, если $\chi_i \neq 0$, $\chi_2 \neq 0$, и в силу неортогональности векторов $\bar{\Theta}_1$, $\bar{\Theta}_2$. Например, для упаковки шаров $\chi_1 \equiv \chi_2 \equiv 0$ и расстояние между их центрами не меняется. Поэтому изменение объема связано только с неортогональностью $\bar{\Theta}_1$, $\bar{\Theta}_2$.

Из (6.2) также следует, что

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} (\dot{\Lambda}_1 \cos \chi_1 - \dot{\Lambda}_2 \cos \chi_2) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) (\dot{\Lambda}_1 \sin \chi_1 - \dot{\Lambda}_2 \sin \chi_2).$$

Если контакты скольжения симметричны ($\chi_1 \equiv \chi_2$) и скорости проскальзываний на них одинаковы ($\dot{\Lambda}_1 = \dot{\Lambda}_2$), то частицы испытывают то же вращение, что и макрообъем. Причем этот факт не зависит от того, будут направления $\bar{\Theta}_1$, $\bar{\Theta}_2$ ортогональными или нет. Если же в поведении площадок из различных семейств есть несимметрия, то $\dot{\omega} \neq 1/2(\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2)$. Верно также и обратное: независимость микровращения от ротора осредненного поля скоростей позволяет описать различие в проскальзываниях по контактам из различных семейств. В качестве внутренней переменной микровращение рассматривалось во многих работах, начиная с [210]. Для описания независимости проскальзываний на площадках скольжения из различных семейств независимое вращение вводилось в [20, 22].

Пусть θ_v угол между главным направлением тензора скоростей пластических деформаций и осью Ox_1

$$\operatorname{tg} 2\theta_v = \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^p}{\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p}. \tag{6.3}$$

Тогда

$$\dot{\gamma}^p = -(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p) \cos 2\theta_v - 2\dot{\varepsilon}_{12}^p \sin 2\theta_v,$$

$$2\dot{\varepsilon}_{12}^p = -\dot{\gamma}^p \sin 2\theta_v, \quad \dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p = -\dot{\gamma}^p \cos 2\theta_v, \quad (6.4)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_v = -\frac{\dot{\Lambda}_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \chi_1) + \dot{\Lambda}_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \chi_2)}{\dot{\Lambda}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \chi_1) + \dot{\Lambda}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \chi_2)},$$

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\sqrt{\dot{\Lambda}_1^2 + 2\dot{\Lambda}_1 \dot{\Lambda}_2 \cos(\chi_1 + \chi_2) + \dot{\Lambda}_2^2}}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Если $\chi_1 + \chi_2 \neq 0$, то

$$\dot{\Lambda}_1 = -\frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin(\chi_1 + \chi_2)} [(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \chi_2) + 2\dot{\varepsilon}_{12}^p \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \chi_2)], \quad (6.5)$$

$$\dot{\Lambda}_2 = \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin(\chi_1 + \chi_2)} [(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \chi_1) + 2\dot{\varepsilon}_{12}^p \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \chi_1)]$$

и дилатансионное соотношение можно представить либо в виде

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p = H_1 \cdot (\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p) + 2H_2 \cdot \dot{\varepsilon}_{12}^p, \quad (6.6)$$

где

$$H_1 = -\frac{\sin \chi_1 \cos(2\vartheta_2 + \chi_2) + \sin \chi_2 \cos(2\vartheta_1 + \chi_1)}{\sin(\chi_1 + \chi_2)},$$

$$H_2 = \frac{\sin \chi_1 \sin(2\vartheta_2 + \chi_2) - \sin \chi_2 \sin(2\vartheta_1 + \chi_1)}{\sin(\chi_1 + \chi_2)},$$

либо в классической форме, как зависимость необратимого изменения объема от скорости наибольшего пластического сдвига

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\sin \chi_1 \cos(2\vartheta_2 + \chi_2 + 2\theta_v) + \sin \chi_2 \cos(2\vartheta_1 + \chi_1 - 2\theta_v)}{\sin(\chi_1 + \chi_2)} \dot{\gamma}^p. \quad (6.7)$$

Случай $\chi_1 + \chi_2 = 0$ является особым. Если $\chi_1 = \chi$, $\chi_2 = -\chi$, то ориентация упаковки полностью определяет главные направления тензора скоростей пластических деформаций: $\operatorname{tg} 2\theta_v = \operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \chi)$. При этом дилатансионное соотношение в форме (6.7) не представляется. Это связано с тем, что скорость изменения объема зависит от обеих комбинаций $(\dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2)$, $(\dot{\Lambda}_1 - \dot{\Lambda}_2)$, а скорость пластического сдвига — только от одной $(\dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2)$:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\Lambda}_1 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \chi) + \dot{\Lambda}_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \chi)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (6.8)$$

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Из условий равновесия будет видно, что ситуация, когда $\dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2 = 0$, $\dot{\Lambda}_1 - \dot{\Lambda}_2 \neq 0$ и, следовательно, $\dot{\gamma}^p = 0$, $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ невозможна. Если $\chi = 0$ (упаковка шаров), то (6.8) можно снова представить в форме (6.7):

$$\dot{\varepsilon}^P = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cdot \dot{\gamma}^P. \quad (6.9)$$

Последнее равенство аналогично уравнению дилатансии [154].

Перейдем к вопросу о напряжениях. Обозначим через r_1, r_2 усилия, которые развиваются на контактах между частицами, через φ_1, φ_2 углы, на которые отклоняются направления усилий от нормали к контакту (см. рис. 4.22). В плоском случае можно указать 4 направления площадок, которые по существу проходят только по поровому пространству и контактам между частицами (см. рис. 4.23). Для таких площадок вектор общего усилия, действующего со стороны частиц по одному из ее сторон, через заданные усилия на контактах определяется непосредственно. Если длина площадки достаточно велика, то общее усилие, отнесенное к длине (микронапряжение), от длины площадки зависеть не будет. Введем следующее правило осреднения напряжений: тензор напряжений в континуальной модели должен быть таким, чтобы компоненты напряжений, вычисленные по правилам тензорного проектирования на площадках, пересекающих контакты между частицами дискретной структуры, совпадали с соответствующими микронапряжениями. Указанное правило приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= -\frac{2r_2}{s_1} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \chi_2 - \varphi_2), \quad \sigma_{12}^{(1)} = -\frac{2r_2}{s_1} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \chi_2 - \varphi_2), \\ \sigma_{22}^{(2)} &= -\frac{2r_1}{s_2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \chi_1 - \varphi_1), \quad \sigma_{21}^{(2)} = -\frac{2r_1}{s_2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \chi_1 - \varphi_1), \\ \sigma_{11}^{(3)} &= -\frac{r_1}{l_2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_3 + \chi_1 - \varphi_1) - \frac{r_2}{l_2} \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2 - \chi_2 + \varphi_2), \\ \sigma_{12}^{(3)} &= \frac{r_1}{l_2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_3 + \chi_1 - \varphi_1) + \frac{r_2}{l_2} \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2 - \chi_2 + \varphi_2), \\ \sigma_{22}^{(4)} &= -\frac{r_1}{l_1} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_4 + \chi_1 - \varphi_1) - \frac{r_2}{l_1} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_4 + \chi_2 - \varphi_2), \\ \sigma_{21}^{(4)} &= -\frac{r_1}{l_1} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_4 + \chi_1 - \varphi_1) + \frac{r_2}{l_1} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_4 + \chi_2 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Верхний индекс указывает на соответствующую локальную систему координат (см. рис. 4.23). Для определения тензора напряжений достаточно информации о микронапряжениях только на двух площадках. Дискретная же модель дает избыточную информацию для четырех площадок. При осреднении поля скоростей подобного несоответствия не возникало: информация, содержащаяся в дискретной модели о приращениях вдоль двух направлений, была необходимой и достаточной для построения единственного осредненного поля. Можно показать, что введенное правило осреднения дает однозначный результат и для напряжений. Формальное доказательство довольно громоздко и сводится к подстановке правых частей (6.10) в формулы тензорного проектирования, связывающие компоненты напряжений σ_{ij} в исходных координатах с различными вариантами $\sigma_{ij}^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, 2, 3, 4$. Если же исходить из механического смысла тензорного проектирования, то доказательство следует из условий равновесия треугольных элементов дискретной структуры со сторонами, направленными вдоль векторов $\vec{\Theta}_k$. Таким образом, принятый способ

осреднения напряжений является корректным. Более того, ниже будет показано, что он является и единственно возможным (конечно, только в рамках рассматриваемых построений).

Условие на моменты сил, действующих на частицу в дискретной структуре, имеет вид:

$$\frac{r_1}{s_2} \sin(\varphi_1 - \chi_1) = \frac{r_2}{s_1} \sin(\varphi_2 - \chi_2). \quad (6.11)$$

Легко показать, что это условие обеспечивает симметрию тензора континуальных напряжений. Формулы, аналогичные (6.2), для компонент континуальных напряжений в исходных координатах (макропеременных σ_{ij}) и усилий на контактах скольжения дискретной структуры (внутренних переменных r_i, φ_i), имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\frac{2r_1}{s_2} \cos^2 \vartheta_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \chi_1 - \varphi_1) + \frac{2r_2}{s_1} \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \chi_2 + \varphi_2)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\frac{2r_1}{s_2} \sin^2 \vartheta_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \chi_1 - \varphi_1) - \frac{2r_2}{s_1} \sin^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \chi_2 + \varphi_2)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \sigma_{12} &= \frac{-\frac{r_1}{s_2} \sin 2\vartheta_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \chi_1 - \varphi_1) + \frac{r_2}{s_1} \sin 2\vartheta_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \chi_2 - \varphi_2)}{\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Вычислим скорость диссипации энергии. Подстановка выражений (6.2), (6.12) и (6.11) в (5.1) приводит к следующему результату:

$$W = \frac{\frac{2r_1}{s_2} \sin \varphi_1 \cdot \dot{\Lambda}_1 + \frac{2r_2}{s_1} \sin \varphi_2 \cdot \dot{\Lambda}_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (6.13)$$

Можно показать, что величина W , полученная для континуальной модели, совпадает с суммой скоростей диссипации энергии на контактах между частицами в соответствующей дискретной упаковке частиц. Выражение (6.13) показывает, что скорость диссипации не зависит от дилатансионных характеристик среды и при увеличении гладкости контактов $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0$ стремится к нулю.

По-видимому, указанные два свойства следует принять как необходимые критерии адекватности любой математической модели сыпучей среды. Действительно, сыпучий материал можно рассматривать как определенный механизм для преобразования „активных“ усилий, действующих на участках границы, через которые идет приток энергии в материал, в „пассивные“ усилия, действующие на частях границы, через которые происходит отток энергии. В общем случае такой механизм часть энергии диссипирует и запасает, часть возвращает. Если исключить разрушение частиц и их пластическое смятие, то диссипация энергии будет зависеть только от работы, совершаемой на контактах скольжения, и не будет явно зависеть от ориентации и распределения контактов, т. е. от структуры

реальной упаковки. В свою очередь, дилатансионные свойства определяются только структурой и кинематикой проскальзываний (в реальной упаковке в плоскости, касательной к контакту, возможны различные направления скольжения) и от шероховатости контактов явно не зависят. Поэтому диссипация от дилатансионных свойств зависеть не должна. Для абсолютно гладких частиц диссипация должна отсутствовать независимо от всех остальных факторов, в том числе и дилатансионных характеристик среды.

В работах [25, 26] изложено дальнейшее развитие рассмотренной модели, в том числе и на случай геометрически нелинейных постановок краевых задач. Полученные результаты использовались также для построения моделей деформирования горных пород (см. главу 5 и [29—32]).

Глава 5. ГОРНЫЙ МАССИВ КАК СРЕДА С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ ЭНЕРГИИ

§ 5.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Моделирование в механике горных пород всегда предполагает выделение каких-то одних свойств породы и более-менее сознательное игнорирование других. Такой подход, как известно, является сильной стороной моделей, так как позволяет упростить исходную ситуацию и сделать ее обозримой. Свойства реальной горной породы довольно сложны. Они зависят от наличия и распределения трещин, расположения и взаимодействия структурных элементов, их микросвойств и др. На макроуровне все это проявляется в виде сцепления, внутреннего трения, дилатансии и, главное, приводит к существенной нелинейности в поведении. Дополнительные трудности вносит неголономность реакции. Например, если образец породы вначале сжать некоторой силой, и затем закрутить моментом, то результат будет, вообще говоря, другим, чем если образец вначале закрутить тем же моментом, а затем сжать той же силой. Мы здесь для моделирования выделим следующее свойство горной породы: способность аккумулировать упругую энергию на микроуровне, а затем возвращать ее на макроуровень. Благодаря ему отдельные области массива могут выступать как источники или стоки энергии.

Для такого подхода есть достаточные основания. Так, в работе [211] описан эффект последствия. Опыты [211] проводились следующим образом. Образцы пород цилиндрической формы помещались в камеру высокого гидростатического давления и затем нагружались осевым давлением вдоль оси цилиндра. После того как величина осевой необратимой деформации достигала определенного уровня (иногда 25%), осуществлялась полная разгрузка. Было установлено, что после разгрузки образцы приобретают следующее качество. С течением времени без какого-либо усилия извне их высота и диаметр увеличиваются, а будучи помещенными в динамометр без зазоров, они развивают определенные усилия как в осевом, так и в боковом направлениях. Ясно, что при этом образец совершает определенную работу. Причем последняя совершается за счет внутренних ресурсов образца, которые он приобрел ранее. И это, в общем, типичная ситуация. Например, хорошо известно, что образцы горной породы после извлечения их из массива и полной разгрузки сохраняют высокий уровень внутренних напряжений [212, 213]. Иногда этих напряжений достаточно для самопроизвольного разрушения образцов. Некоторые дополнительные факты и соответствующие ссылки приведены в работе [29]. Отметим также, что эффекты аккумулирования энергии присущи не только горным породам, но и ряду конструкционных материалов, обладающих внутренней структурой [214—216].

С механической точки зрения наличие объемов среды, которые могут выступать как источники энергии, существенно влияет на устойчивость деформирования и вообще на всю механику процесса. Надо сказать, что в природе существуют и некоторые другие явления с аналогичными свойствами. Например, считается, что глобальные циркуляции солнечной и земной атмосфер, некоторые океанические течения (Гольфстрим) протекают с отрицательной вязкостью, т. е. в них хаотическое движение частиц среды за счет разности температур преобразуются в направленное, осредненное движение среды [217].

Таким образом, в ряд основных качеств горной породы можно поставить ее способность аккумулировать энергию на микроуровне и при определенных условиях осуществлять ее перенос на макроуровень — уровень осредненных напряжений и скоростей.

В работе [29] для демонстрации этого свойства предложено рассматривать образец, составленный из пучка шероховатых стержней, стянутый упругой нитью. Если этот образец сжать и затем снять нагрузку, он останется довольно расплюснутым. При этом все внешние нагрузки будут отсутствовать, а внутренняя, аккумулированная энергия будет запасена в энергии растянутой нити. При определенных условиях аккумулированная энергия может стать доступной.

Теперь возникает очень простая идея. Коль скоро, указанная демонстрационная модель является физической, а не математической, то на нее можно посмотреть буквально как на физическую модель или, точнее, просто как на некоторый образец, свойства которого можно исследовать экспериментально. Причем эти исследования можно проводить безотносительно к горной породе или чему-либо еще, а затем уже посмотреть, в какой мере здесь можно говорить о моделировании именно горной породы.

Перейдем к описанию экспериментов. Рассмотрим серию опытов на одноосное сжатие [32]. Вначале в качестве структурных элементов образца использовались деревянные шестигранные карандаши, а в качестве упругой нити — обычная бытовая резина. Итак, брался набор карандашей и обтягивался упругой резиной с определенным начальным натяжением. Затем полученный образец помещался между двумя жесткими шероховатыми плитами, к которым прикладывалось давление. Нагружение осуществлялось на жестком винтовом прессе, который обеспечивал программу нагружения с контролируемой деформацией. Для визуального наблюдения за кинематикой деформирования торцевая часть образца раскрашивалась в черный и белый цвета (рис. 5.1, 5.2)

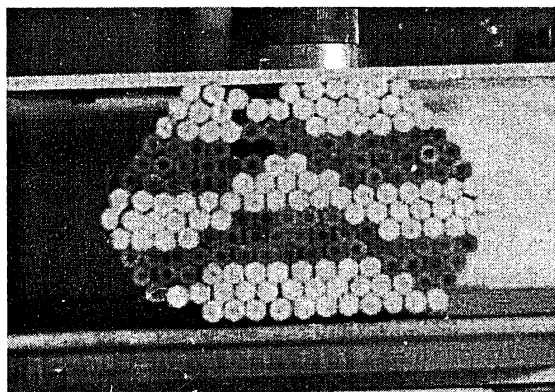


Рис. 5.1

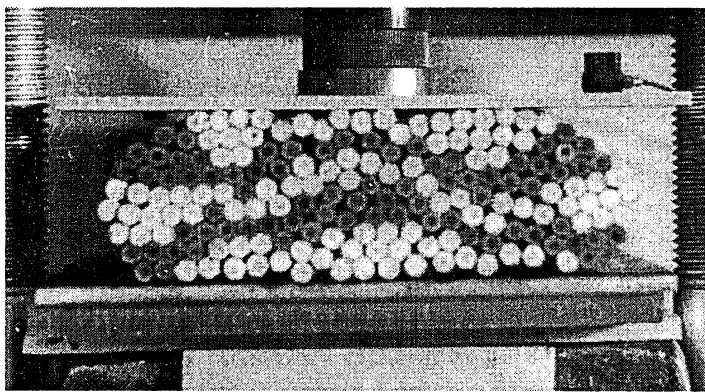


Рис. 5.2

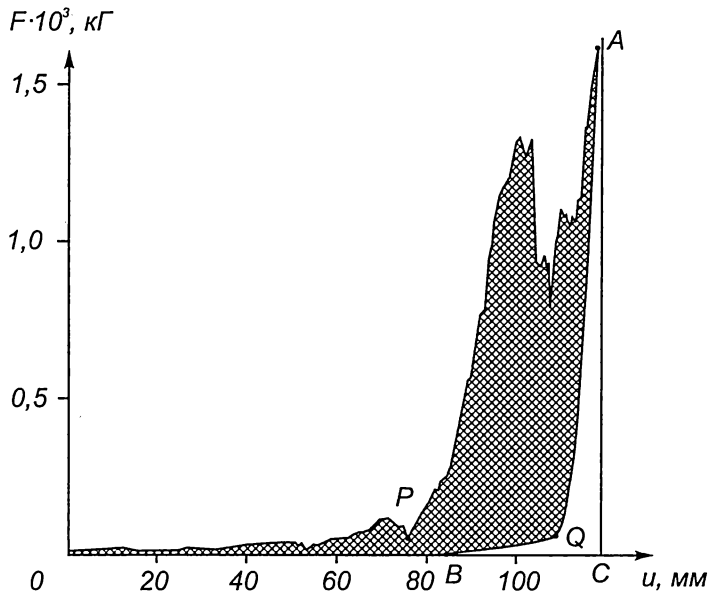


Рис. 5.3

В процессе нагружения измерялись сила F , с которой пресс давит на образец, и перемещение рабочей поверхности пресса u в направлении действия силы F . Результаты измерений выводились на самописец в виде диаграммы $F \sim u$ (рис. 5.3). Участок диаграммы OPA соответствует активному нагружению, участок AQB — разгрузке.

На начальной стадии нагружения (участок OP) деформирование происходит при малых значениях силы F , т. е. образец достаточно слабо сопротивляется нагрузке. Поведение на этом этапе определяется в основном исходной упаковкой структурных элементов образца и начальным натяжением упругой нити. Такое поведение наблю-

дается до тех пор пока натяжение не достигнет определенного уровня, достаточного для противостояния внешней нагрузке. Следует также отметить, что процесс деформирования на этом участке сопровождается слабым потрескиванием.

Наибольший интерес представляет следующий этап нагружения (участок PA диаграммы). Здесь деформирование протекает следующим образом. Визуально можно наблюдать, что сначала в образце зарождается трещина сдвига (см. рис. 5.1). Затем она развивается, а натяжение нити в силу дилатансии увеличивается. Это вызывает рост нагрузки. Затем наступает момент, когда трещина достигает своего максимального размера, и дальнейшее деформирование образца происходит скачкообразно. Трещина схлопывается и упаковка элементов меняется скачком. Этот перескок сопровождается резким звуком. На диаграмме ему соответствуют скачки разупрочнения на участке PA (ниспадающие ветви). Далее процессы образования трещины и последующей переупаковки внутренней структуры повторяются, но уже при больших уровнях сжимающих усилий. Анализ литературы [218, 219] показал, что подобные срывы на стадии активного нагружения присущи и реальным горным породам (перестройка внутренней структуры, микроразрушение и т. д.).

Следует отметить, что сам процесс образования и развития трещины протекает тоже не равномерно, а скачкообразно. Иными словами, скольжение между структурными элементами проходит через последовательность множества локальных срывов. (В целом такая же ситуация наблюдается и на стадии допредельного деформирования сыпучих сред, см. главу 9). На диаграммах срывы приводят к мелкому „дрожанию“ графиков $F \sim u$. Весь процесс сопровождается практически непрерывной акустической эмиссией. Такой режим деформирования возможен до тех пор пока общие проскальзывания на контактах не станут сопоставимыми с размерами структурных элементов. После этого происходит уже „нелокальный“ срыв и все повторяется снова.

Разгрузка образца (участок AQB) происходит без видимых скачков. На участке AQ разгружаются в основном структурные элементы (заметное падение усилия F при незначи-

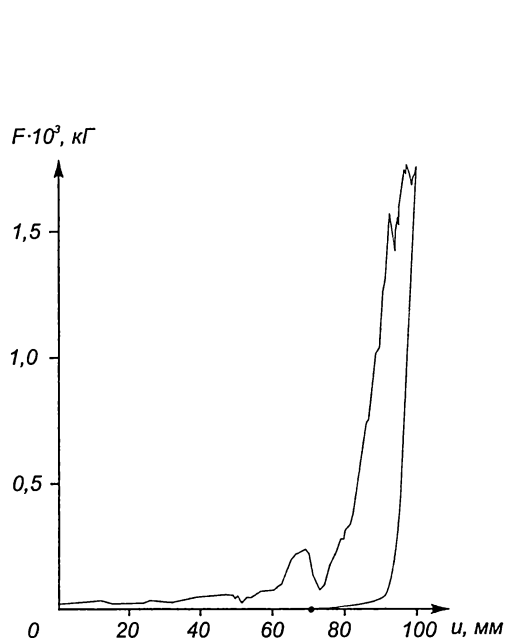


Рис. 5.4

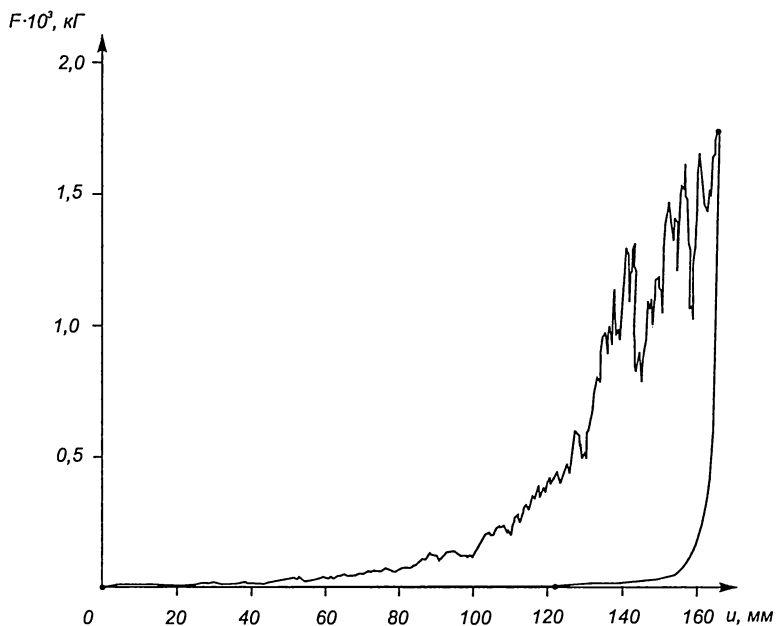


Рис. 5.5

тельном изменении перемещения u), а на участке QB происходит частичная разгрузка и упругой нити, стягивающей образец. Точка B диаграммы соответствует полному снятию всех внешних нагрузок.

Описанная выше картина деформирования является довольно типичной для широкого класса образцов. Эксперименты показали, что выбор начального натяжения нити оказывает заметное влияние лишь на „предварительный“ этап нагружения (участок OP диаграммы). Так, увеличение начального натяжения нити приводит к сокращению этого участка и наоборот. Выбор формы и размеров структурных элементов образца влияет на амплитуду скачков разупрочнения и период, через который эти скачки повторяются. Например, диаграмма $F \sim u$ (см. рис. 5.3) была получена при испытании образца из шестигранных деревянных карандашей, а в случае, когда образец был набран из смеси круглых и шестигранных карандашей, получилась диаграмма, изображенная на рис. 5.4. Из их сравнения видно, что во втором случае скачки разупрочнения происходят несколько чаще, тогда как в первом случае происходят реже, но при этом имеют большую амплитуду.

Проводились эксперименты также с тонкими металлическими спицами (рис. 5.5) и различными комбинациями карандашей и спиц (рис. 5.6). Качественная картина деформирования оставалась прежней.

Итак, пусть для некоторого элемента среды с внутренней структурой проведен замкнутый цикл „нагружение — разгрузка“. После полного снятия всех внешних нагрузок (точка B диаграммы на рис. 5.3) образец остается в равновесии. Однако это равновесие по отношению к конечным возмущениям неустойчиво: незначительного толчка достаточно, чтобы образец начал деформироваться в сторону исходного состояния. Причем это деформирование может носить как медленный, непрерывный, так и скачкообразный, динамический характер. Выделяемая при этом энергия существенно превышает энергию

самого „спускового“ толчка (иногда динамический скачок происходит вообще самопроизвольно через определенное время после разгрузки). Это означает, что образец возвращает часть аккумулированной энергии, запасенной им на стадии нагружения.

Проанализируем теперь статьи расхода полной энергии W (площадь OAC , см. рис. 5.3), затрачиваемой на деформирование образца. Полную энергию, как обычно, можно разделить на две части: упругую энергию W_e (площадь ACB), которая возвращается при разгрузке, и энергию „необратимых“ деформаций W_p (заштрихованная площадь OAB).

Проведенные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что энергия „неупругих“ деформаций W_p , в свою очередь, тоже состоит из двух частей: части W_d , которая действительно необратимо рассеивается на контактах, и части W_a , которая аккумулируется в образце в виде энергии растянутой нити и соответствующей упругой энергии элементов. Именно эта часть энергии W_a и высвобождается в образце при соответствующих условиях и приводит к его самопроизвольному деформированию даже после полного снятия всех внешних нагрузок.

Возникает естественный вопрос: какую долю от общей энергии W составляет ее аккумулированная часть W_a ? Для металлов (на примере дюралюминия), согласно [216], эта доля зависит от величины предшествующей пластической деформации и в некоторых случаях может достигать 50 %. Ясно, что в модельном образце величина W_a должна зависеть от формы и размеров его структурных элементов, а также от начального натяжения упругой нити. Можно дать следующие оценки.

Рассмотрим элементарную ячейку модельного образца, состоящую из трех круглых частиц, стянутых линейно-упругой нитью (рис. 5.7). Пусть начальное состояние соответствует углу $\alpha = \pi/3$, конечное — $\alpha = 0$. Примем, что частицы жесткие и в процессе деформирования запрещены их повороты вокруг своей оси. Это означает, что к каждому из структурных элементов приложен внешний момент, обеспечивающий отсутствие вращения. Эти моменты работы не совершают и поэтому в энергетический баланс не входят. Предположим также, что трение есть только на контактах между частицами, т. е. сама нить, а также нагружающие плиты скользят по частицам свободно. В такой постановке нетрудно подсчитать, что общая энергия, затрачиваемая на деформирование элементарной ячейки, равна

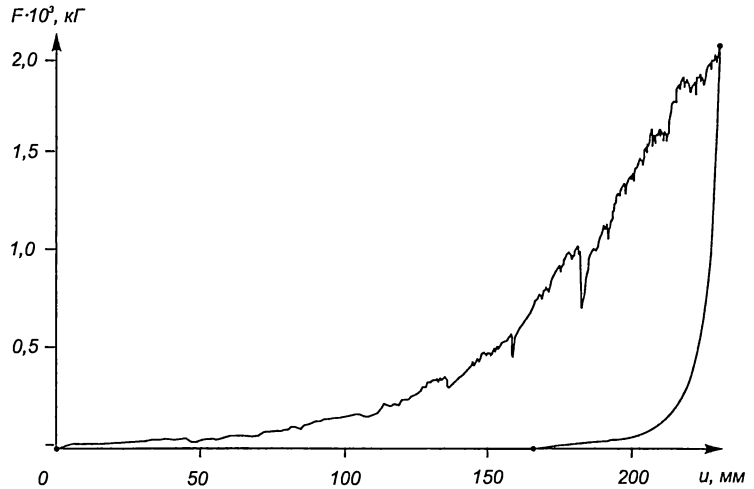


Рис. 5.6

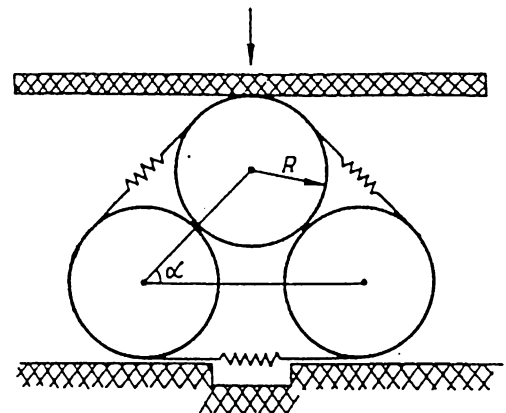


Рис. 5.7

$$W = -4kR^2 \cdot \int_{\pi/3}^0 \left(\frac{F_0}{kR} - 2 + 4 \cos \alpha \right) \cos \alpha \frac{\sin \alpha + (1 + \cos \alpha) \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} d\alpha,$$

где k — модуль упругости нити, стягивающей частицы, R — радиус частицы, F_0 — начальная сила натяжения нити (при $\alpha = \pi/3$ см. рис. 5.7), $\operatorname{tg} \varphi$ — коэффициент трения на контактах между частицами. Как уже отмечалось, энергия W состоит из двух частей: диссипированной и аккумулированной. В данном случае диссипированная часть W_d (энергия, затрачиваемая на преодоление трения) равна

$$W_d = -4kR^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \int_{\pi/3}^0 \left(\frac{F_0}{kR} - 2 + 4 \cos \alpha \right) \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} d\alpha.$$

В свою очередь, аккумулированная часть W_a представлена в виде растянутой нити, и она составляет

$$W_a = -4kR^2 \cdot \int_{\pi/3}^0 \left(\frac{F_0}{kR} - 2 + 4 \cos \alpha \right) \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Анализ полученных соотношений показал, что начальное натяжение упругой нити F_0 влияния на распределение энергии W между ее частями W_a и W_d практически не оказывает. Так, при изменении величины F_0 / kR от нуля и до бесконечности величина W_a / W увеличивается (а W_d / W соответственно уменьшается) на $2 \div 4\%$ в зависимости от угла трения φ . Основное влияние на долю запасаемой энергии W_a / W оказывает величина трения на контактах между частицами. Так, при $\varphi = 10^\circ$ отношение $W_a / W \approx 0,505$, т. е. аккумулируется $\sim 50\%$ от затрачиваемой энергии. В случае $\varphi = 20^\circ$ отношение $W_a / W \approx 0,285$, а при $\varphi = 25^\circ$ — $W_a / W \approx 0,204$. Таким образом, в данном элементарном объеме для доли аккумулируемой энергии за базовую можно принять цифру $\sim 30\%$ от общей энергии, затрачиваемой на его деформирование.

Таким образом:

1. Горная порода обладает свойством аккумулировать энергию на микроуровне и при определенных условиях отдавать ее на макроуровень. Это свойство можно поставить в ряд основных свойств, характерных для горной породы, таких как сцепление, внутреннее трение, дилатансия. Благодаря ему отдельные области горного массива могут выступать и в роли источников и стоков энергии.

2. В качестве элемента, моделирующего свойство аккумулирования энергии можно использовать образец, составленный из тонких шероховатых стержней, стянутых упругой резинкой. Одноосное сжатие образца сопровождается скачками разупрочнения и акустической эмиссией. После полной разгрузки часть затраченной на деформирование энергии сохраняется. При соответствующих условиях (вибрация, незначительный толчок) эта энергия может быть высвобождена.

3. В определенных пределах указанный элемент можно использовать как физическую, экспериментальную модель породы. В этом случае плоскую модель горного массива можно компоновать из набора таких элементов с различными запасами исходной аккумулированной энергии.

4. Рассмотренный модельный элемент обладает не только способностью аккумулировать энергию, но также обладает и свойствами дилатансии и внутреннего трения.

§ 5.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Таким образом, описанная выше экспериментальная (и демонстрационная) модель элемента горного массива способна к накоплению упругой энергии. Главным является то обстоятельство, что большая часть энергии элемента может сохраняться и после снятия всех внешних нагрузок. При определенных условиях эта скрытая энергия может высвободиться. Причем возможно как медленное, так и катастрофическое высвобождение. Следовательно, введенный элемент может играть роль источника и стока энергии.

Есть определенные основания для того, чтобы подобный элемент ввести и в модель массива горных пород. Хорошо известны факты, когда образцы породы, извлеченные с больших глубин, некоторое время сохраняют свою целостность, а затем самопроизвольно и бурно разрушаются. Есть также множество наблюдений, показывающих, что и в случаях, когда образцы не разрушаются, они тем не менее обладают скрытой потенциальной энергией. Специальными мерами эту энергию можно сделать доступной. Например, путем стравливания поверхностных слоев или каким-либо другим способом [220]. В этом случае образец меняет свои размеры („распрямляется“) и, следовательно, может совершить полезную работу.

Известны также факты такого рода. В массиве горных пород проводится взрыв. Он оказывает определенное воздействие на среду и она „откликается“ на это воздействие в течение многих часов [221]. Нет сомнения в том что, по крайней мере, вдали от источника взрыва, когда реакция массива практически линейна, эти „отклики“ происходят за счет его собственных энергетических ресурсов. В данном случае взрыв только способствует их „развязыванию“. При этом возможно как устойчивое „развязывание“ в форме незначительных подвижек, так и катастрофическое в виде горных ударов, землетрясений или спровоцированных внезапные выбросов.

С несколько иной точки зрения указанные наблюдения можно интерпретировать таким образом: динамическое воздействие на массив приводит к частичному освобождению его скрытой энергии вдали от места воздействия [27, 222]. Это одна сторона дела, чисто энергетическая.

Теперь о другой стороне. Горная порода обладает следующими фундаментальными свойствами: сцеплением, внутренним трением и дилатансией — свойством изменять свой объем при сдвиге (см. главу 2). Как отмечалось, введенный модельный элемент также обладает всеми перечисленными свойствами. Его внутреннее трение связано с внешним трением на контактах между стержнями (частицами), сцепление определяется начальным натяжением резины, а дилатансия — переупаковкой частиц при сдвиге.

Конечно, как и любая другая, предложенная модель элемент отражает только некоторые черты реальной среды. Например, дилатансия горной породы существенно связана с подрастанием и раскрытием в ней трещин. В модели же дилатансия определяется только переупаковкой частиц. Хотя даже и в этом случае видно, что когда частицы объединяются в блоки, изменение порового пространства очень похоже на раскрытие трещин, образование вакансий и дислокаций. В целом рассмотренный элемент близок к элементу сыпучей среды.

Последнее обстоятельство является скорее достоинством модели, чем ее недостатком. Давно замечено, что в поведении горного массива и сыпучей среды есть глубокая анало-

гия. Эта аналогия широко используется при исследовании различных задач. Так, с помощью сыпучих материалов моделируются мощные взрывы. Многие процессы деформирования и сдвигения горных пород моделируются на эквивалентных материалах [223, 224]. Эквивалентные материалы представляют собой не что иное, как сыпучие материалы, поровое пространство которых заполняется определенным связующим.

Далее, существуют горные породы, основой которых является конгломерат относительно жестких минеральных частиц, скрепленных цементирующим веществом. То есть действительный, физический механизм деформирования таких пород в общем сводится к деформированию сыпучей среды с заполненным поровым пространством. К этому классу можно отнести также и различные искусственные материалы: бетоны, металлобетоны и др. [225, 226]. Таким образом, накопленные факты и опыт указывают на правомерность следующего подхода к проблеме построения математических моделей, а именно, строить модель горной породы как модель сыпучей среды, в которой поровое пространство заполнено цементирующим материалом (последний и будет играть роль внешней упругой обвязки в модели).

Иными словами, если моделирование на эквивалентных материалах — это физическое моделирование, основанное на аналогии в поведении сыпучих сред и горных пород, то предлагаемая здесь постановка — это попытка распространить эту классическую аналогию и на математические модели. В качестве базовых будем использовать модели сыпучих сред (глава 4). Частицы сыпучей среды будем называть также зернами или наполнителем; цементирующий материал, который заполняет поровое пространство (возможно, и неполностью), будем называть поровой средой или связующим.

5.2.1. Деформации и микродеформации. Условия их совместности

Реальный физический механизм деформирования горной породы весьма сложен. Первая проблема, которая возникает при его анализе — это выработка самих понятий, языка для описания этого механизма. Для обозримого описания необходимо использовать методы механики сплошной среды. Замена реального тела сплошным предполагает, что и все поля, которые характеризуют процесс деформирования, являются достаточно гладкими. Только в этом случае число степеней свободы уменьшается до разумных пределов, и можно использовать аппарат уравнений математической физики. Для перехода к гладким полям необходимо решить вопрос о процедуре осреднения, т. е. процедуре, которая позволяет дать удовлетворительную характеристику исходным разрывным полям с помощью совокупности гладких полей [29].

Предположим, что сами частицы и цементирующая среда являются сплошными. Пусть \bar{V} — действительное поле скоростей. Можно ожидать, что в пределах частицы или поры функция \bar{V} будет нелинейной (деформации неоднородны), но достаточно гладкой (разрушение частиц и поровой среды не рассматриваются). На контактах между частицами вектор \bar{V} испытывает, вообще говоря, сильный разрыв: частицы могут скользить друг по другу. Это обстоятельство игнорировать нельзя. Предположим, что сцепление частиц с цементирующим материалом является полным. Последнее означает, что на границе раздела вектор \bar{V} непрерывен. Его односторонние производные будут, конечно, разрывными.

Таким образом, исходное поле \bar{V} имеет множество степеней свободы. В принципе можно выписать уравнения и для этого поля. Однако подобная постановка приведет к таким математическим трудностям, которые практически не будет смысла и преодолевать. Как известно, существенные упрощения являются сильной стороной моделей, а не их недостатком. Именно это обстоятельство позволяет получать результаты, пригодные для использования [171]. Ниже ограничимся самыми простыми вариантами моделей. В частности, будем рассматривать только плоскую деформацию.

Прежде всего исходную нерегулярную упаковку частиц заменим некоторой эффективной регулярной. Эффективной в том смысле, что она должна обладать теми же макросвойствами, что и нерегулярная упаковка. Как отмечалось, все модели сплошной среды являются по существу феноменологическими. Это означает, что параметры среды определяются не теоретическим путем, а из опытов. Поэтому в рассматриваемом случае параметры эффективной упаковки будут определяться в конечном счете из опытов. Причем эти опыты ставятся на реальных материалах, т. е. на материалах, имеющих дефекты, трещины и все другие особенности, которые явно в модели не учитываются. Параметры среды, которые определяются таким образом, будут заведомо одинаковыми в модели и реальной среде. Их совокупность и уточняет смысл понятия „эффективная упаковка“.

Далее. Как известно, построение математической модели — это выяснение закономерностей деформирования либо бесконечно малого объема сплошной среды, либо — что то же самое — объема конечных размеров, в пределах которого напряженно-деформированное состояние однородно. Это требование относится к переменным, которые должны фигурировать в континуальных уравнениях. Если же делать анализ процессов и на микроуровне, то однородность деформирования означает, что все отдельные элементы эффективной упаковки (т. е. частицы и поры) должны деформироваться одинаково.

Для большой ясности предположим, что центры частиц лежат в узлах квадратной решетки с шагом $2l$ (рис. 5.8). Кроме этого, будем считать, что контакты между частицами

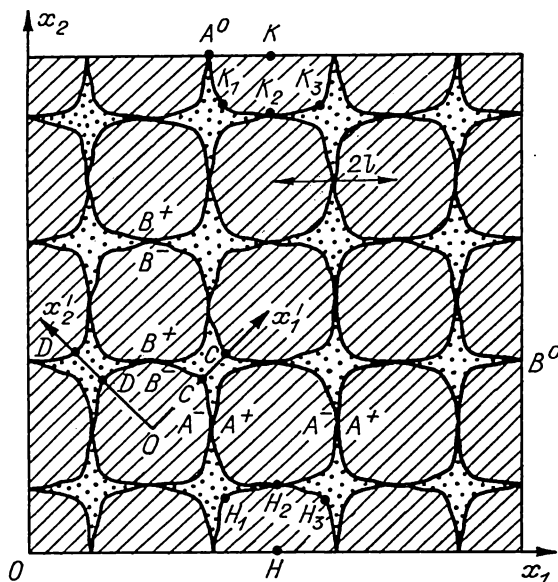


Рис. 5.8

одинаково удалены от их центров. Пусть Ox_1x_2 $Ox'_1x'_2$ — декартовы системы координат. Ориентируем их оси вдоль сторон и диагоналей решетки. Симметрия „правого“ и „левого“ означает, что картина деформирования не меняется при замене x_i на $(-x_i)$ и x'_i на $(-x'_i)$, $i = 1, 2$. Следовательно, в эффективной упаковке форма частиц и пор так же, как и распределения напряжений и деформаций, должны быть симметричными. Других ограничений на форму частиц накладывать не будем.

В плоском случае поле \bar{V} зависит от двух переменных $\bar{V} = \bar{V}(x_1, x_2)$. Для регулярной упаковки структура этого поля, конечно, проще, чем в общем случае, но все же она остается довольно сложной. На границах частиц есть сильные и слабые разрывы, поведение в областях гладкости является нелинейным и т. д. Однако есть и су-

щественное упрощение. Оно связано с тем, что все частицы в элементе среды деформируются одинаково. Это обстоятельство позволяет дать вполне адекватное описание всей кинематики.

Основные идеи лучше всего изложить на примере функции одного переменного. По существу речь идет о развитии той же самой идеи, которая использовалась выше для анализа пластичности (см. § 4.3). Она сводится к тому, чтобы найти приемлемые способы описания всюду разрывных полей. В настоящей главе ограничимся только возможностями классического аппарата, дополненного введением ряда внутренних переменных. Последовательное развитие этого направления приводит к необходимости использования методов нестандартного анализа. (см. главу 12).

Итак, пусть на отрезке $[0, 1]$ заданы две гладкие функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Разобьем отрезок точками x_k на отдельные малые интервалы и сконструируем новый объект $F(x)$ следующим образом. Вначале разрежем график функции $y = g(x)$ в точках $x = x_k$ $k = 1, 2, \dots$ Затем каждую из частей перенесем параллельно себе до пересечения левого конца с графиком $y = f(x)$. В результате получим новый изломанный график (рис. 5.9). Можно сказать, что ему соответствует функция $F(x)$:

$$F(x) = \{f(x), g(x), x_k\}. \quad (1.1)$$

Запись (1.1) показывает, что паре гладких функций и точкам x_k ставится в соответствие единственная функция $F(x)$. От обычной гладкой функции $F(x)$ отличается качественно (в контексте приложения к механике). Во-первых, подчеркнем, что интервалы (x_k, x_{k+1}) малы. Поэтому, если нас интересуют сами значения $F(x)$, то для их подсчета мы должны воспользоваться первой функцией (1.1): $F(x) = f(x)$. Производные же $F(x)$ могут браться в двух смыслах. Если мы смотрим на график $F(x)$ в целом, то видим, что $F'(x) = f'(x)$. Если же смотреть „через микроскоп“, то видна микроструктура графика и производные $F(x)$ равны $g'(x)$ (локальные производные). Ясно, что обычные гладкие функции также охватываются конструкцией (1.1). Для них $f(x) \equiv g(x) + \text{const}$. В общем случае можно сказать, что функция $F(x)$ имеет микроструктуру. Причем $f(x)$ является осреднением $F(x)$ и служит для вычисления значения самой функции $F(x)$, но не ее производных. Для вычисления производных вводится дополнительная функция $y = g(x)$. Эта функция восполняет информацию о разрывах $F(x)$, которая теряется при осреднении.

Аналогичные процедуры введем и для поля скоростей $\bar{V}(x_1, x_2)$. Вначале рассмотрим одну вспомогательную операцию. Представим, что в некоторых (базисных) точках элемента среды вставлены репера и на них натянута тонкая резиновая пленка. В процессе деформирования скорости базисных точек среды и пленки совпадают между собой. Нас будут интересовать случаи, когда пленка испытывает однородную деформацию. То есть

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \\ w_2 &= a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где w_i — скорости точек пленки, $a_i, a_{ij} = \text{const}, i, j = 1, 2$. Ясно, что базисных точек может быть только три. Шесть компонент скоростей $\bar{V} = \{V_1, V_2\}$ в этих точках однозначно

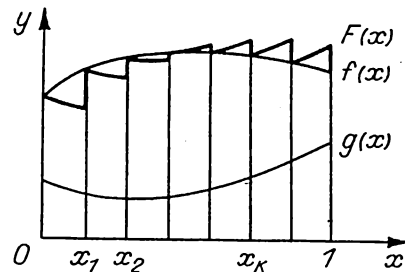


Рис. 5.9

определяют 6 постоянных в равенствах (1.2). Для краткости будем говорить, что поле (1.2) натянуто на базисные точки. Может оказаться, что скорости w_i совпадают с V_i не только в базисных, но и в ряде новых точек. Эти точки также можно отнести к базисным.

Натянем поле (1.2) на центры любых трех частиц, которые не лежат на одной прямой. Компоненты скоростей, которые получатся на таком базисе, обозначим через v_1, v_2 . Условие однородности означает, что при сдвиге координат на период решетки $2l$ вектор скорости $\bar{V}(x_1, x_2)$ получает каждый раз одинаковое приращение (рис. 5.10). Этим свойством обладает и поле (1.2). Поэтому из равенства

$$\bar{v}(x_1, x_2) = \bar{V}(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

для трех базисных центров следует их выполнение и для центров всех частиц. Поле \bar{v} будем называть осредненным полем скоростей. Ему соответствует тензор градиента ε с компонентами

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (1.4)$$

Перейдем теперь к исследованию локального поведения функции $\bar{V}(x_1, x_2)$. Вначале рассмотрим ее изменения в пределах одной поры. Как уже отмечалось, деформации цементирующего материала будут неоднородными. Однако учитывать ее нет никакой необходимости. Достаточно рассмотреть только средние значения. Натянем на центр поры и точки контакта с частицами B_3, D_3, B_5, D_5 однородное поле. Здесь и ниже число базисных точек больше трех, так как есть симметрия. Обозначим компоненты тензора градиента через $(\varepsilon_{ij}^{\Pi})'$. Индекс „ Π “ указывает на принадлежность к поре, штрих — на систему координат. Непосредственно из определений и (1.2) видно, что

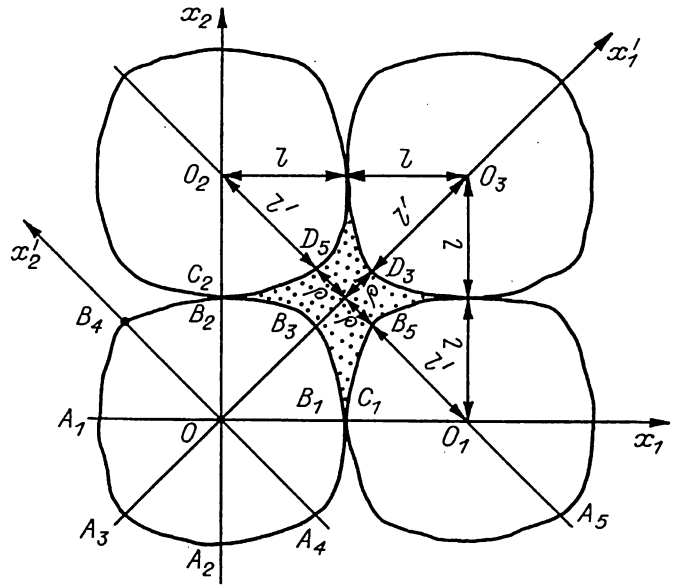


Рис. 5.10

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}(D_3) - \bar{V}(B_3)}{2\rho} &= (\varepsilon_{11}^{\Pi})' \bar{e}_1' + (\varepsilon_{12}^{\Pi})' \bar{e}_2', \\ \frac{\bar{V}(D_5) - \bar{V}(B_5)}{2\rho} &= (\varepsilon_{21}^{\Pi})' \bar{e}_1' + (\varepsilon_{22}^{\Pi})' \bar{e}_2', \end{aligned} \quad (1.5)$$

где 2ρ — размер поры, \bar{e}_i' — единичные векторы вдоль Ox_i' . Переход к системе координат Ox_1x_2 и компонентам ε_{ij}^{Π} осуществляется по обычным формулам тензорного проектирования (фактически такой переход относится к резиновой пленке, покрывающей пору).

Рассмотрим теперь смещения внутри частиц. Частицы деформируются под действием поровой среды и усилий на контактах. Вначале о контактном взаимодействии. Натянем на центр частицы и точки A_1, B_1, A_2, B_2 однородное поле деформаций. Компоненты тензора градиента обозначим через ε'_{ij} . В силу определений

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}(B_1) - \bar{V}(A_1)}{2l} &= \varepsilon'_{11}\bar{e}_1 + \varepsilon'_{12}\bar{e}'_2, \\ \frac{\bar{V}(B_2) - \bar{V}(A_2)}{2l} &= \varepsilon'_{21}\bar{e}_1 + \varepsilon'_{22}\bar{e}'_2.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Тензор ε' дает представление о деформациях частицы. Причем аналогичной информацией для поры мы и ограничились. Анализ показывает, что для частиц такое упрощение является слишком грубым. Поэтому наряду с тензором ε' введем еще один тензор, который натянут на центр частицы и точки контакта с порой A_3, B_3 и A_4, B_4 . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}(B_3) - \bar{V}(A_3)}{2l'} &= (\varepsilon^\tau_{11})' \bar{e}'_1 + (\varepsilon^\tau_{12})' \bar{e}'_2, \\ \frac{\bar{V}(B_4) - \bar{V}(A_4)}{2l'} &= (\varepsilon^\tau_{21})' \bar{e}'_1 + (\varepsilon^\tau_{22})' \bar{e}'_2.\end{aligned}\quad (1.7)$$

В координатах Ox_1x_2 компоненты (1.7) обозначим через ε^τ_{ij} , а сам тензор — как ε^τ .

И, наконец, введем последний тензор, который характеризует проскальзывания между частицами. Обозначим через R с индексами компоненты разрывов скоростей при переходе через контакты (см. рис. 5.10):

$$\begin{aligned}\bar{V}(C_1) - \bar{V}(B_1) &= \bar{R}_1 = R_{11}\bar{e}_1 + R_{12}\bar{e}_2, \\ \bar{V}(C_2) - \bar{V}(B_2) &= \bar{R}_2 = R_{21}\bar{e}_1 + R_{22}\bar{e}_2.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Сравнивая разложение (1.8) с (1.6), легко заметить, что вместо пары векторов \bar{R}_1, \bar{R}_2 удобнее ввести тензор ε^R с компонентами

$$\varepsilon^R_{11} = \frac{R_{11}}{2l}, \quad \varepsilon^R_{22} = \frac{R_{22}}{2l}, \quad \varepsilon^R_{12} = \frac{R_{12}}{2l}, \quad \varepsilon^R_{21} = \frac{R_{21}}{2l}.\quad (1.9)$$

Если векторы R_1, R_2 направлены вдоль контактов, то ε^R можно назвать тензором проскальзываний.

Итак, мы ввели 4 тензора градиента скоростей $\varepsilon, \varepsilon^\Pi, \varepsilon', \varepsilon^\tau$. Как известно, тензор градиента содержит в себе информацию о деформациях и скорости поворота. Поэтому все тензоры будут несимметричными. Их симметричные части дают скорости деформации, а антисимметричные — скорости поворотов:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \quad \omega = \frac{\varepsilon^\Pi_{12} - \varepsilon^\Pi_{21}}{2}, \\ \omega_t &= \frac{\varepsilon^t_{12} - \varepsilon^t_{21}}{2}, \quad \omega_\tau = \frac{\varepsilon^\tau_{12} - \varepsilon^\tau_{21}}{2}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

В классическом случае кинематика описывается гладким полем скоростей и, следовательно, только одним тензором градиента. У нас ситуация сложнее. Наложим на элемент среды жесткий поворот, т. е. заменим исходное разрывное поле $\{V_1, V_2\}$ на следующее:

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &\rightarrow V_1(x_1, x_2) - \Omega x_1, \\ V_2(x_1, x_2) &\rightarrow V_2(x_1, x_2) + \Omega x_2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\Omega = \text{const}$. В результате все выражения (1.10) изменятся на величину Ω . Это указывает на неинвариантность. Однако разность любой их пары при замене (1.11) приращения не получает и следовательно, будет инвариантной, объективной характеристикой процесса.

Теперь о тензоре проскальзываний ε^R . Он стоит особняком в ряде кинематических тензоров

$$\varepsilon, \varepsilon^\Pi, \varepsilon^t, \varepsilon^\tau, \varepsilon^R. \quad (1.12)$$

Применим к ε^R преобразование (1.11). Из формул (1.8) и рис. 5.10 видно, что точки B_i C_i имеют одни и те же декартовы координаты (они лежат только „по разные стороны“ контакта). Поэтому при наложении поворота не меняются все компоненты тензора. Это обстоятельство можно подчеркнуть введением величины

$$\omega_R = \frac{\varepsilon_{12}^R - \varepsilon_{21}^R}{2} = \frac{R_{12} - R_{21}}{4l} \quad (1.13)$$

и утверждением: величина ω_R по отношению к жесткому повороту инвариантна.

Перейдем теперь к формулировке условий совместности. Такие условия должны существовать. Это видно из следующего. Тензоры (1.12) характеризуют деформации поровой среды, частиц, проскальзывания между частицами и среднюю деформацию элемента. Из общих соображений ясно, что деформации частиц и проскальзывания между ними не оставляют произвола для деформаций поровой среды. Кроме этого, они определяют также относительные смещения центров частиц, а значит, и среднюю макродеформацию ε . Таким образом, должны иметь место некоторые кинематические условия совместности. Их можно получить таким образом. Вычислим приращение компоненты скорости V_1 при переходе от центра частицы O к O_1 (см. рис. 5.10). Из формул (1.6) следует, что

$$V_1(B_1) - V_1(A_1) = \varepsilon_{11}^t \cdot 2l.$$

В силу симметрии точка O также может считаться базовой. Поэтому

$$V_1(B_1) - V_1(O) = \varepsilon_{11}^t \cdot l, \quad V_1(O) - V_1(C) = \varepsilon_{11}^t \cdot l.$$

Из определений (1.8), (1.9) следует, что

$$V_1(C_1) - V_1(B_1) = R_{11} = \varepsilon_{11}^R \cdot 2l.$$

Складывая правые части, получим

$$V_1(O_1) - V_1(O) = (\varepsilon_{11}^t + \varepsilon_{11}^R) \cdot 2l.$$

С другой стороны, из (1.3), (1.4)

$$V_1(O_1) - V_1(O) = \varepsilon_{11} \cdot 2l.$$

Следовательно, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^t + \varepsilon_{11}^R$. Такой же результат будет и для остальных компонент. Таким образом,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^R. \quad (1.14)$$

Необходимым условием корректности любого кинематического описания является следующее. Приращение вектора скорости при обходе по любому замкнутому контуру должно равняться нулю. Поставим это условие для контура $OB_3D_3O_3O_2O$. Из (1.7), (1.5)

$$\begin{aligned} \bar{V}(B_3) - \bar{V}(A_3) &= [(\varepsilon_{11}^t)' \bar{e}_1' + (\varepsilon_{12}^t)' \bar{e}_2'] \cdot 2l', \\ \bar{V}(D_3) - \bar{V}(B_3) &= [(\varepsilon_{11}^\Pi)' \bar{e}_1' + (\varepsilon_{12}^\Pi)' \bar{e}_2'] \cdot 2\rho. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В элементарном объеме все частицы деформируются одинаково. Поэтому

$$\bar{V}(O) - \bar{V}(A_3) = \bar{V}(O_3) - \bar{V}(D_3). \quad (1.16)$$

Из условий (1.15), (1.16) следует, что

$$\bar{V}(O_3) - \bar{V}(O) = [2l' \cdot (\varepsilon_{11}^t)' + 2\rho(\varepsilon_{11}^\Pi)'] \bar{e}_1' + [2l'(\varepsilon_{12}^t)' + 2\rho(\varepsilon_{12}^\Pi)'] \bar{e}_2'. \quad (1.17)$$

С другой стороны, то же самое приращение можно получить, двигаясь по пути OO_2O_3 :

$$\bar{V}(O_3) - \bar{V}(O) = 2l(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) \bar{e}_1 + 2l(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}) \bar{e}_2. \quad (1.18)$$

Сравним теперь правые части последних равенств. Для этого перейдем в (1.17) к координатам без штрихов. Формулы перехода имеют вид:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha \pm \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}}{2} \sin 2\alpha, \\ \left. \begin{aligned} \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{21} \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}}{2} \cos 2\alpha - \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \sin 2\alpha \pm \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}}{2}, \\ \bar{e}'_1 &= \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2, \quad \bar{e}'_2 = -\sin \alpha \bar{e}_1 + \cos \alpha \bar{e}_2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $\alpha = \pi/4$ — угол между осями Ox_1, Ox'_1 . Из сравнения коэффициента при \bar{e}_1

$$(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) \cdot l \cdot \sqrt{2} = (\varepsilon_{11}^t + \varepsilon_{21}^t) l' + (\varepsilon_{11}^\Pi + \varepsilon_{21}^\Pi) \rho.$$

Естественно ввести безразмерный параметр для соотношения масштабов длин. Пусть $m = \rho/(l' + \rho)$, $0 < m < 1$. Величина m имеет смысл параметра просветности [227]. Учитывая, что для квадратной решетки (см. рис. 5.10) имеют место равенства

$$\sqrt{2}l = l' + \rho, \quad l' = \sqrt{2}l(1 - m), \quad \rho = \sqrt{2}lm,$$

получим

$$(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) = (1 - m)(\varepsilon_{11}^t + \varepsilon_{21}^t) + m(\varepsilon_{11}^\Pi + \varepsilon_{21}^\Pi).$$

Еще одно равенство получается из сравнения коэффициента при \bar{e}_2 и еще два — после аналогичных выкладок для пути OO_1O_2O (см. рис. 5.10). Окончательно можно записать:

$$\varepsilon_{ij} = (1 - m)\varepsilon_{ij}^\tau + m\varepsilon_{ij}^\Pi. \quad (1.20)$$

Итак, мы получили 8 условий совместности (1.14), (1.20). Шесть из них относятся к собственно деформациям и два — к условиям совместности на повороты:

$$\omega = \omega_t + \omega_R, \quad \omega = (1 - m)\omega_\tau + m\omega_\Pi. \quad (1.21)$$

5.2.2. Напряжения и микронапряжения. Условия их совместности

Возьмем произвольную точку среды A и будем определять напряжение в ней обычным образом. То есть выберем нормаль n , площадку длиной s (деформация плоская) и вычислим предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\overline{F_n}}{s} = \overline{\sigma_n}(A), \quad (2.1)$$

где $\overline{F_n}$ — усилие на площадке. Пусть точка A попала внутрь частицы или цементирующего материала. Тогда предел (2.1) существует и напряжения $\overline{\sigma_n}$ образуют тензор σ . Иными словами, если σ_n рассматривать как векторную функцию векторного аргумента, то имеет место формула Коши:

$$\overline{\sigma_n} = \sigma \cdot \overline{n}. \quad (2.2)$$

Распределение напряжений (2.1) имеет весьма сложный вид. Во-первых, внутри пор и частиц оно будет существенно неоднородным. Во-вторых, на границах частиц две компоненты будут непрерывными, а третья компонента (для нормали n , направленной вдоль границы) будет, как правило, разрывной. Производные напряжений также будут разрывными. Ясно, что работать с таким описанием — дело практически безнадежное. Необходимо найти приемлемые способы упрощения. Причем эти способы должны быть согласованы с уже принятым выше описанием кинематики.

Вот этим вопросом мы сейчас и займемся, следуя [30]. Метод введения напряжений путем (2.1), (2.2) является классическим. Напряжения (2.1) можно назвать силовыми, так как их определение опирается на понятие силы. Для наших целей нужен другой подход. В основу этого подхода положим понятие энергии.

Пусть некоторое тело деформируется под действием внешних сил. На форму и размеры тела особых ограничений накладывать не будем. Предположим только, что есть симметрия относительно осей Ox_i , Ox'_i . Остановимся на случае, когда внешние силы равны $\pm \bar{T}_i$ и сосредоточены в симметричных точках A_i , B_i (рис. 5.11, силы $\pm \bar{G}_i$ сосредоточены в точках A_3 , B_3 , A_4 , B_4 и во внимание пока не принимаются). Вычислим работу

$$W_{12} = \bar{T}_1 \bar{u}(B_1) + \bar{T}_2 \bar{u}(B_2) - \bar{T}_1 \bar{u}(A_1) - \bar{T}_2 \bar{u}(A_2). \quad (2.3)$$

Здесь \bar{u} — перемещение соответствующей точки. Под работой понимается произведение смещения на конечное значение силы. Предположим, что тело однородно и его центр неподвижен. Тогда смещения точек A_i , B_i будут иметь разные знаки. Натянем на эти точки тензор деформаций E^t . Выразим работу через его компоненты:

$$W_{12} = \bar{T}_1(E'_{11}\bar{e}_1 + E'_{12}\bar{e}_2)A_1B_1 + \bar{T}_2(E'_{21}\bar{e}_1 + E'_{22}\bar{e}_2)A_2B_2, \quad (2.4)$$

где по аналогии с определением (1.6) принято

$$\begin{aligned} E'_{11}\bar{e}_1 + E'_{12}\bar{e}_2 &= \frac{\bar{u}(B_1) - \bar{u}(A_1)}{A_1B_1}, \\ E'_{21}\bar{e}_1 + E'_{22}\bar{e}_2 &= \frac{\bar{u}(B_2) - \bar{u}(A_2)}{A_2B_2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как известно, основные формулы механики сплошной среды имеют инвариантный и весьма изящный вид. В частности, в формуле для энергии естественным образом (и именно вследствие исходных определений) выделяется работа, отнесенная к объему. Технически это проявляется в том, что из всех слагаемых для работы выносятся один и тот же множитель, имеющий смысл объема. В формуле (2.4) первое слагаемое стоит с коэффициентом A_1B_1 , второе — с A_2B_2 . Поэтому для того, чтобы получить классическую структуру, из первого слагаемого необходимо выделить множитель A_2B_2 , а из второго — A_1B_1 . Поэтому вместо сил \bar{T}_1, \bar{T}_2 следует использовать отношения $\bar{T}_1 / A_2B_2, \bar{T}_2 / A_1B_1$. Тогда выражению для энергии можно придать следующий вид:

$$\frac{W_{12}}{A_1B_1 \times A_2B_2} = t_{ij}E'_{ij} = t_{11}E'_{11} + t_{22}E'_{22} + t_{12} \cdot (E'_{12} + E'_{21}), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 / A_2B_2 &= t_{11}\bar{e}_1 + t_{12}\bar{e}_2, \\ \bar{T}_2 / A_1B_1 &= t_{21}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Величины t_{ij} будем называть энергетическими напряжениями. В терминах энергетических напряжений условие отсутствия момента выглядит наиболее просто: $t_{12} = t_{21}$. В отличие от силовых, энергетические напряжения определены для всего тела в целом. По-

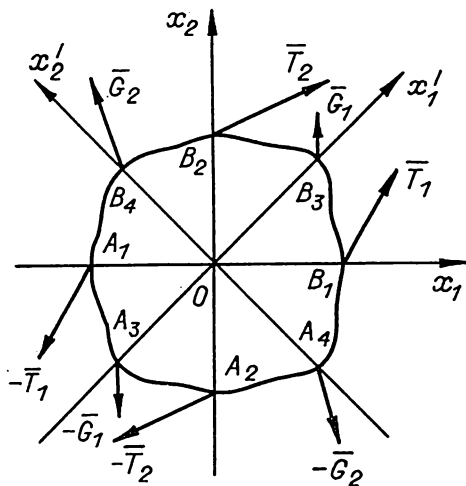


Рис. 5.11

этому говорить о каком-либо их распределении в теле или о тензоре энергетических напряжений — пока оснований нет. Однако эти понятия весьма полезны и им можно придать вполне конкретный смысл.

Вначале о тензоре. Обратимся к формуле Коши (2.2). Будем рассматривать ее как уравнение относительно σ . Если левая часть известна для двух значений n , то весь тензор восстанавливается единственным образом. Можно сказать, что в этом случае тензор σ натягивается на две базисные площадки. При этом неважно, как вводятся базисные напряжения: по правилу (2.1), (2.7) или каким-либо иным путем. Главное — должны быть заданы векторы, которые приписываются двум различным площадкам. Естественно энергетическое напряжение \bar{T}_1 / A_2B_2 приписать площадке с

нормалью \bar{e}_1 , а $\bar{T}_2 / A_1 B_1$ — нормали \bar{e}_2 . Тензор, соответствующий этим площадкам как базисным, будем называть энергетическим тензором напряжений t . Очевидно, что его компоненты равны t_{ij} .

Если вернуться к образу резиновой пленки, натянутой на базисные точки, то видно, что его можно использовать полнее, а именно: всегда можно подобрать характеристики пленки так, чтобы ее деформациям E'_{ij} отвечало бы однородное распределение обычных силовых напряжений t_{ij} .

Согласно определению, тензор энергетических напряжений относится ко всему телу в целом. Поэтому условно можно принять, что значения t_{ij} приписаны и каждой точке тела. Иными словами, положить, что энергетические напряжения распределены в теле однородным образом. В покрывающей пленке они совпадают с обычными силовыми напряжениями, которые распределены равномерно.

Покажем теперь, что понятие энергетического напряжения в некотором смысле является более широким, чем силовое определение. Легко видеть, что в тех случаях, когда тело находится в однородном напряженно-деформированном состоянии, энергетические напряжения переходят в силовые. Действительно, пусть в сечении тело имеет форму прямоугольника. Предположим, что усилия T_1, T_2 распределены на границах равномерно. Формулы (2.7) для энергетических компонент остаются без изменений. Очевидно, что в этом случае определения (2.7) и (2.1) совпадают между собой. Таким образом, для нового понятия условие регулярности выполняется.

Более своеобразной будет ситуация, когда к телу приложено две системы сил (см. рис. 5.11). Предположим, что равнодействующие и моменты каждой из систем по отдельности равны нулю. Общая работа складывается из двух слагаемых:

$$W = W_{12} + W_{34}, \quad (2.8)$$

где W_{12} имеет прежний смысл (2.3), а

$$W_{34} = \bar{G}_1 \bar{u}(B_3) + \bar{G}_2 \bar{u}(B_4) - \bar{G}_1 \bar{u}(A_3) - \bar{G}_2 \bar{u}(A_4). \quad (2.9)$$

Для W_{34} необходимо проделать те же преобразования, что и выше, но в системе координат $Ox'_1 x'_2$. Здесь вместо t будем использовать обозначение τ . Результат будет следующий

$$\frac{W_{34}}{A_3 B_3 \times A_4 B_4} = \tau'_{ij} (E^{\tau}_{ij})' = \tau'_{ij} E^{\tau}_{ij}, \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\bar{u}(B_3) - \bar{u}(A_3)}{A_3 B_3} = (E^{\tau}_{11})' \bar{e}'_1 + (E^{\tau}_{12})' \bar{e}'_2, \quad (2.11)$$

$$\frac{\bar{u}(B_4) - \bar{u}(A_4)}{A_4 B_4} = (E^{\tau}_{21})' \bar{e}'_1 + (E^{\tau}_{22})' \bar{e}'_2,$$

$$\bar{G}_1 / A_4 B_4 = \tau'_{11} \bar{e}'_1 + \tau'_{12} \bar{e}'_2, \quad (2.12)$$

$$\bar{G}_2 / A_3 B_3 = \tau'_{21} \bar{e}'_1 + \tau'_{22} \bar{e}'_2,$$

τ_{ij} — компоненты энергетического тензора напряжений, натянутого па базисные площадки A_3B_3, A_4B_4 ; E_{ij}^{τ} — компоненты соответствующего тензора деформаций, натянутого на центр O и точки A_3, B_3, A_4, B_4 . Условия на моменты означают, что каждый из тензоров t и τ будет симметричным: $t_{12} = t_{21}, \tau_{12} = \tau_{21}$.

Таким образом, для описания напряженного состояния от двух систем сил нам потребовалось два энергетических тензора. Им отвечают два тензора деформаций. При этом общая работа внешних сил равна сумме удельных работ обоих тензоров, умноженных на соответствующие объемы:

$$W = t_{ij}E_{ij}^t \cdot A_1B_1 \times A_2B_2 + \tau_{ij}E_{ij}^{\tau} \cdot A_3B_3 \times A_4B_4.$$

Для одного и того же тела эти объемы имеют разные величины и зависят от точек приложения сил.

Перейдем теперь к анализу внутренних усилий в среде. Возьмем отдельную частицу. Пусть \bar{P}_{τ} — сумма всех сил, действующих на частицу со стороны цементирующего материала, а \bar{P}_t — со стороны окружающих частиц. При квазистатическом деформировании равнодействующая всех сил, приложенных к любой частице, равна нулю: $\bar{P}_t + \bar{P}_{\tau} = \bar{0}$.

Рассмотрим теперь отдельную пору. Пусть Π — внешняя граница цементирующего материала, заключенного в этой поре (рис. 5.12). Предположим, что между собой поры не сообщаются. Для случая, когда они заполнены действительно цементирующим материалом, а не подвижным флюидом, это вполне приемлемое ограничение. Тогда все усилия \bar{P}_{Π} , которые передаются через контур Π — это только усилия, действующие со стороны окружающих частиц. Цементирующий материал в поре деформируется также квазистатически. Поэтому сумма сил $\bar{P}_{\Pi} = 0$. Это очевидное обстоятельство влечет за собой одно нетривиальное следствие.

Разобьем контур Π на отдельные участки, соприкасающиеся с различными частицами, которые ограничивают данную пору. На каждом из этих участков распределены некоторые усилия, которые возникают при взаимодействии частицы и цементирующего материала. В

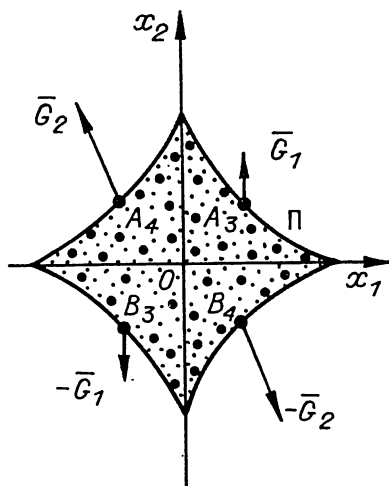


Рис. 5.12

эlemente среды все поры и частицы деформируются одинаково. Поэтому если взять теперь конкретную частицу, то на ее границе представлены все те же участки контура Π . А это означает, что $\bar{P}_{\tau} = -\bar{P}_{\Pi}$ („действие равно противодействию“). Отсюда сразу следует, что $\bar{P}_{\tau} = \bar{0}$, а значит, $\bar{P}_t = \bar{0}$. Таким образом, не только сумма всех сил, действующих на частицу, равна нулю, но и по отдельности сумма сил, приложенных к частице со стороны цементирующего материала, равна нулю и сумма сил, приложенных со стороны окружающих частиц, также равна нулю. То же самое относится и к моментам сил.

В настоящем изложении ограничимся моделями, которые к моментным напряжениям не приводят. Для этого предположим, что контакты между частицами малы, так что через них передаются только усилия, но не передаются

моменты. Равнодействующие этих усилий обозначим через \bar{T}_1, \bar{T}_2 . Из условий симметрии следует, что \bar{T}_1, \bar{T}_2 приложены в точках пересечения с осями Ox_1, Ox_2 , причем в симметричных точках силы равны $-\bar{T}_1, -\bar{T}_2$ (см. рис. 5.11). Аналогичные гипотезы для цементирующего материала вносят большие ограничения, так как участки контакта могут быть сравнимы с размерами частиц. Предположим, что и здесь все взаимодействие можно свести к силам. Обозначим их через \bar{G}_i . Из симметрии следует, что точки приложения равнодействующих лежат в серединах соответствующих участков A_3, A_4 . Причем в симметричных точках силы равны $-\bar{G}_i$. Следовательно, для некоторой фиксированной частицы внешние силы сводятся к системе, показанной на рис. 5.11. Если положить $A_1B_1 = A_2B_2 = 2l$ и $A_3B_3 = A_4B_4 = 2l'$, то можно считать, что на рисунке изображена отдельная частица.

Таким образом, согласно (2.7), (2.12), напряженное состояние частиц характеризуется двумя симметричными тензорами энергетических напряжений. Если через T_{ij} обозначить проекции векторов $T_i (T_{ij} = T_i \cdot e_j)$, то определения (2.7) можно записать таким образом:

$$t_{11} = \frac{T_{11}}{2l}; t_{22} = \frac{T_{22}}{2l}; t_{12} = t_{21} = \frac{T_{12}}{2l} = \frac{T_{21}}{2l}. \quad (2.13)$$

Аналогично из определений (2.12) видно, что

$$\tau'_{11} = \frac{G'_{11}}{2l'}, \tau'_{22} = \frac{G'_{22}}{2l'}, \tau'_{12} = \tau'_{21} = \frac{G'_{12}}{2l'} = \frac{G'_{21}}{2l'}, \quad (2.14)$$

где $G'_{ij} = \bar{G}_i \cdot \bar{e}'_j$.

В дальнейшем понадобятся компоненты в декартовых координатах Ox_1x_2 . По формулам тензорного проектирования имеем:

$$\left. \begin{matrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \end{matrix} \right\} = \frac{\tau'_{11} + \tau'_{22}}{2} \mp \tau'_{12}, \quad \tau_{12} = \frac{\tau'_{11} - \tau'_{22}}{2}. \quad (2.15)$$

Компоненты сил определяются по формулам векторного проектирования:

$$\begin{aligned} G'_{11} &= \frac{G_{11} + G_{12}}{\sqrt{2}}, \quad G'_{12} = \frac{G_{12} - G_{11}}{\sqrt{2}}, \\ G'_{21} &= \frac{G_{21} + G_{22}}{\sqrt{2}}, \quad G'_{22} = \frac{G_{22} - G_{21}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $G_{ij} = \bar{G}_i \cdot \bar{e}_j$. Подставляя (2.16) в (2.14) и затем в (2.15), получим

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{G_{11} - G_{21}}{2\sqrt{2}l'}, \quad \tau_{22} = \frac{G_{12} + G_{22}}{2\sqrt{2}l'}, \\ \tau_{12} &= \frac{G_{12} - G_{22}}{2\sqrt{2}l'} = \tau_{21} = \frac{G_{11} + G_{21}}{2\sqrt{2}l'}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Цементирующий материал в отдельной поре деформируется под действием одной системы сил \bar{G}_i (см. рис. 5.12). Поэтому его напряженное состояние характеризуется только

одним тензором энергетических напряжений. Обозначим его компоненты через p_{ij} . Тогда, как и в случае (2.12), можно записать:

$$p'_{11} = \frac{G'_{11}}{2\rho}, p'_{22} = \frac{G'_{22}}{2\rho}, p'_{12} = p'_{21} = \frac{G'_{12}}{2\rho} = \frac{G'_{21}}{2\rho}. \quad (2.18)$$

В координатах без штрихов

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{G_{11} - G_{21}}{2\sqrt{2}\rho}, p_{22} = \frac{G_{12} + G_{22}}{2\sqrt{2}\rho}, \\ p_{12} &= \frac{G_{12} - G_{22}}{2\sqrt{2}\rho} = p_{21} = \frac{G_{11} + G_{21}}{2\sqrt{2}\rho}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

На границе раздела „частица — цементирующий материал“ нормальная и касательная компоненты силовых напряжений непрерывны. Относительно третьей компоненты — ничего заранее не известно. В случае, когда принято энергетическое определение напряжений, ситуация другая. Здесь есть информация о склейке всех трех компонент. Легко заметить, что $\rho / l' = m / (1 - m)$. Поэтому из (2.14), (2.18) следует, что $\tau'_{ij} = m p'_{ij} / (1 - m)$. Значит, и в координатах Ox_1x_2 :

$$\tau_{ij} = \frac{m}{1 - m} p_{ij}. \quad (2.20)$$

Таким образом, как правило, все компоненты тензора будут разрывными. Исключение составляет значение $m = 0,5$. Этот случай примечателен вот в каком отношении. Предположим, что нам неизвестно никакой информации о структурном параметре m . В этом случае разумно не отдавать предпочтения ни одному из масштабов длин, т. е. положить $m = 0,5$. Условие совместности показывает, что как раз в этом случае все три компоненты энергетических напряжений остаются непрерывными.

Итак, посредством энергетических напряжений можно описать внутренние усилия в структурных элементах: зернах и цементирующем материале. Однако этого описания явно недостаточно. В конечном счете необходимы данные о напряжениях, которые можно будет использовать в дифференциальных уравнениях равновесия. А это могут быть только силовые напряжения, определенные на макроуровне. Для их анализа вернемся к равенству (2.1). В элементе среды все частицы деформируются одинаково. Поэтому функция $\bar{\sigma}_n(A)$ будет периодической. Это обстоятельство позволяет дать другую трактовку понятия напряжения. Пусть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_n(A, s)}{s} = \bar{\sigma}_n. \quad (2.21)$$

Это определение отличается от классического (2.1) только заменой предела с 0 на ∞ . По существу это обычное определение в механике горных пород. Согласно ему, площадки, на которых имеют смысл напряжения, должны быть достаточно большими по сравнению с размерами структурных элементов. В (2.21) для правой части оставлено прежнее обозначение (2.1). Если нет оговорки, то $\bar{\sigma}_n$ будем понимать только в смысле (2.21). Из условия периодичности (2.1) следует, что $\bar{\sigma}_n$ от координат точки A не зависит.

Зависимость от вектора \bar{n} , конечно, сохраняется. Она имеет вид (2.2). Следовательно, напряжения (2.21) образуют тензор σ . Это видно из того факта, что любая область, ограниченная замкнутой ломаной, находится в равновесии. При этом необходимо принять условия отсутствия инерционных и массовых сил. Предположим временно, что они отсутствуют. Тензор σ будем называть тензором макронапряжений, средних напряжений или просто тензором напряжений.

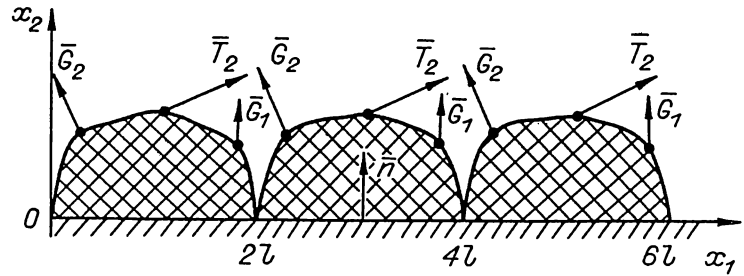


Рис. 5.13

Основной вопрос — как этот тензор связан с энергетическими напряжениями, которые действуют на микроуровне. Или, иными словами, как микронапряжения в частицах и цементирующем материале проявляются на макроуровне. Вычислим вначале пределы (2.21) для площадок с нормальми $\bar{n} = \bar{e}_2$ и \bar{e}_1 . Для этого проведем сечение через центры частиц и отбросим все полные частицы и поровый материал вне сечения (рис. 5.13). Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{G_{12} + G_{22} + T_{22}}{2l}, \quad \sigma_{21} = \frac{G_{11} + G_{21} + T_{21}}{2l}, \\ \sigma_{11} &= \frac{G_{11} - G_{21} + T_{11}}{2l}, \quad \sigma_{12} = \frac{G_{12} - G_{22} + T_{12}}{2l}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В числителе стоят те же комбинации компонент \bar{G}_i , что и в (2.17). Учитывая это обстоятельство, а также (2.13) и соотношение масштабов $l' = \sqrt{2}l(1-m)$, формулы (2.22) можно записать таким образом:

$$\sigma_{ij} = t_{ij} + 2(1-m)\tau_{ij}. \quad (2.23)$$

Если вспомнить связь (2.20), то (2.23) можно переписать так:

$$\sigma_{ij} = t_{ij} + 2m\tau_{ij}. \quad (2.24)$$

Это и есть искомые условия, отражающие связь напряжений на микро- и макроуровнях. Так как все тензоры микронапряжений являются симметричными, то и тензор средних напряжений получился также симметричным.

5.2.3. Основное энергетическое тождество

Для элемента среды, наделенного внутренней структурой, по-прежнему имеют смысл обычные тензоры напряжений и деформаций (макронапряжений и деформаций). В классической теории энергия деформирования элементарного объема выражается через работу, которую совершают граничные усилия на граничных перемещениях. При этом последняя сводится к произведению макронапряжений и макродеформаций. Для элемента со структуре ситуация сложнее. Какой бы элемент мы не выделили, на его границе всегда будут присутствовать сечения цементирующего материала, зерен, контактов между зер-

нами и т. д. Фактически это означает, что на границе будут действовать определенные микронапряжения. Причем перемещения на границе также будут связаны с перемещениями структурных элементов. Энергия элемента равна сумме энергий деформирования всех его зерен, цементирующего материала и энергии, которая ушла на относительные перемещения по контактам. Априорно совсем неочевидно, что эта сумма обязательно должна преобразоваться к работе макронапряжений на макродеформациях.

Действительно, микронапряжения вводились из энергетических соображений, а тензор напряжений σ — из силовых. Деформации также вводились по-разному: тензор ε — для центров зерен всего элемента, тензор ε' и другие — как некоторые осредненные характеристики структурных элементов. Поэтому вопрос о балансе энергии на микро- и макроуровнях необходимо исследовать отдельно [31].

Выберем такой путь. Вначале выпишем очевидное тождество, где попарно уничтожаются все слагаемые: $a - a + b - b + \dots \equiv 0$. Затем перегруппируем слагаемые и часть их перенесем в правую часть. После этого рассмотрим механическое истолкование полученного результата.

Итак, очевидно, что

$$\begin{aligned} & \sum [\bar{T}_1 \bar{v}(A^-) - \bar{T}_1 \bar{v}(A^-) + \bar{T}_1 \bar{v}(A^+) - \bar{T}_1 \bar{v}(A^+)] + \\ & + \sum [\bar{T}_2 \bar{v}(B^-) - \bar{T}_2 \bar{v}(B^-) + \bar{T}_2 \bar{v}(B^+) - \bar{T}_2 \bar{v}(B^+)] + \\ & + \sum [\bar{G}_1 \bar{v}_1(C) - \bar{G}_1 \bar{v}(C) + \bar{G}_2 \bar{v}(D) - \bar{G}_2 \bar{v}(D)] \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первую сумму распространим на все контакты кроме граничных (вида A^0 , см. рис. 5.8, рис. 5.11), где силы равны $\pm \bar{T}_1$. Аналогично вторую сумму отнесем к контактам $\pm \bar{T}_2$, кроме граничных вида B^0 . Последнюю сумму распространим на точки соприкосновения зерен с цементирующим материалом. Перегруппируем теперь слагаемые так, чтобы выделить работу, диссипированную на контактах. Очевидно, что

$$\bar{T}_1 \bar{v}(\bar{A}^+) - \bar{T}_1 \bar{v}(A^-) + \bar{T}_2 \bar{v}(B^+) - \bar{T}_2 \bar{v}(B^-) = \bar{T}_i \cdot \bar{R}_i = t_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^R \cdot 4l^2. \quad (3.2)$$

Выделим теперь слагаемые, которые отвечают за энергию деформирования зерен. Вначале энергия, которая поступает через контакты с соседними зернами (см. рис. 5.10):

$$\bar{T}_1 \bar{v}(B_1) - \bar{T}_1 \bar{v}(A_1) + \bar{T}_2 \bar{v}(B_2) - \bar{T}_2 \bar{v}(A_2) = t_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^t \cdot 4l^2. \quad (3.3)$$

Аналогично для энергии, поступающей от цементирующего материала:

$$\bar{G}_1 \bar{v}(B_3) - \bar{G}_1 \bar{v}(A_3) + \bar{G}_2 \bar{v}(B_4) - \bar{G}_2 \bar{v}(A_4) = \tau_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^t \cdot 4(l')^2. \quad (3.4)$$

Для самого цементирующего материала, заключенного в одной поре (см. рис. 5.12), имеем

$$\bar{G}_1 \bar{v}(A_3) - \bar{G}_1 \bar{v}(B_3) + \bar{G}_2 \bar{v}(A_4) - \bar{G}_2 \bar{v}(B_4) = p_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^{\Pi} \cdot 4p^2. \quad (3.5)$$

Займемся теперь основным вопросом — преобразованием слагаемых, которые относятся к границам элементарного объема. Например, в сумме (3.1) присутствуют следующие слагаемые (см. рис. 5.8, рис. 5.11):

$$\bar{G}_2 \bar{v}(H_1) + \bar{T}_2 \bar{v}(H_2) + \bar{G}_1 \bar{v}(H_3). \quad (3.6)$$

Эти слагаемые относятся к граничной „получастице“ с центром в точке H . При введении всех кинематических тензоров центр частицы всегда выступал как одна из базисных точек. Поэтому скорости во всех точках H_1, H_2, H_3 равны скорости в центре, плюс слагаемые, равные локальному градиенту, умноженному на расстояние до центра:

$$\begin{aligned}\bar{v}(H_1) &= \bar{v}(H) + \frac{l'}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{21}^{\tau} - \varepsilon_{11}^{\tau})\bar{e}_1 + \frac{l'}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{22}^{\tau} - \varepsilon_{12}^{\tau})\bar{e}_2, \\ \bar{v}(H_2) &= \bar{v}(H) + l\varepsilon_{21}'\bar{e}_1 + l\varepsilon_{22}'\bar{e}_2, \\ \bar{v}(H_3) &= \bar{v}(H) + \frac{l'}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11}^{\tau} + \varepsilon_{21}^{\tau})\bar{e}_1 + \frac{l'}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{12}^{\tau} + \varepsilon_{22}^{\tau})\bar{e}_2.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Подставим (3.7) в (3.6) и выделим из (3.7) основную часть:

$$(\bar{G}_2 + \bar{T}_2 + \bar{G}_1) \cdot \bar{v}(H).$$

Согласно (2.22), выражение в скобках оказалось пропорциональным макронапряжению $\bar{\sigma}_n$, которое действует на площадке с нормалью $\bar{n} = \bar{e}_2$:

$$\bar{G}_2 + \bar{T}_2 + \bar{G}_1 = (\sigma_{21}\bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2) \cdot 2l. \quad (3.8)$$

Следовательно, выражение (3.6) можно записать так:

$$\bar{G}_2\bar{v}(H_1) + \bar{T}_2\bar{v}(H_2) + \bar{G}_1\bar{v}(H_3) = (\sigma_{21}\bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2) \cdot 2l\bar{v}(H) + \dots \quad (3.9)$$

Точками отмечены невыписанные слагаемые, которые учитывают различие скорости в центре частицы и на контуре (см. равенства (3.7)). Ниже будет видно, что ими можно пренебречь.

В тождестве (3.1) есть также члены, которые относятся к граничной частице с центром в точке K (см. рис. 5.8). Для нее

$$-\bar{G}_1\bar{v}(K_1) - \bar{T}_2\bar{v}(K_2) - \bar{G}_2\bar{v}(K_3) = -(\sigma_{21}\bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2) \cdot 2l \cdot \bar{v}(K) + \dots \quad (3.10)$$

При сложении выражений (3.9), (3.10) выделяется разность $\bar{v}(K) - \bar{v}(H)$, которая относится уже ко всему элементарному объему. Для ее преобразования необходимо прибегнуть к понятию макродеформации. Пусть элемент среды имеет размеры $L_1 \times L_2$ и $(N_1 - 1)$, $(N_2 - 1)$ — число полных зерен вдоль осей Ox_1, Ox_2 , $L_1 = 2l \cdot N_1$, $L_2 = 2l \cdot N_2$. Согласно (1.3), (1.4),

$$\bar{v}(K) - \bar{v}(H) = (\varepsilon_{21}\bar{e}_1 + \varepsilon_{22}\bar{e}_2) \cdot L_2. \quad (3.11)$$

Учитывая последний результат, сумму выражений (3.9) и (3.10) легко преобразовать к следующему виду:

$$-(\sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}) \cdot 2l \cdot L_2.$$

Аналогичный результат получается и для границ $x_1 = 0, L_1$. Это, пожалуй, основной момент. Здесь видно, как из тождества (3.1), записанного исключительно для внутренних переменных, естественным образом выделяются слагаемые, которые относятся уже к макропеременным.

Не представляет трудностей подсчитать число зерен, контактов и пор внутри элемента. Так как деформирование однородно, то полученные выше выражения нужно умножить на соответствующие коэффициенты. Тогда тождество (3.1) можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) \cdot 4l^2 N_1(N_2 - 1) + (\sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}) 4l^2 N_2(N_1 - 1) = \\ & = t_{ij}\varepsilon_{ij}^R \cdot 4l^2(N_1 - 1)(N_2 - 1) + \tau_{ij}\varepsilon_{ij}^\tau \cdot 4(l')^2(N_1 - 1)(N_2 - 1) + \\ & + p_{ij}\varepsilon_{ij}^\Pi \cdot 4\rho^2 \cdot N_1 \cdot N_2 + t_{ij}\varepsilon_{ij}^t \cdot 4l^2(N_1 - 1)(N_2 - 1) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь точки имеют прежний смысл и еще сюда отнесены четыре слагаемых, которые соответствуют частицам в углах. Разделим обе части равенства (3.12) на $L_1 L_2 = 4l^2 \cdot N_1 \cdot N_2$, и устремим (при $m = \text{const}$), $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (возможно, за счет $l, l' \rightarrow 0$). Тогда невыписанные слагаемые стремятся к нулю. В пределе окончательно получим

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = t_{ij}\varepsilon_{ij}^t + t_{ij}\varepsilon_{ij}^R + 2m^2 p_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^\Pi + 2(1 - m)^2 \tau_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^\tau. \quad (3.13)$$

Это и есть основное энергетическое тождество. Оно показывает, что суммарная энергия микродеформаций зерен, цементирующего материала и скольжения по контактам сводится к работе макронапряжений на микродеформациях.

Если в (3.13) подставить условия совместности

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^R, \quad \varepsilon_{ij} = (1 - m)\varepsilon_{ij}^\tau + m\varepsilon_{ij}^\Pi, \\ \sigma_{ij} &= t_{ij} + 2(1 - m)\tau_{ij}, \quad \sigma_{ij} = t_{ij} + 2mp_{ij}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

то оно обратится в тождество. Этот факт служит аргументом в пользу корректности всех введенных понятий и самих условий совместности. Из него можно получить ряд полезных следствий. Отметим попутно, что, поскольку все тензоры напряжений симметричны, в равенстве (3.13) присутствуют только симметричные части кинематических тензоров.

Пусть t — время (всегда будет ясно, где t — время и где t — тензор микронапряжений). Тогда $\varepsilon_{ij} dt = dE_{ij}$ — приращение градиента смещений. Из (3.14)

$$\begin{aligned} dE_{ij} &= dE_{ij}^t + dE_{ij}^R, \\ dE_{ij} &= (1 - m)dE_{ij}^\tau + mE_{ij}^\Pi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В тех случаях, когда эти соотношения можно проинтегрировать,

$$E_{ij} = E_{ij}^t + E_{ij}^R, \quad E_{ij} = (1 - m)E_{ij}^\tau + mE_{ij}^\Pi. \quad (3.16)$$

Напротив, там, где можно перейти к приращениям в условиях для напряжений, имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= dt_{ij} + 2(1 - m)d\tau_{ij}, \\ d\sigma_{ij} &= dt_{ij} + 2mdp_{ij}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Теперь, как следствие, получаем следующие тождества: для работы

$$\sigma_{ij}E_{ij} = t_{ij}E_{ij}^t + t_{ij}E_{ij}^R + 2m^2 p_{ij}E_{ij}^\Pi + 2(1 - m)^2 \tau_{ij}E_{ij}^\tau, \quad (3.18)$$

дополнительной работы

$$E_{ij}d\sigma_{ij} = E_{ij}^t dt_{ij} + E_{ij}^R dt_{ij} + 2m^2 E_{ij}^\Pi dp_{ij} + 2(1-m)^2 E_{ij}^\tau d\tau_{ij}, \quad (3.19)$$

работы дополнительных напряжений на дополнительных деформациях:

$$d\sigma_{ij}dE_{ij} = dt_{ij}dE_{ij}^t + dt_{ij}dE_{ij}^R + 2m^2 dp_{ij}dE_{ij}^\Pi + 2(1-m)^2 d\tau_{ij}dE_{ij}^\tau, \quad (3.20)$$

и, наконец, работы напряжений на дополнительных деформациях:

$$\sigma_{ij}dE_{ij} = t_{ij}dE_{ij}^t + t_{ij}dE_{ij}^R + 2m^2 p_{ij}dE_{ij}^\Pi + 2(1-m)^2 \tau_{ij}dE_{ij}^\tau. \quad (3.21)$$

Полученные результаты могут быть использованы для построения и анализа математических моделей.

5.2.4. Замкнутые системы уравнений

Будем действовать в рамках обычных определений механики сплошной среды. Это означает, что размеры элементарного объема необходимо устремить к нулю. В пределе получим некоторый континуум, каждая точка которого наделена структурой. Здесь уже можно допустить наличие инерционных и других массовых сил. На доказательстве того, что напряжения (2.21) образуют тензор, массовые силы уже не скажутся.

Выше система координат Ox_1x_2 связывалась с ориентацией структуры элементарного объема. Следовательно, в общем случае она будет играть роль локальных координат в точке. Введем теперь „глобальную“ систему Oxy , в которой будем рассматривать деформируемое тело целиком. Распределение напряжений и других переменных будет, вообще говоря, неоднородным. Все переменные будут зависеть от x, y и времени t .

Подсчитаем, теперь сколько переменных может фигурировать в определяющих уравнениях. Основной критерий здесь один — это инвариантность всех уравнений относительно поворота тела как жесткого целого. Выделим из тензоров (1.12) их симметричные части:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}}{2}, \quad e_{ij}^\Pi = \frac{\varepsilon_{ij}^\Pi + \varepsilon_{ji}^\Pi}{2}, \quad e_{ij}^t = \frac{\varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ji}^t}{2}, \\ e_{ij}^\tau &= \frac{\varepsilon_{ij}^\tau + \varepsilon_{ji}^\tau}{2}, \quad e_{ij}^R = \frac{\varepsilon_{ij}^R + \varepsilon_{ji}^R}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Очевидно, что инвариантными будут скорости деформаций (4.1), переменная ω_R из (1.13), а также любая из разностей скоростей микровращений (1.10). (Последнюю возможность оставим в резерве.) Таким образом, общее число неизвестных равно тридцати:

$$\begin{aligned} v_x, v_y, e_{xx}, e_{xx}^t, e_{xx}^\tau, e_{xx}^\Pi, e_{xx}^R, \omega_R, \\ \sigma_{xx}, t_{xx}, \tau_{xx}, p_{xx}(x, y), \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $v_x, v_y, e_{xx} \dots$ — компоненты в декартовых координатах Oxy . Для сокращения записей здесь и ниже указывается только одна компонента, например e_{xx} вместо e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} .

Теперь об уравнениях. Во-первых, в процессе деформирования должны выполняться уравнения движения и условия сплошности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X &= \rho \frac{dv_x}{dt}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = \rho \frac{dv_y}{dt}, \\ e_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где X, Y — компоненты объемных сил, ρ — плотность. Далее, отметим, что все условия совместности (3.14) являются линейными и записаны в локальных координатах Ox_1x_2 . Формулы перехода к системе Oxy также линейны. Поэтому из (3.14) следует двенадцать уравнений вида:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_{xx}^t + e_{xx}^R, \quad e_{xx} = (1-m)e_{xx}^t + me_{xx}^\Pi, \quad \dots \\ \sigma_{xx} &= t_{xx} + 2(1-m)\tau_{xx}, \quad \sigma_{xx} = t_{xx} + 2mp_{xx}, \quad \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система (4.3), (4.4) носит общий характер и свойства среды еще не конкретизирует.

Перейдем теперь к собственно определяющим уравнениям. Вначале о цементирующем материале. Естественнo принять, что его деформированное состояние полностью определяется действующими в нем напряжениями. Можно записать, что

$$e_{xx}^\Pi = \Pi_{xx}(p), \quad \dots \quad (4.5)$$

Для сокращения записей здесь и ниже указывается только одно из трех уравнений. Кроме того, под аргументом p понимается три скалярных аргумента p_{xx}, p_{yy}, p_{xy} . Уравнения (4.5) могут связывать скорости деформации с напряжениями, как это записано выше, скорости деформации и скорости напряжений и т. д. Возможны также случаи, когда одно из уравнений (4.5) связывает только компоненты напряжений, например, при идеально пластическом течении

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2 = 4k^2, \quad k = \text{const},$$

либо только скорости деформаций, например, $e_{xx} + e_{yy} = 0$ (несжимаемость) и т. д. Главным в (4.5) является указание на то, что должны быть три определяющих уравнения, описывающие поведение цементирующего материала.

С уравнениями для зерен ситуация сложнее. Здесь действуют две системы сил: через контакты с другими зернами и со стороны цементирующего материала. Каждая из этих систем вызывает деформации во всех направлениях. Поэтому должно быть шесть уравнений

$$e_{xx}^t = A_{xx}(t, \tau), \quad e_{xx}^\tau = B_{xx}(t, \tau), \quad \dots \quad (4.6)$$

Теперь о взаимодействии между зернами. Ясно, что скольжение по ним (нормальные разрывы также не исключаются) должно определяться соответствующими усилиями. Так, в локальных координатах

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^R &= \Lambda_{11}(t_{11}, t_{12}), \quad \varepsilon_{22}^R = \Lambda_{22}(t_{22}, t_{21}), \\ \varepsilon_{12}^R &= \Lambda_{12}(t_{11}, t_{12}), \quad \varepsilon_{21}^R = \Lambda_{21}(t_{22}, t_{21}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если контакты из различных семейств работают одинаково, то $\varepsilon_{12}^R = \varepsilon_{21}^R$ и $\omega_R \equiv 0$. Если же нет, то $\omega_R \neq 0$ или, как видно из (1.13), (4.7)

$$2\omega_R = \Lambda_{12}(t_{11}, t_{12}) - \Lambda_{21}(t_{22}, t_{21}). \quad (4.8)$$

В общем случае для перехода к переменным x, y необходимы сведения об ориентации локальных координат Ox_1x_2 относительно Oxy . Предположим, что такие данные всегда есть. Тогда из (4.7) можно получить четыре уравнения в системе Oxy :

$$\omega_R = \Lambda_\omega(t), e_{xx}^R = \Lambda_{xx}(t), \dots \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться, что баланс уравнений сошелся: на 30 неизвестных переменных (4.2) выписаны следующие 30 уравнений: пять уравнений (4.3), двенадцать — (4.4), три уравнения (4.5), шесть уравнений (4.6) и четыре уравнения (4.7). Разделим замкнутую систему на две подсистемы: (4.4)—(4.7) и (4.3). Первая объединяет все уравнения, которые описывают поведение элементарного объема среды. Вторая позволяет переходить к решению краевых задач, т. е. позволяет исследовать неоднородные распределения напряжений и деформаций. Если обратиться к модели линейно-упругого тела, то первая подсистема соответствует закону Гука, связывающему напряжения и деформации, вторая — это обычные уравнения движения и сплошности (в форме соотношений Коши).

Если вначале интересоваться не краевыми задачами, а только возможностями самой модели, то необходимо исследовать систему (4.4)—(4.7). При этом три переменные должны быть заданы. Это могут быть компоненты скоростей деформаций $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}(t)$ („жесткое нагружение“), компоненты напряжений („мягкое нагружение“), либо определенные их комбинации. Например, если программа нагружения осуществляется по напряжениям, т. е. заданы функции $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}(t)$, то для определения реакции среды необходимо исследовать замкнутую систему 25 уравнений (4.4)—(4.7) относительно следующих 25 неизвестных:

$$\begin{aligned} e_{xx}^I, e_{xx}^T, e_{xx}^{\Pi}, e_{xx}^R, t_{xx}, \tau_{xx}, p_{xx}, \omega_R, \dots \\ e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Эта система содержит только конечные уравнения и ее исследование возможно элементарными методами. Для решения краевых задач приведенные выше уравнения необходимо конкретизировать.

§ 5.3. СТРУКТУРНО-ДИЛАТАНСИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Для реальных твердых материалов, какими являются горные породы, металлы, сплавы и композиты, важной прочностной характеристикой является отношение предельных величин напряжений при разрушении одноосным сжатием и одноосным растяжением. Получила широкое распространение теория Гриффитса, которая поясняет, что при одноосном сжатии материал может быть значительно прочнее, чем тот же самый материал при одноосном растяжении.

В работе [228] сделана попытка уточнить критерий Гриффитса для хрупких материалов типа горных пород за счет учета концентрации напряжений на сферических порах. В какой-то мере введение в рассмотрение пор, включений или трещин можно считать учетом структуры материала. Полученные выше результаты позволяют подойти к учету структуры и ее влиянию на прочность с другой позиции [28].

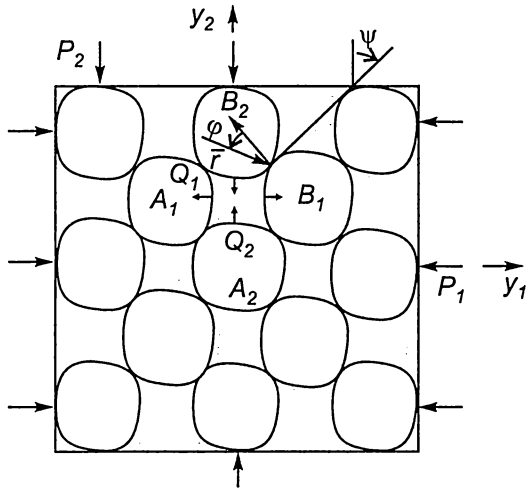


Рис. 5.14

Как известно, во все формулы для определения прочности горных пород внутреннее трение и сцепление входят аддитивным образом. Неформальное понимание этого факта совсем неочевидно. Образ внутреннего трения — шероховатая поверхность и тяжелое тело на ней, сцепления — это клеевое соединение между ними. Если тело смещать, что вначале должен разрушиться клей, а уже затем мобилизоваться трение. Но это означает, что общая прочность определяется не суммой двух слагаемых, а всего лишь наибольшим из них. Таким образом, интерпретация аддитивности должна быть основана на модели, допускающей параллельное соединение элементов трения и сцепления. Попытаемся развить эту посылку.

Рассмотрим вопрос о предельных нагрузках. Ограничимся самой простой схемой, когда число параметров минимально. Предположим, что среда изотропна, микровращение отсутствует и ориентация эффективной упаковки элементов трения определяется только направлением главных напряжений. Результаты § 5.2 позволяют проводить все построения, используя в качестве исходных модели типа показанных на рис. 5.14, причем на первом этапе эти модели можно понимать именно буквально, как реальные физические. Последующие операции осреднения, выбора замыкающих уравнений и характеристик среды позволяют дать феноменологическое описание уже реальных ситуаций.

Обозначим через ψ угол между касательной к контакту и направлением y_2 , $\nu = \pi/4 - \psi$. Если элементы A_1, B_1 сближать, то элементы A_2, B_2 будут удаляться. При этом объем порового пространства (а значит, и всей упаковки) будет меняться. Дилатансионное соотношение имеет вид $\varepsilon = \operatorname{tg} \nu \cdot \gamma$, где ε, γ — скорости изменения объема и сдвига. Пусть $P_1 \geq P_2$ — усилия сжатия вдоль осей. Им противостоят усилия на контактах и усилия Q_1, Q_2 , которые предаются на материал в поровом пространстве, т. е. на элемент сцепления. По обычным правилам векторного проектирования $(P_2 + Q_2)/(P_1 - Q_1) = \operatorname{tg}(\psi - \varphi)$. Переходя к континуальным напряжениям по схеме § 5.2, получим

$$\frac{\sigma_2 - g_2}{\sigma_1 + g_1} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} - (\varphi + \nu) \right] = \xi, \quad (1)$$

где σ_1, σ_2 — главные напряжения, причем сжатие, как и в теории пластичности, отвечают отрицательные значения; g_1, g_2 — напряжения, соответствующие силам Q_1, Q_2 . Отсюда

$$\begin{aligned} \tau &= -\operatorname{tg}(\varphi + \nu)\sigma + c, \quad c = \frac{\xi g_1 + g_2}{1 + \xi}, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Структура характеризуется углом дилатансии ν . Буквальный смысл параметра ξ следующий: если из горной породы удалить цементирующие вещества, не изменив при этом расположения зерен, то величина ξ будет равна коэффициенту бокового распора полученной сыпучей среды (см. § 6.6). Из формулы (2) видно, что наблюдаемое сцепление зависит не только от прочности самих элементов сцепления среды, но и от ее структуры и внутреннего трения. Структура влияния и на „угол внутреннего трения“, если последний определять, как обычно, через $\arcsin(\partial\tau / \partial\sigma)$.

При сочетаниях напряжений, когда сжимающие усилия на контакте отсутствуют, внутреннее трение не проявляется. Предположим, что одноосное растяжение принадлежит к одному из таких сочетаний. Тогда величину g_2 можно отождествить с пределом прочности на растяжение σ_p . Из (1) следует, что прочность на одноосное сжатие — $\sigma_1 = \sigma_{сж} > 0$ должна равняться $\sigma_{сж} = g_1 + \sigma_p / \xi$. Формула предсказывает различие в прочности на растяжение и сжатие. В простейшем варианте $g_1 = \sigma_p$ и

$$\sigma_{сж} = (1 + 1/\xi)\sigma_p. \quad (3)$$

Видно, что структурная прочность может быть неограниченной: если $\varphi + \nu \rightarrow \pi/4$, то $\xi \rightarrow 0$ и $\sigma_{сж} \rightarrow \infty$ при любой, отличной от нуля прочности связующего материала. Парадокса здесь нет. Указанный результат означает, что прочность в целом обеспечивается не по самому слабому, а по наиболее крепкому звену — структурным элементам трения.

Перейдем к экспериментальным результатам. Вначале рассмотрим опыты на искусственных образцах из песка, поровое пространство в котором заполнялось парафином или канифолью. Такой путь был выбран из следующих соображений. Во-первых, здесь механизм деформирования наиболее близок к принятому в модели; во-вторых, параметр ξ для подобных материалов можно определить независимо от соотношения (3) по измерению коэффициента бокового распора сыпучей среды подходящей структуры. И, наконец, для искусственных образцов большинство привходящих факторов (например, наличие трещин) можно практически исключить.

Опыты показали, что прочность на сжатие существенно зависит от формы частиц и плотности их упаковки, т. е. структуры образца. Так, при уменьшении пористости от 30 до 24% прочность возрастает от 3,4 до 4,4 МПа для образцов на основе парафина и от 12,7 до 16,5 МПа на основе канифоли. Значения ξ , измеренные непосредственно, меняются от 0,15 до 0,27. Средняя прочность на растяжении парафина равна 1,7, канифоли 3,5 МПа. Сравнение расчетных значений прочности с опытными подтверждает формулу (3) качественно и вполне удовлетворительно количественно: в ряде опытов отклонения были 5%, максимальные отклонения — 30%.

Обратимся к кристаллическим горным породам. Как известно, их структура представлена зернами различной крупности, которые объединены цементирующей массой. В этом отношении она аналогична структуре рассмотренных образцов. Если учесть, что прочность пород увеличивается с уменьшением размера зерен и повышением плотности их упаковки [229], то можно сделать вывод, что прочность горных пород также связана с дилатансией. Сделаем оценку для показателя $\sigma_{сж} / \sigma_p$ по формуле (3). По данным [230] характерные значения наблюдаемого угла трения составляют 35—40°. Из (2) следует, что $\varphi + \nu = 30 - 33^\circ$. Тогда по (3) $\sigma_{сж} / \sigma_p \sim 5 - 6$, что в общем согласуется с фактическими данными.

Рассмотренный выше эффект является только одним из элементарных следствий модели, изложенной в § 5.2. Модель позволяет описать весьма широкий класс свойств горных пород и горного массива в целом. Ее формулировка в виде замкнутой системы уравнений, то есть в виде замкнутой математической модели позволяет ставить и численно исследовать различные краевые задачи, в том числе и прикладные задачи горного дела. Одна из таких задач рассмотрена в [48].

Необходимость решения подобного рода задач связана со следующим. Если отвлечься от технологических вопросов, то в целом процесс добычи твердых полезных ископаемых сводится к тому, что некоторый объем полезного ископаемого, который изначально находится на определенной глубине, извлекается оттуда и транспортируется на переработку. При этом полость, которая образуется в результате, или часть ее должны определенное время поддерживаться в устойчивом состоянии (по крайней мере, до тех пор, пока в самой полости или вблизи нее ведутся работы). Один из способов поддержания полости состоит в том, что в ней оставляются перемычки и колонны (целики), способные воспринимать сжимающие нагрузки. Со временем целики деформируются и разрушаются. Исследование этого процесса является одной из важных задач горного дела. В работе [48] рассмотрена задача о деформировании и постепенном разрушении целика в рамках уравнений § 5.2.

Глава 6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 6.1. НЕКОТОРЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Как известно, методы прикладной математики и механики по своему стилю существенно отличаются от методов теоретической математики. Большинство гипотез, принимаемых при исследовании сложных задач механики, всегда носит не строгий, а только более или менее правдоподобный характер. Это в полной мере относится как к математическим моделям, так и к выбору постановок тех или иных конкретных задач. Причем такой подход следует отнести к бесспорным достоинствам прикладных теорий, а не к их недостаткам. Именно благодаря этим чертам удастся продвинуться в решении сложных задач [171, 172].

Здесь особенно важной становится проблема адекватности теоретических построений. В условиях, когда нет полной ясности относительно возможностей той или иной модели, когда, как правило, отсутствуют доказательства теорем существования (а иногда и единственности), весьма полезным является набор некоторых достаточно простых задач, которые могут быть использованы как тестовые. В качестве теста могут использоваться также те или иные экспериментальные данные.

В настоящей книге ограничимся только тестами, которые связаны с однородными процессами деформирования, описанными в главе 1, или с процессами, близкими к однородным. Вначале рассмотрим эллиптические течения. Очевидно, что если взять эллиптическую область и на ее границе задать кеплеровское распределение скоростей, то необходи-

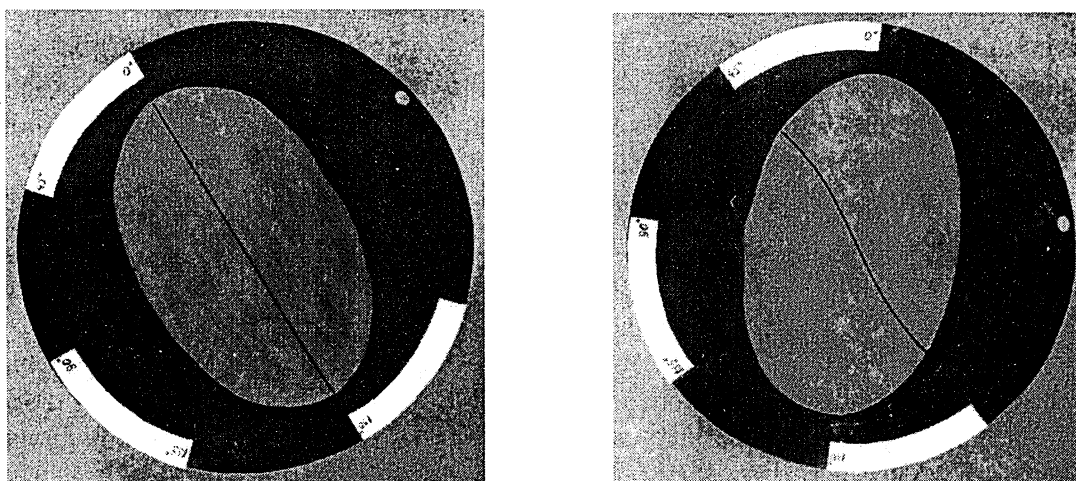


Рис. 6.1

мым условием корректности любой математической модели, а также соответствующего численного метода ее реализации будет однородность деформаций внутри области (если есть устойчивость и нет сил инерции). В данной задаче реализуются большие повороты, а для вытянутых эллипсов — и большие деформации. Поэтому такой тест будет далеко не тривиальным. Для трехмерных уравнений можно использовать также другие существенно трехмерные области и краевые условия, описанные в главе 1.

Более сложной будет ситуация, если рассматривается плоская деформация и на границе эллиптической области задается вектор скорости, постоянный по величине. Корректная модель упругого тела и метод пошагового решения упругих задач с большими поворотами и деформациями всегда должны приводить к тому, что за полный оборот граничных точек все внутренние точки области должны строго вернуться в свое первоначальное положение, а напряжения — к своим первоначальным значениям. (Например, к нулю). В работе [34] построены уравнения для описания конечных деформаций анизотропного упругого тела, а также реализована указанная выше программа тестирования. На рис. 6.1 показан результат эксперимента по деформированию резиновой пленки, натянутой на гибкий эллиптический цилиндр. Картина близка к расчетной [34].

В работах [35—37] результаты, описанные в главах 1—3, использовались для тестирования гипопластических моделей [145] при различных путях нагружения, включая нагружения с изломами траекторий.

§ 6.2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Идея построенных ниже решений возникла таким образом. В качестве исходного рассматривалось решение задачи о вдавливании гладкого жесткого штампа в идеально пластическую среду. Как известно, это решение склеивается из двух: первое из них соответствует однородному распределению напряжений, второе — решению типа центрированной волны. В этом решении одно из семейств линий скольжения λ_2 представляет собой пучок прямых, исходящих из одной точки, а другое семейство — дуги окружностей λ_1 , ортогональные к линиям λ_2 . Это решение является классическим, и в нем все предельно ясно (первая посылка).

Вторая посылка была следующей. Из общей теории хорошо известно, что линии скольжения в идеально пластической среде образуют ортогональную сетку. Обратное, конечно, неверно: не любая ортогональная сетка соответствует решению уравнений идеальной пластичности. Последнее следует из квазилинейности уравнений. Для квазилинейных систем конфигурация характеристик (линий скольжения) зависит от решения. Поэтому по известной сетке линий все решение восстанавливается достаточно просто. Следовательно, в самой геометрии линий скольжения содержится вся информация о решении. Это в свою очередь означает, что можно искать точные решения на „языке“ геометрии линий скольжения.

Третья посылка является самой главной. Посмотрим на решение типа центрированной волны с несколько иной точки зрения. А именно, линии λ_2 , которые образуют центрированный пучок прямых, будем рассматривать не как линии скольжения, а как радиусы-векторы в полярной системе координат (r, θ) . Тогда вся геометрия сетки линий скольжения определится единственной функцией δ , имеющий смысл угла между линией λ_1 и поляр-

ным радиусом r . Поэтому есть уверенность в том, что все уравнения идеальной пластичности можно свести к одному уравнению относительно единственной неизвестной функции δ . Это уравнение заведомо имеет, по крайней мере, одно точное решение: $\delta \equiv \pi/2$. Именно такому тождеству и отвечает решение типа центрированной волны. Иными словами, классическое решение однозначно характеризуется одним и чрезвычайно простым условием: $\delta \equiv \pi/2$.

Указанные посылки приводят к следующей идее: свести уравнения идеальной пластичности к одному уравнению относительно δ и попытаться найти его точные решения. По крайней мере, заранее известно, что одно такое решение есть: $\delta \equiv \pi/2$.

Теперь о реализации идеи. Поскольку δ — это угол между линией скольжения и полярным радиусом, то естественно было в качестве независимых переменных принять полярные координаты. Вначале автор так и сделал и получил соответствующие классы точных решений. Потом оказалось, что все эти решения были построены ранее Гартманом и другими авторами [199]. Но поскольку все построения были сделаны независимо, то казалось, что на этом пути должны быть еще какие-то классы точных решений. Они были получены таким образом [39].

Переменная δ , как отмечалось, имеет смысл угла между линией скольжения λ_1 и полярным радиусом r . Но ведь ниоткуда не следует, что именно r и θ должны играть роль независимых переменных. В качестве последних можно взять и характеристические переменные (λ_1, λ_2) . В этом случае придем к уравнению относительно δ как функции от λ_1, λ_2 . Интегралы этого уравнения и привели к новым точным решениям, которые рассматриваются ниже.

1. Рассмотрим плоскую деформацию идеально пластической среды. Пусть (x_1, x_2) — декартовы координаты на плоскости Ox_1x_2 ; (λ_1, λ_2) — характеристические координаты; σ — первый инвариант тензора напряжений; φ — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси Ox_1 , k — постоянная материала. В принятых обозначениях уравнения предельного равновесия среды имеют вид [209]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} &= 0, \quad \frac{1}{2k} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} &= \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Введем в плоскости Ox_1x_2 полярные координаты (r, θ) и новую неизвестную функцию δ — угол между координатными линиями $\theta = \text{const}$; $\lambda_2 = \text{const}$. Из уравнений (1.1) и определения δ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} &= \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} = -\operatorname{tg} \delta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2}, \\ \varphi &= \Phi_1(\lambda_1) - \Phi_2(\lambda_2), \quad \theta = \varphi - \delta - \frac{\pi}{4} = \Phi_1(\lambda_1) - \Phi_2(\lambda_2) - \delta - \frac{\pi}{4}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\Phi_1(\lambda_1)$, $\Phi_2(\lambda_2)$ — произвольные функции. Исключая из системы (1.2) r и θ , можно получить одно уравнение относительно δ

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \ln |\operatorname{tg} \delta| + \Phi'_2(\lambda_2) \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1} \operatorname{tg} \delta - \Phi'_1(\lambda_1) \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2} \operatorname{ctg} \delta = 0.$$

Будем искать решение последнего уравнения в классе функций $\operatorname{tg} \delta = \xi_1(\lambda_1) / \xi_2(\lambda_2)$. Если $c_1 \Phi_1 + c_2 \geq 0$; $c_1 \Phi_2 + c_3 \geq 0$, где c_1, c_2, c_3 — постоянные, то в рассматриваемом классе решение имеет вид

$$\delta = \pm \arctg \sqrt{\frac{c_1 \Phi_1 + c_2}{c_1 \Phi_2 + c_3}}. \quad (1.3)$$

При $c_1 = 0$ линиями скольжения λ_1, λ_2 являются либо два семейства логарифмических спиралей, либо два семейства координатных линий $r = \text{const}$; $\theta = \text{const}$. Этот вариант рассмотрен в [209]. При $c_1 \neq 0$ можно без ограничения общности положить $c_1 = 1$; $c_2 = c_3 = 0$; $\Phi_1(\lambda_1) = \lambda_1^2 = \mu_1$; $\Phi_2(\lambda_2) = \lambda_2^2 = \mu_2$, где $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. После подстановки (1.3) в (1.2) и (1.1) уравнения (1.1) легко интегрируются:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2k} &= \rho^2 + \sigma^0, \quad \varphi = \rho^2 \cos 2\nu + \frac{\pi}{2} + \varphi^0, \\ r &= \frac{2r^0}{\rho \sin 2\nu} e^{\pm \rho^2 \sin 2\nu}, \quad \theta = \rho^2 \cos 2\nu \mp \left(\frac{\pi}{2} - \nu \right) + \frac{\pi}{4} + \varphi^0, \\ \delta &= \pm \left(\frac{\pi}{2} - \nu \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где (ρ, ν) — полярные координаты в плоскости параметров (μ_1, μ_2) ; r^0, φ^0 — постоянные, отражающие произвольность выбора масштаба длин и начала отсчета угла θ ; σ^0 — аддитивное постоянное давление. В дальнейшем будем полагать $r^0 = 1$; $\varphi^0 = 0$; $\sigma^0 = 0$.

Решение (1.4) удобно исследовать в плоскости параметров (μ_1, μ_2) координатные линии μ_1, μ_2 в этой плоскости являются линиями скольжения на физической плоскости Ox_1x_2 угол наклона радиуса $\nu = \text{const}$ к оси μ_2 равен углу пересечения линии скольжения μ_1 на физической плоскости с радиусом $\theta = \text{const}$ и, наконец, квадрат радиуса ρ на плоскости (μ_1, μ_2) равен безразмерному сжатию $\sigma / 2k$ соответствующих точек физической плоскости.

2. Пусть в (1.4) приняты верхние знаки. На однолистной плоскости Ox_1x_2 решение (1.4) может существовать только до линии ветвления $\Delta = \partial(r, \theta) / \partial(\mu_1, \mu_2) = 0$. Линия $\Delta = 0$ удовлетворяет уравнению $\sin 2\nu = 4\rho^2 / (1 + 4\rho^4)$ и состоит из двух ветвей $\rho^2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \nu$, $\rho^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \nu$ (рис. 6.2).

Можно показать, что на плоскости Ox_1x_2 ветвь $\rho^2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \nu$ является огибающей линий скольжения μ_1 и линией возврата семейства μ_2 . Аналогично ветвь $\rho^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \nu$ является огибающей семейства линий скольжения μ_2 и линией возврата семейства μ_1 . Приращение угла θ на плоскости Ox_1x_2 не может быть больше 2π . Поэтому в (1.4) можно рассматривать только такие параметры, при которых приращение θ меньше 2π . Таким образом, рассматривая отображение различных областей на плоскости (μ_1, μ_2) , внутри которых $\Delta \neq 0$ и изменение θ меньше 2π , на плоскость Ox_1x_2 можно получать различные

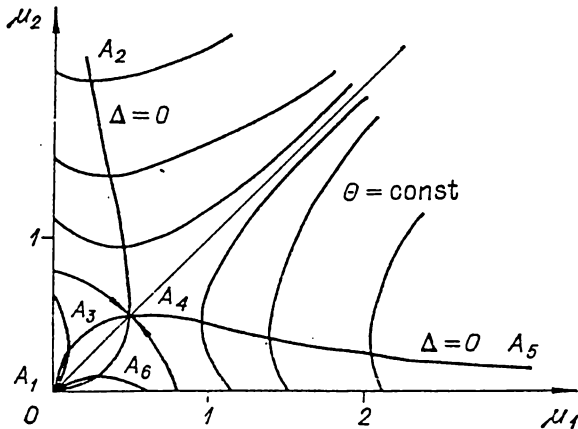


Рис. 6.2

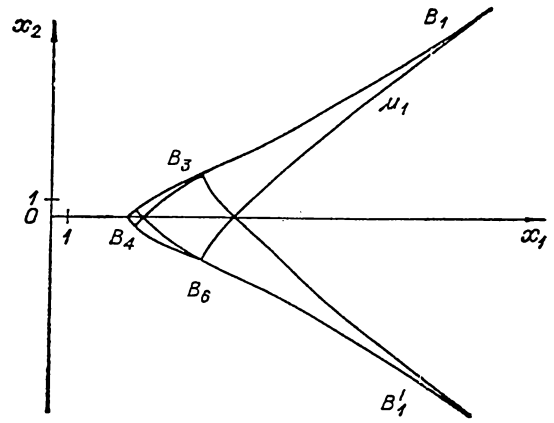


Рис. 6.3

интегралы уравнений (1.1). Полученные интегралы можно интерпретировать как точные решения соответствующих краевых задач.

Построим на плоскости (μ_1, μ_2) линии $\theta = \theta^0 = \text{const}$ и рассмотрим частные решения (1.4). Из (1.4) следует, что области, симметричные на (μ_1, μ_2) относительно биссектрисы $\mu_1 = \mu_2$ плоскости Ox_1x_2 симметричны относительно прямой $\theta = \theta^0$. Если $0 \leq \theta^0 \leq \pi/4$, то линия $\theta = \theta^0$ определена при $0 \leq \nu \leq \pi/4$; $\pi/4 + \theta^0 \leq \nu \leq \pi/2$; если $\theta^0 > \pi/4$, то при $0 \leq \nu \leq \pi/4$. При $\theta = \theta_0 > 0$; $0 \leq \nu < \pi/4$ и $r \rightarrow \infty$ угол $\delta \rightarrow \pi/4$ и давление $\sigma \rightarrow \infty$; если же $0 < \theta^0 < \pi/4$; $\pi/4 + \theta_0 < \nu \leq \pi/2$ и $r \rightarrow \infty$, то $\delta \rightarrow \pi/4 - \theta^0$. Кроме того, $\left. \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \right|_{\theta=\theta^0>0} >$

$> 0 (< 0)$ при $\cos 2\nu \cdot \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \text{ctg} \nu \right) > 0 (< 0)$. Рассмотрим течение, соответствующее на

(μ_1, μ_2) области $A_1A_3A_4A_6A_1$ (рис. 6.2). Область $A_1A_3A_4A_6A_1$ отображается на симметричную клинообразную область $B_1B_3B_4B_6B_1$ (рис. 6.3). Угол раствора клина равен $\pi/2$. Сторона $B_4B_3B_1$ является огибающей семейства линий μ_1 . На участке B_3B_1 $\frac{1}{2} \arccos(1 - \sqrt{5})/2 < \nu < \pi/2$ кривая $B_4B_3B_1$ вогнута, на участке $B_4B_3\pi/4 \leq \nu <$

$< \frac{1}{2} \arccos(1 - \sqrt{5})/2$ выпукла; при $r \rightarrow \infty$ $\theta(B_1) \rightarrow \pi/4$. На сторонах клина действуют постоянное касательное напряжение $\tau = k$ и стремящееся к нулю при $r \rightarrow \infty$ нормальное напряжение. При $x_1 \rightarrow \infty$ напряженное состояние внутри клина стремится к равномерному, линии скольжения стремятся к прямым $x_2 = \pm x_1 + \text{const}$, угол $\varphi \rightarrow \pi/2$ и сжатие $\sigma \rightarrow 0$.

Рассмотрим течения, примыкающие с двух сторон к кривой A_4A_5 и ограниченные этой кривой и линией $\mu_2 = \mu_2^0 = \text{const}$; $0 < \mu_2^0 \leq 1/2$. На физической плоскости эти течения имеют форму рожа. Внутренняя граница течений является огибающей линий скольжения μ_1 , внешняя — одна из линий μ_1 . При $\theta \rightarrow \infty$ внутренняя и внешняя границы стремятся к дугам окружностей. Похожее течение (по Гартману), ограниченное логарифмическими спиралями, приводится в [199].

Рассмотрим течение, примыкающее к прямой $\mu_1 = \mu_2$ ограниченное линиями A_4A_5 , A_4A_2 (рис. 6.2, 6.4). Для определенности значение x_1^0 выберем так, чтобы на плоскости

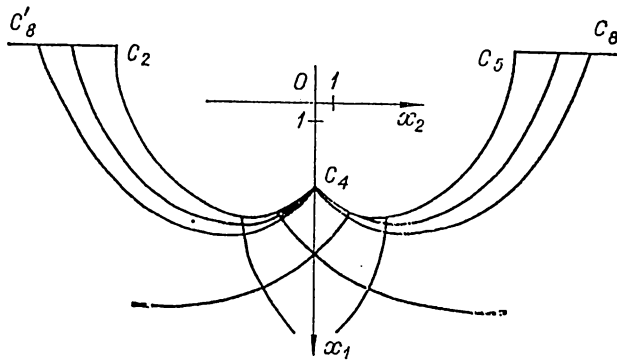


Рис. 6.4

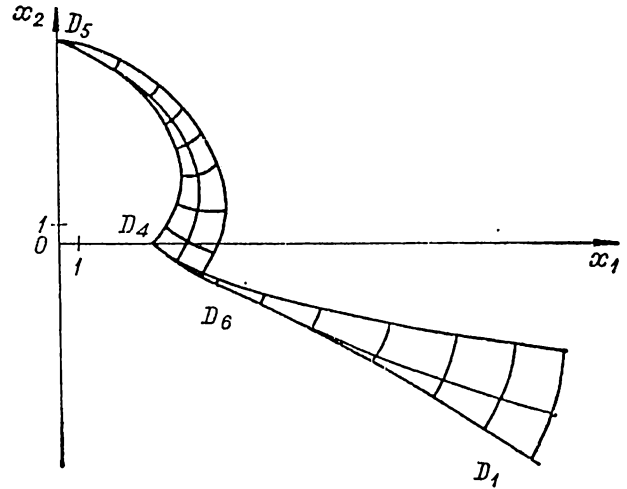


Рис. 6.5

Ox_1x_2 прямая C_5C_8 была нормальна к кривой C_5C_4 . Можно показать, что в точке C_5 $\cos 2\nu = \frac{3}{2}\pi \operatorname{tg} \nu$. На границе C_4C_5 действует постоянное касательное напряжение, на поверхности C_5C_8 при $x_2 \rightarrow \infty$ касательное напряжение быстро убывает ($\delta \rightarrow \pi/4$), а нормальное возрастает ($\rho \rightarrow \infty$). Непосредственно к границе C_4C_5 примыкает течение в виде рожка.

На рис. 6.5 изображены линии скольжения течения, соответствующего области $A_5A_4A_6A_1$ (см. рис. 6.2). Границы D_4D_5 , $D_4D_6D_1$ являются огибающими семейств линий скольжения μ_1, μ_2 . К границе D_4D_5 примыкает течение в виде рожка, к границе $D_4D_6D_1$ — в виде клина.

Далее рассмотрим течения, ограниченные на плоскости (μ_1, μ_2) кривыми A_4A_5 , $\theta = \theta^0$, $\theta = \theta^0 + \psi^0$, $|\psi^0| < 2\pi$ и осью $\mu_2 = 0$. При $\theta^0 \rightarrow \infty$ внутренняя естественная граница течения и все линии скольжения μ_1 стремятся к окружностям, а линии скольжения μ_2 — к радиусам $\theta = \text{const}$. Если течение на (μ_1, μ_2) ограничено кривыми $\theta = \theta^0$, $\theta = \theta^0 + \psi^0$ и условием $\rho^2 \geq 1/2 \operatorname{ctg} \nu$, то при $\theta^0 \rightarrow \infty$ внутренняя граница течения стремится к окружности, а оба семейства линий скольжения при $r \rightarrow \infty$ — к логарифмическим спиралям.

Аналогичные течения реализуются при отображении областей $\mu_1 \leq \mu_2$.

3. Пусть в решении (1.4) приняты нижние знаки. В этом случае действительных линий ветвления нет и в формулах (1.4) можно брать любые параметры, при которых приращение угла θ меньше 2π . Построим в плоскости (μ_1, μ_2) линии $\theta = \theta^0\pi/2 - \alpha_0$. Можно показать, что на плоскости (μ_1, μ_2) линии $\pm\alpha_0$ симметричны относительно биссектрисы $\mu_1 = \mu_2$. Если $|\alpha_0| \leq \pi/4$, то линия $\theta = \theta^0$ проходит через начало координат $\mu_1 = \mu_2 = 0$, причем угол наклона линии в начале координат равен $\pi/4 + \alpha_0$. Если $|\alpha_0| \geq \pi/4$, то линии $\theta = \theta^0$ начинаются в точках $\rho = \sqrt{|\alpha_0| - \pi/4}$, $\nu = 0$ при $\alpha_0 > 0$. При $r \rightarrow \infty$ все линии $\theta = \theta^0$ стремятся к биссектрисе $\mu_1 = \mu_2$ (рис. 6.6).

Область $|\alpha_0| \leq \pi/4$ отображается на четверть плоскость EOF (рис. 6.7). При $x_2 \rightarrow \infty$ напряженное состояние внутри четверть плоскости стремится к равномерному, линии

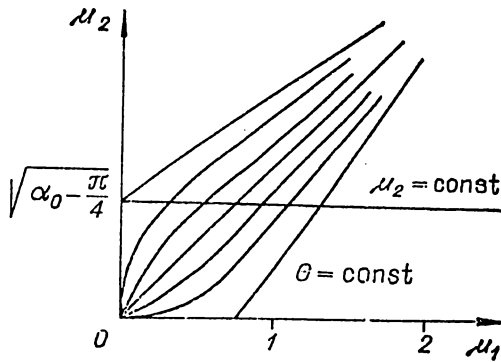


Рис. 6.6

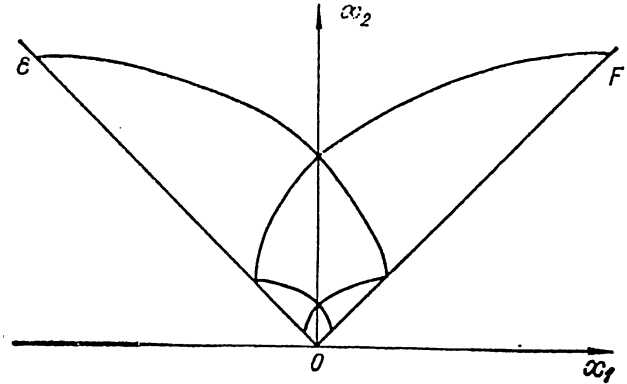


Рис. 6.7

скольжения стремятся к прямым $x_2 = \pm x_1 + \text{const}$, $\varphi \rightarrow \pi/2$ и $\sigma \rightarrow \infty$. Остальные области между кривыми $\theta = \text{const}$ отображаются на соответствующие клинья в плоскости Ox_1x_2 . При $|\alpha_0| > \pi/4$, $\theta = \theta^0$ и $r \rightarrow \infty$ сжатие $\sigma/2k$ стремится к конечной величине $|\alpha_0| - \pi/4$, угол $\varphi \rightarrow \theta^0 + \pi/4$ при $\alpha > 0$ и $\varphi \rightarrow \theta^0 - \pi/4$ при $\alpha_0 < 0$. При $r \rightarrow \infty$ и любом θ^0 линии скольжения стремятся к логарифмическим спиралям $\delta = -\pi/4$, $\varphi \rightarrow \theta^0$, $\sigma \rightarrow \infty$. Линия скольжения $\mu_2 = \mu_2^0 = \text{const}$ при $v \rightarrow 0$ стремится к началу координат $x_1 = x_2 = 0$, при этом угол $\theta \rightarrow \infty$. Если $v \rightarrow \pi/2$, то линия скольжения асимптотически приближается к прямой $\theta = \pi/4 - (\mu_2^0)^2$. Начало координат $x_1 = x_2 = 0$ в данном решении является особой точкой.

4. При необходимости области течений (1.4) можно ограничивать введением жестких зон или граничных поверхностей. Точно так же из решений можно исключать и особые точки.

Напряжениям (1.4) соответствует некоторое распределение скоростей. Предположим, что материал несжимаем и тензоры напряжений и скоростей деформаций соосны. Так как напряжения известны из (1.4), то уравнения для скоростей можно свести к системе телеграфных уравнений в плоскости, отображение которой на физическую плоскость известно. Исследование последних может быть проведено обычными методами с помощью функции Римана [209].

Выпишем теперь уравнения линий скольжения и выражения для напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} в исходной системе координат. В характеристических координатах μ_1, μ_2 решение (1.4) имеет вид

$$\frac{\sigma}{2k} = \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \varphi = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \frac{\pi}{2}, \quad (4.1)$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}{\mu_1 \mu_2} e^{\pm 2\mu_1 \mu_2}, \quad \theta = \mu_1^2 - \mu_2^2 \mp \arctg \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\pi}{4}. \quad (4.2)$$

При $\mu_2 = \text{const}$ ($\mu_1 = \text{const}$) и переменном μ_1 (μ_2) радиус-вектор, определяемый формулами (4.2), описывает в плоскости Ox_1x_2 одну из линий скольжения семейства $\mu_1(\mu_2)$. При этом соответствующие напряжения можно вычислить по правилам тензорного проектирования и формулам (4.1)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma + k \cos 2\varphi = 2k(\mu_1^2 + \mu_2^2) - k \cos 2(\mu_1^2 - \mu_2^2), \\ \sigma_{22} &= \sigma - k \cos 2\varphi = 2k(\mu_1^2 + \mu_2^2) + k \cos 2(\mu_1^2 - \mu_2^2), \\ \sigma_{12} &= k \sin 2\varphi = -k \sin 2(\mu_1^2 - \mu_2^2).\end{aligned}$$

В заключение остановимся на пространственных осесимметричных решениях. Решения этого типа используются для анализа пластического состояния толстостенных труб и хорошо известны. Однако и в этих классических задачах могут быть неожиданные на первый взгляд эффекты.

Как известно, идеально пластическое поведение среды характеризуется неограниченным пластическим течением при достижении напряжениями некоторых критических значений. В краевых задачах деформации тела могут быть ограничены только внешними условиями кинематического типа. Если же на границах задаются напряжения, то в предельном состоянии деформации развиваются неограниченно (конструкция разрушается). Можно, однако, указать исключительный случай, когда это не так.

В ряде моделей идеальной пластичности предполагается, что вдоль промежуточного главного направления тензора напряжений сохраняется упругая связь между напряжениями и деформациями.

Рассмотрим сложное нагружение толстостенной идеально пластической трубы. Вначале труба нагружается внутренним давлением и осевой силой так, что в ней появляется пластическая область. Затем прикладывается внешний крутящий момент. С увеличением момента постепенно в идеально пластическое состояние переходит вся труба. В данной ситуации кинематических ограничений на границе нет, но тем не менее при определенном сочетании параметров все деформации остаются ограниченными. Такое поведение связано с тем, что в конструкции реализуются зоны пластичности различных типов. Например, на внешнем контуре пластичность такова, что упругая связь сохраняется по радиусу и препятствует развитию радиальных смещений, а на внутреннем контуре упругая связь сохраняется по оси и также препятствует развитию деформаций в осевом направлении. В целом несущая способность такой конструкции оказывается полностью исчерпанной, но деформации, как отмечалось, ограничены. Такой тип поведения описан в [38].

§ 6.3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ

Решения, построенные в § 6.2, можно обобщить на среду с внутренним трением. Будем исходить из уравнений [206]. Они являются частным случаем уравнений, рассмотренных в главе 4, если ограничиться только анализом предельного состояния:

$$\tau = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \rho + k \cos \rho, \quad (1)$$

здесь ρ — угол внутреннего трения. Значение $\rho = 0$ соответствует идеально пластической среде (см. § 6.2), $k = 0$ — идеально сыпучей среде, общий случай ρ , $k \neq 0$ — предельному состоянию горных пород. В плоском случае уравнение (1) совместно с уравнениями равновесия образует замкнутую систему. Система принадлежит к гиперболическому типу и в характеристических переменных λ_1 , λ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} + 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} &= 0, \quad \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} - 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} &= \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где φ — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси Ox_1 ; $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 - k \operatorname{ctg} \rho$; x_1, x_2 — декартовы координаты.

Интегрируя первые два уравнения, получим

$$\varphi = \Phi_1(\lambda_1) + \Phi_2(\lambda_2), \quad \ln|\sigma| = 2 \operatorname{tg} \rho [\Phi_2(\lambda_2) - \Phi_1(\lambda_1)], \quad (3)$$

где Φ_1, Φ_2 — произвольные функции. Из определения угла δ следует

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \lambda_1} = -\operatorname{tg}(\delta - \rho) \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial \lambda_2} = \operatorname{ctg} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2}. \quad (4)$$

Если задать произвольную функцию $\delta(\lambda_1, \lambda_2)$ или $\delta(r, \theta)$, то уравнения (4) дадут некоторую сетку линий λ_1, λ_2 с постоянным углом пересечения, равным $\pi/2 - \rho$. Вычислим в каждой точке угол наклона биссектрисы между линиями λ_1, λ_2 к оси Ox_1 . Для того, чтобы эта сетка соответствовала некоторому распределению напряжений, необходимо и достаточно, чтобы угол наклона биссектрисы как функция координат λ_1, λ_2 имел вид суммы некоторых функций $\Phi_1(\lambda_1) + \Phi_2(\lambda_2)$. Последним условием легко воспользоваться благодаря простой связи углов:

$$\theta = \varphi - \delta + \pi/4 + \rho/2. \quad (5)$$

Тогда, подставляя выражение (5) для угла θ в уравнения (4), исключая r и пользуясь представлением (3), окончательно получим

$$-\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \ln \left| \frac{\cos(\rho - \delta)}{\sin \delta} \right| - \Phi_2' \frac{\partial \operatorname{ctg} \delta}{\partial \lambda_1} + \Phi_1' \frac{\partial \operatorname{ctg}(\rho - \delta)}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (6)$$

Это нелинейное уравнение второго порядка эквивалентно исходной системе. Таким образом, задача сводится к поиску точных решений уравнения (6). Его структура такова, что допускает решение, обращающее старший член в тождественный нуль:

$$\cos(\rho - \delta) / \sin \delta = -\xi_1(\lambda_1) / \xi_2(\lambda_2),$$

где ξ_1, ξ_2 произвольные функции.

Отсюда сразу находим угол δ как функцию λ_1, λ_2 :

$$\delta = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho \right) + \rho,$$

а из уравнения (6)

$$\Phi_1 = c_1 \xi_1^2 + c_2, \quad \Phi_2 = -c_1 \xi_2^2 + c_3.$$

Теперь из уравнений (3)—(5) можно получить решение всей системы в параметрическом виде относительно характеристических переменных:

$$\begin{aligned}
\varphi &= -c_1(\xi_1^2 - \xi_2^2) + c_2 + c_3, \quad \sigma = -c_4 \exp[-2c_1 \operatorname{tg} \rho (\xi_1^2 + \xi_2^2)], \\
\theta &= c_1(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho\right) - \frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} + c_2 + c_3, \\
r &= \frac{1}{\xi_2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho\right)^2} \exp\left[\frac{c_1}{\cos \rho} (2\xi_1 \xi_2 + \sin \rho (\xi_1^2 + \xi_2^2)) + c_5\right],
\end{aligned} \tag{7}$$

где $c_1 - c_5$ — постоянные интегрирования. Решение можно исследовать по той же схеме, что и в § 6.2. Механический смысл их будет аналогичным. Подробнее все результаты изложены в [44].

§ 6.4. ПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РУЛОНИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Рассмотренные в данном параграфе постановки возникли из следующих соображений. Обратимся к классическому решению задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы. В силу осевой симметрии задачи касательные напряжения отсутствуют: $\sigma_{r\theta} = 0$ (r, θ — полярные координаты). Но это означает, что если в трубе сделать произвольное число разрезов по окружностям $r = \text{const}$, то на работе конструкции эти разрезы никак не отразятся. Следовательно, все сечение трубы можно представить набранным из тонких отдельных колец, вплотную вставленных друг в друга; кольца работают так, что условия на контактах между ними на работе всей конструкции не сказываются. Как известно, в такой схеме материал нагружен весьма неравномерно, причем, если внешний радиус трубы превосходит внутренний более чем в 3—4 раза, то дальнейшее увеличение толщины трубы на переход внутренней области в пластическое состояние (разрушение) практически не влияет. Поэтому естественно возникает идея: нельзя ли работу упругих колец организовать таким образом, чтобы между ними мобилизовались силы внешнего трения, которые внесли бы свой вклад в „противостояние“ внутреннему давлению.

Разрежем кольца по некоторому радиусу и склеим их со сдвигом на один шаг (рис. 6.8). Полученная конструкция отличается от предыдущей принципиально. Можно ожидать, что за счет проскальзывания слоев удастся включить в работу материал, удаленный от внутренней границы и, следовательно, приложенную нагрузку распределить более равномерно, увеличив тем самым несущую способность конструкции. На рис. 6.8, 6.9 показано модель подобной конструкции. Модель представляет собой рулон фотопленки, которая под действием внутренних усилий постепенно раскручивается. Четко виден эффект дифференциального вращения, связанный с относительным скольжением ее слоев. Перейдем теперь к математической модели [46, 47].

2. Пусть имеется упругая оболочка постоянной толщины, свернутая в рулон. Считаем это состояние естественным. Возьмем отдельный элемент среды, включающий некоторое число слоев рулона. Кривизну линий контакта пока не учитываем (рис. 6.10). Как реагирует этот элемент на внешнее нагружение? Очевидно, что при сжатии в направлениях Ox_1, Ox_2 разрезы никак не проявятся, и реакция элемента будет упругой. Пусть теперь приложены касательные напряжения. Они вызовут упругий сдвиг слоев материала между разрезами и в общем случае — определенные проскальзывания на контактах. Та-

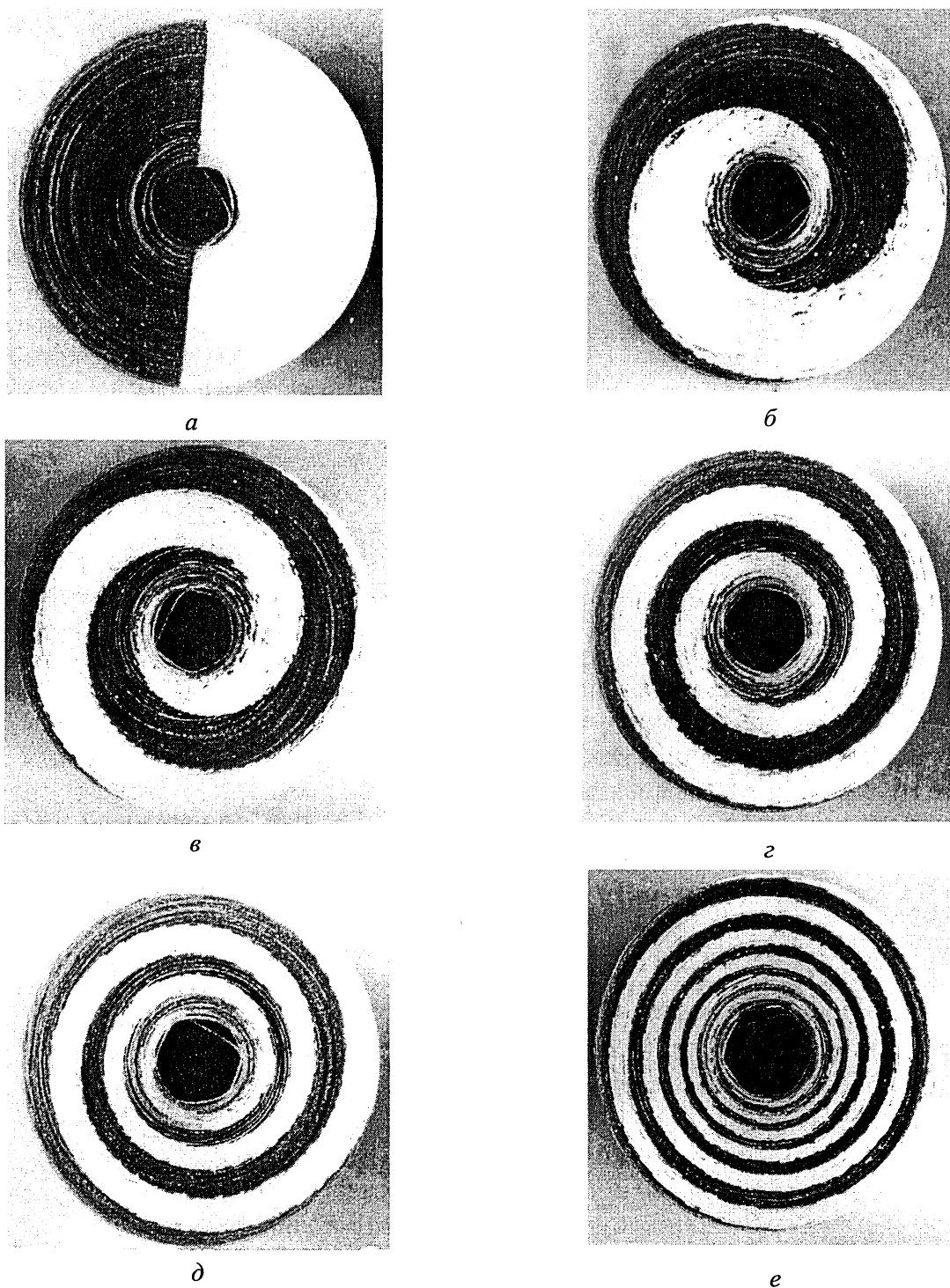


Рис. 6.8

ким образом, поля скоростей и смещений становятся разрывными. Деформацию элемента в целом (точнее, макродеформацию, характеризующую изменение угла β и размеров элемента в направлениях Ox_1, Ox_2) можно разбить на две части: упругую, связанную с упру-

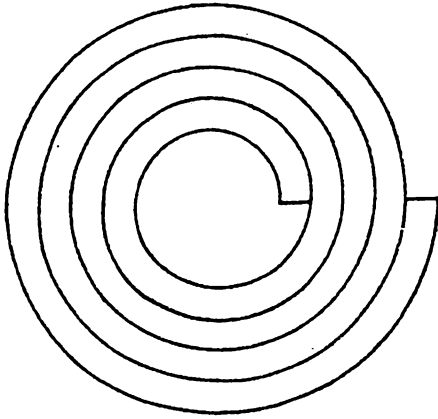


Рис. 6.9

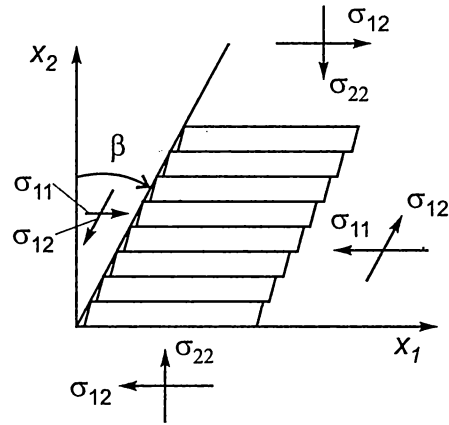


Рис. 6.10

гим деформированием слоев, и пластическую, связанную с проскальзыванием между ними. Следовательно, хотя материал оболочки и является идеально упругим, для анализа ее работы естественно использовать упругопластические модели, причем такие, в которых учитываются существенные черты внутреннего механизма пластической деформации: разрывность исходного поля перемещений, наличие проскальзываний только по одному направлению и др. Именно такие модели разработаны в § 4.3 [22], где показано, что исходное разрывное поле перемещений допускает такое гладкое осреднение, что тензор деформаций, определенный по гладкому полю, характеризует макродеформацию, а для сохранения информации о разрывах поля, которая теряется при осреднении, вводятся дополнительные кинематические переменные γ_{12}, γ_{21} , имеющие смысл безразмерных проскальзываний. Для определения последних необходимо ввести внутреннее вращение ω , характеризующее поворот материальных микроэлементов, целиком содержащихся внутри слоя. Так, в случае элемента (см. рис. 6.10) система определяющих уравнений запишется в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11} - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22} - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11},$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \omega = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} + \Gamma(\sigma_{12}), \gamma_{21} = \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \omega = \frac{\sigma_{12}}{2\mu},$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, w_1, w_2 — компоненты вектора перемещений, Γ — безразмерная величина, определяющая проскальзывание.

В § 4.3 уравнения записаны в координатной системе, линии которой совпадают с линиями скольжения. В задаче о деформировании рулонированной оболочки такую систему можно описать следующим образом. Возьмем окружность радиуса a и проведем к ней касательные (рис. 6.11). Эта окружность является огибающей для семейства своих касательных. Затем из всех точек окружности проведем спиральные кривые, которые в любой точке плоскости были бы ортогональны соответствующей этой точке прямой из семейства касательных. Таким образом получаются два взаимно ортогональных семейства линий, причем оказывается, что расстояние h между соседними витками одной и той же спирали постоянно и равно $2\pi a$.

Таким образом, в данной задаче появляется характерный размер h , имеющий смысл толщины слоя оболочки. Следует отметить, что нет необходимости считать h исчезающе малой величиной. Это нигде и не предполагается. Переход к осреднению в элементе среды означает фактически, что упругий слой оболочки набирается из исчезающе малых упругих слоев, а общее проскальзывание между слоями толщины h „размазывается“ по континуальному элементу. Отметим также, что по построению расстояние h измеряется по нормали к спирали, т. е. по прямой из семейства касательных, а не по радиусу, как в спирали Архимеда. Это означает, что если взять лист толщины h какого-нибудь материала и свернуть его в рулон, то линия разреза слоев полученной оболочки совпадет именно с построенной спиральной линией.

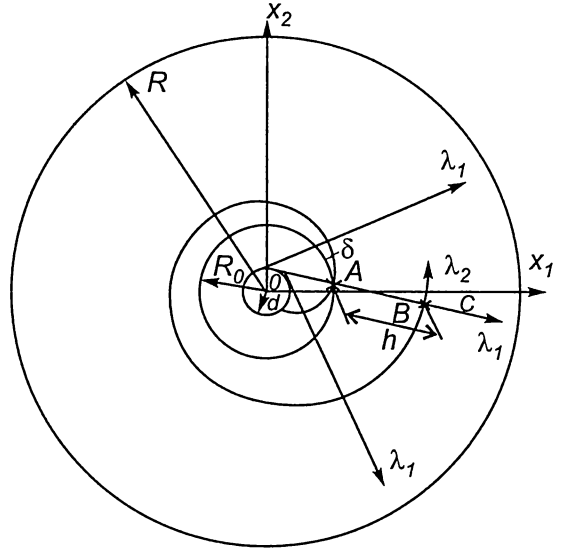


Рис. 6.11

Итак, координатная сетка построена. Задачу будем решать для кольцевой области $R_0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (см. рис. 6.11), причем на внутренней границе $r = R_0$ угол δ между окружностью и спиралью постоянен: $\delta = \arcsin(a/R_0)$. Выбор кольцевой области означает, что в реальной оболочке на внутренней и внешней границах при переходе к окружностям убирается часть материала. Здесь обнаруживается замечательный факт: в континуальной постановке задача становится осесимметричной.

Выберем следующую параметризацию построенной координатной сетки: λ_2 — угол между соответствующей прямой из семейства касательных и осью Ox_1 , λ_1 — длина вдоль некоторой фиксированной прямой $\lambda_2 = \text{const}$. Для того, чтобы по числу λ_1 определить нужную спираль из своего семейства, оказывается достаточным запараметризовать только отрезок AB . Такой выбор параметров означает, что на фиксированной линии $\lambda_2 = \text{const}$ необходимо выполнить условия согласования: точки $B(\lambda_1 + h, \lambda_2)$ и $C(\lambda_1, \lambda_2 + 2\pi)$ должны совпадать. Таким образом, преобразование полярных координат (r, θ) в систему (λ_1, λ_2) имеет вид

$$\lambda_1 = \sqrt{r^2 - \xi^2} - \xi(\theta - \arcsin(\xi/r)) - R_0 \cos \delta, \lambda_2 = \theta - \arcsin(\xi/r), \quad (2.1)$$

($\xi = R_0 \sin \delta$). Параметры Ламе такой замены: $a_1 = 1$, $a_2 = \lambda_1 + \xi \lambda_2 + R_0 \cos \delta$.

Заметим, что угол наклона к спирали λ_2 к окружности не постоянен в каждой точке плоскости и определяется соотношением $\tan \kappa = \frac{\xi}{a_2} = \frac{\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}$. Радиус кривизны ρ

спиральной линии λ_2 тоже будет переменный: $\rho = a_2 = \sqrt{r^2 - \xi^2}$. Из этого следует, что при движении оболочки вдоль спиральной траектории возникают изгибные моментные напряжения, которыми, однако, можно пренебречь, если считать, что средний радиус трубы $(R + R_0)/2$ много больше толщины слоя оболочки h [231, 232].

Система (2.1) выбрана так, что линии λ_2 совпадают с линиями раздела слоев рулонированной оболочки. Тогда замкнутая система уравнений, согласно § 4.3, будет иметь вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{a_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w_1^0}{\partial \lambda_1} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0, \quad \frac{\partial w_2^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{w_1^0}{a_2} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_2^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial w_1^0}{a_2 \partial \lambda_2} - \frac{w_2^0}{a_2} = \frac{\sigma_{12}^0}{\mu} + \Gamma(\sigma_{12}^0, \lambda_1, \lambda_2), \quad (2.4)$$

где верхний индекс „0“ означает проекции на координаты (λ_1, λ_2) , (2.2) — уравнения равновесия в криволинейных координатах, (2.3) характеризуют упругие изменения размеров элементарного объема в направлениях λ_1, λ_2 , (2.4) описывает сдвиговую деформацию элементарного объема. Функция Γ имеет смысл безразмерной величины проскальзывания слоев и может явно зависеть от координат λ_1, λ_2 . Это означает возможность учета неоднородных условий на контакте (неравномерная смазка). Ниже ограничимся только прямой задачей, когда функция Γ заранее задана из экспериментальных данных о характере контактного взаимодействия слоев.

3. Вначале рассмотрим жесткую постановку задачи, когда модуль сдвига $\mu \rightarrow \infty$. В этом случае оболочка несжимаема и нерастяжима, а задача становится кинематически определенной. Система (2.3) принадлежит к гиперболическому типу и требует два краевых условия на перемещения. Пусть

$$w_1^0|_{\lambda_1=\chi_1} = 0, \quad w_2^0|_{\lambda_2=\chi_2} = U, \quad (3.1)$$

где U — постоянная, $\lambda_1 = \chi_1(\lambda_2) = \xi(\sqrt{(R/\xi)^2 - 1} - \text{ctg} \delta - \lambda_2)$, $\lambda_2 = \chi_2(\lambda_1) = \sqrt{(R/\xi)^2 - 1} - \text{ctg} \delta - \lambda_1/\xi$ — внешняя граница области. Это условие означает, что каждая точка внешней границы смещается вдоль спирали λ_2 на расстояние U . Тогда из системы (2.3) с учетом (3.1) получаем

$$w_1^0 = 0, \quad w_2^0 = U. \quad (3.2)$$

Из условия $\gamma_{21}^0 = 0$ следует, что $\omega = U/a_2$. Полученные результаты указывают на адекватность построенной модели реальному деформированию жесткой оболочки, поскольку такое деформирование можно понимать как движение элементов этой оболочки вдоль

заданной спиральной траектории, где угол поворота ω по определению есть отношение перемещения U к радиусу кривизны траектории a_2 . Эти результаты проиллюстрированы на рис. 6.12 а, б (перед началом деформирования сечение трубы разделено на две части диаметром).

После того, как перемещения найдены, обращая известную функцию Γ в (2.4), находим касательные напряжения

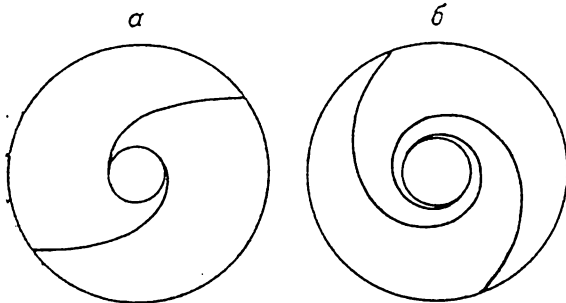


Рис. 6.12

$$\sigma_{12}^0 = S(\lambda_1, \lambda_2). \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в уравнения равновесия (2.2), получаем решение для напряжений в квадратурах:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^0 &= \int \left(-2S(\lambda_1, \lambda_2) - a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 + f_1(\lambda_1), \\ \sigma_{11}^0 &= \frac{1}{a_2} \left(\int \left(-\frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \right) d\lambda_1 + \int \int \left(-2S(\lambda_1, \lambda_2) - a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 d\lambda_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{a_2} \left(\int f_1(\lambda_1) d\lambda_1 + f_2(\lambda_2) \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

($f_i(\lambda_i)$ — произвольные интегрирования). В качестве краевых возьмем обычные условия вида $\sigma_r|_{r=R_0} = -p$, $\sigma_{r\theta}|_{r=R_0} = 0$, перепроектировав которые на оси (λ_1, λ_2) , из (3.4) найдем, что функции $f_i(\lambda_i)$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1) &= -p - S\left(\lambda_1, -\frac{\lambda_1}{\xi}\right) \operatorname{ctg} \delta + \left[\int \left(2S(\lambda_1, \lambda_2) + a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 \right]_{\lambda_2 = -\lambda_1/\xi}, \\ f_2(\lambda_2) &= (-p - S(-\xi\lambda_2, \lambda_2) \operatorname{tg} \delta) R_0 \cos \delta + \left[\int \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2} + \\ &\quad + \left[\int \int \left(2S(\lambda_1, \lambda_2) + a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2} - \left[\int f_1(\lambda_1) d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, задавая конкретный вид условия на контакте (функцию $S(\lambda_1, \lambda_2)$), имеем решение исходной жесткой задачи в виде (3.2)—(3.5).

4. Рассмотрим частный случай исходной жесткой задачи, когда условие на контакте соответствует условию постоянства касательных напряжений

$$\sigma_{12}^0 = -T, \quad T = \text{const}. \quad (4.1)$$

Тогда система (3.4), (3.5), (4.1) дает следующее распределение напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= -p - T \operatorname{ctg} \delta + T \left(\frac{a_2}{\xi} + \frac{\xi}{a_2} \right), \\ \sigma_{22}^0 &= -p - T \operatorname{ctg} \delta + 2T \frac{a_2}{\xi}, \quad \sigma_{12}^0 = -T. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В проекции на полярные координаты выражения (4.2) преобразуются к виду

$$\sigma_r = -p + T \left(\sqrt{\left(\frac{r}{\xi} \right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{R_0}{\xi} \right)^2 - 1} \right), \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\theta} = -p + T \left[\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 1}} + \sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{R_0}{\xi}\right)^2 - 1} \right], \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Из (4.3) вытекает, что если положить $T = 0$, т. е. проскальзывание слоев происходит свободно ($\sigma_{12}^0 = 0$), то решение совпадает с гидростатическим.

Рассмотрим условие, когда все напряжения, возникающие в рулонированной трубе, не превосходят предела упругости материала τ_s , например, в смысле критерия

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)^2 + 4\sigma_{12}^0{}^2} < \tau_s, \quad (4.4)$$

что наложит ограничение на T в виде $T < \min_{R_0 \leq r \leq R} \left(2\tau_s \frac{\xi}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \right)$. Этот минимум

существенно зависит от угла δ (по определению $\xi = R_0 \sin \delta$). Ясно, что для улучшения работы конструкции необходимо взять такой угол δ , при котором значение T максимально. Все вышеперечисленные условия приводят к тому, что несущая способность рулонированной оболочки с условием на контакте (4.1) будет максимальной (в смысле критерия (4.4)) при $\delta = \arcsin [R / (\sqrt{R^2 + R_0^2})]$, причем ограничение на T преобразуется к виду $T < 2\tau_s R_0 R / (R_0^2 + R^2)$, подставляя которое в распределение (4.3) и требуя, чтобы на внешней границе области давление равнялось нулю (в силу гиперболичности системы это возможно не при всех значениях p), получим ограничение на внутреннее давление p .

Итак, предельное давление, которое может выдержать исходная оболочка, не переходя в пластическое состояние (разрушение), при условии на контакте (4.1)

$$p^* = 2\tau_s (1 - 2R_0^2 / (R^2 + R_0^2)), \quad (4.5)$$

тогда как в решении Ламе [233] на внутренней границе области впервые появляется пластическая зона при нагрузке

$$p_0^* = \tau_s (1 - R_0^2 / R^2). \quad (4.6)$$

Сравнивая выражения (4.5) и (4.6), видим, что, допуская в толстостенной трубе вдоль спиральной линии λ_2 проскальзывание с условием на контакте (4.1), можно получить выигрыш в несущей способности по сравнению с цельной трубой практически вдвое. Ясно, что это становится возможным за счет более равномерного перераспределения приложенной нагрузки по толщине конструкции, т. е. за счет включения в работу даже далеких от внутренней кромки слоев рулонированной оболочки (рис. 6.13).

Зададим теперь некоторое внутреннее давление p_0 и потребуем, чтобы материал деформировался только упруго (критерий (4.4)). При этом для рулонированной оболочки

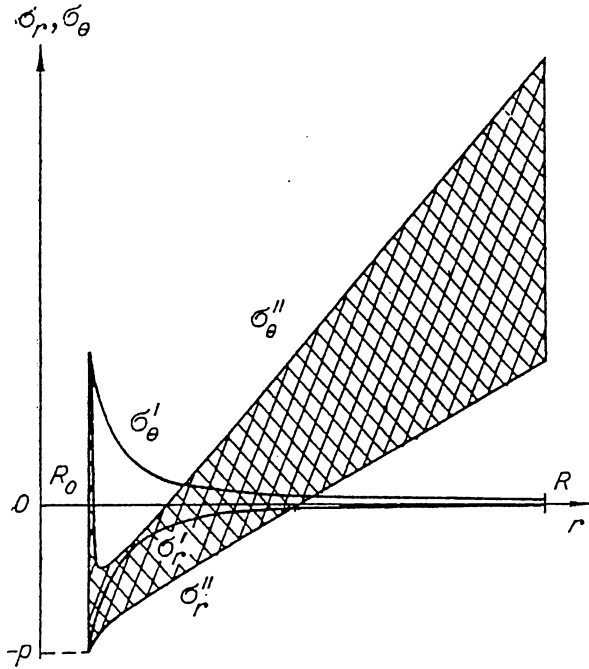


Рис. 6.13

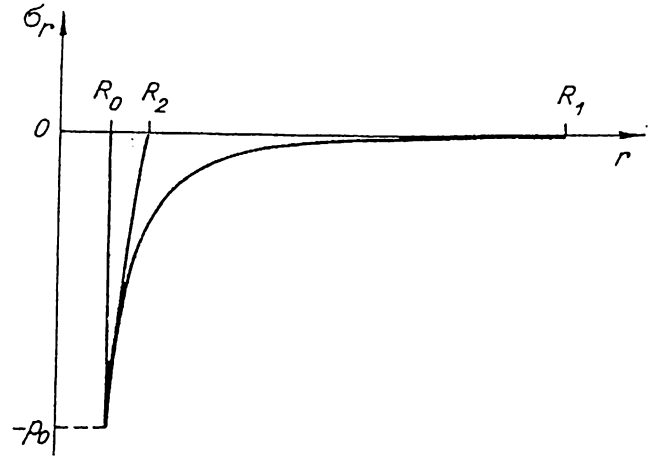


Рис. 6.14

потребуется существенно меньшая толщина $R_2 = R_0 \sqrt{\frac{2 + p_0/\tau_s}{2 - p_0/\tau_s}}$, чем для цельной трубы

$$R_1 = R_0 \frac{1}{\sqrt{1 - p_0/\tau_s}} \quad (\text{рис. 6.14}).$$

5. Рассмотрим теперь исходную задачу с учетом упругого деформирования самих слоев оболочки ($\mu < \infty$). Как и в жесткой постановке, возьмем условие на контакте в виде (4.1) (условие постоянства касательных напряжений σ_{12}^0). Очевидно, что распределение напряжений будет совпадать с распределением в жестком случае, поскольку задача статически определима, и напряжения находятся независимо от кинематики. Перемещения же отличаются от жестких вкладом упругого деформирования самих слоев. Из системы (2.3) с учетом (4.2) после интегрирования имеем

$$\begin{aligned} w_1^0 &= \frac{1-2\nu}{2\mu}(-p - T \operatorname{ctg} \delta) a_2 + \frac{1-3\nu}{2\mu} T \frac{a_2^2}{2\xi} + \frac{1-\nu}{2\mu} T \xi \ln a_2 + \Phi_2(\lambda_2), \\ w_2^0 &= \frac{1-2\nu}{2\mu} T a_2 + \frac{1-\nu}{2\mu} T \frac{a_2^3}{2\xi^2} - \frac{1-\nu}{2\mu} T a_2 \ln a_2 - \int \Phi_2(\lambda_2) d\lambda_2 + \Phi_1(\lambda_1), \end{aligned} \quad (5.1)$$

($\Phi_i(\lambda_i)$) — произвольные функции интегрирования. Если ограничить перемещение внешней границы оболочки $w_1^0|_{\lambda_1=\chi_1} = 0, w_2^0|_{\lambda_2=\chi_2} = 0$, то функции $\Phi_i(\lambda_i)$ становятся постоянными и определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\Phi_2(\lambda_2) = C_2 &= \frac{1-2\nu}{2\mu}(P + T \operatorname{ctg} \delta)A - \frac{1-3\nu}{2\mu}T \frac{A^2}{2\xi} - \frac{1-\nu}{2\mu}T\xi \ln(A), \\ \Phi_1(\lambda_1) = C_1 &= C_2 \frac{A}{\xi} - \frac{1-2\nu}{2\mu}TA - \frac{1-\nu}{2\mu}T \frac{A^3}{2\xi^2} + \frac{1-\nu}{2\mu}TA \ln(A), \\ (A &= \sqrt{R^2 - \xi^2})\end{aligned}\tag{5.2}$$

Таким образом, выражения (4.2), (5.1), (5.2) дают полное решение упруго-пластической постановки исходной задачи при условии на контакте (4.1).

Итак, выше рассмотрен подход к решению класса задач упругого деформирования рулонированных оболочек, основанный на использовании пластических моделей. При этом под пластичностью здесь понимается наличие проскальзывания слоев этих оболочек. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния таких конструкций. Оказалось, что за счет возможности проскальзывания слоев рулонированная оболочка работает лучше, чем цельная толстостенная труба в том смысле, что удастся более равномерно по толщине конструкции перераспределить приложенную нагрузку. В частности, если условие на контакте взять в виде (4.1), то можно получить в сравнение с цельной трубой выигрыш в несущей способности практически вдвое. Приведенная модель допускает обобщения на случаи, когда необходимо учитывать внутреннее трение среды, пластические деформации самих слоев оболочки и др.

6. Выше рассмотрена прямая задача определения напряженно-деформированного состояния. Уравнение (2.4) показывает, что состояние такой трубы существенно зависит от вида функции Γ , то есть от условий на контактах между слоями оболочки. Последнее обстоятельство можно использовать для оптимизации конструкции в целом. Это направление исследований рассмотрено в [47].

§ 6.5. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГО МАССИВА ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ

Выше рассматривался вопрос о приложении пластической модели со структурой (см. § 4.3) к исследованию задачи о рулонированной оболочке. Несколько по иному можно сказать, что речь шла о некоторой несущей конструкции, которая имеет внутреннюю цилиндрическую полость (или круглое отверстие). Подобные задачи в различных вариациях встречаются во многих областях механики твердого тела. В частности, в горном деле и строительстве — это классические задачи о несущей способности массива, ослабленного некоторой выработкой. Определенный интерес представляет исследование этой задачи в постановке, учитывающей эффект возможного разупрочнения массива и его внутреннюю структуру.

Факт разупрочнения играет принципиальную роль для многих эффектов деформирования и в конечном счете определяет такие свойства горного массива, как неконтролируемое высвобождение его потенциальной упругой энергии (горные удары, землетрясения), появление вокруг выработок ослабленных зон, из которых может произойти вывал и др.

1. В различных постановках задача о поведении „разрушенного“ материала вокруг выработок исследовалась в работах [234—239]. Ниже, следуя [22, 40], эта задача рассматривается в рамках модели § 4.3.

Предположим, что условие перехода материала в неупругое состояние не зависит от первого инварианта тензора напряжений и дилатансия отсутствует. В § 4.3 рассматривался класс материалов, для которых плоская пластическая деформация связывалась с появлением дискретной сетки линий скольжения. Общая деформация достаточно большого „элементарного“ объема материала складывалась из локализованной деформации (проскальзываний размерности длины по дискретным линиям скольжения) и обычной деформации элементов, выделенных линиями скольжения. Определяющие соотношения выписывались отдельно для напряжений — проскальзываний и напряжений — деформаций элементов. Первые связи предполагались необратимыми с диаграммой, которая может иметь ниспадающую ветвь, вторые — линейно-упругими.

Введем полярную систему координат (r, β) с полюсом в центре отверстия. Пусть в момент перехода материала в неупругое состояние касательное напряжение $\sigma_{r\beta}$ отсутствует. (Для компонент напряжений и смещений v_r, v_β приняты обычные обозначения.) Тогда линиями скольжения будут логарифмические спирали

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{r}{R_1} + \beta \right) = \text{const}, \quad (1.1)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{r}{R_1} - \beta \right) = \text{const},$$

где R_1 — радиус выработки. Для линий скольжения (1.1) уравнения (4.10) § 4.3 имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\beta r}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} + X_r &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\beta r}}{r} + X_\beta = 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{v_r}{r} &= \frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\beta\beta}), \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \beta} - \frac{v_\beta}{r} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{r\beta} + \sigma_{\beta r}), \\ \frac{\partial}{\partial r} (v_r + v_\beta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (v_r + v_\beta) - \frac{v_r - v_\beta}{r} - 2\omega &= \\ = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2\mu} + \frac{2}{f_1 a_1 \varepsilon} S \left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2} - \frac{\sigma_{\beta r} - \sigma_{r\beta}}{2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} (v_r - v_\beta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (v_r - v_\beta) - \frac{v_r + v_\beta}{r} + 2\omega &= \\ = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2\mu} + \frac{2}{f_2 a_2 \varepsilon} S \left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2} - \frac{\sigma_{\beta r} - \sigma_{r\beta}}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где X_r, X_β — компоненты объемной силы, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, S — проскальзывание размерности длины, ω — вращение элементов. В общем случае $\omega \neq 1/2|\text{rot}\vec{v}|$. Величина ω характеризует различие в проскальзываниях по площадкам λ_1, λ_2 . Функции $f_1(\lambda_1)\varepsilon, f_2(\lambda_2)\varepsilon$ определяют густоту сетки линий скольжения во всей дефор-

мируемой области: длины сторон элемента в точке (λ_1, λ_2) , равны $f_1(\lambda_1)\varepsilon a_1$, $f_2(\lambda_2)\varepsilon a_2$, где $a_1 = \partial l_1 / \partial \lambda_1$, $a_2 = \partial l_2 / \partial \lambda_2$, l_1 , l_2 — длины дуг вдоль соответствующих линий. Для логарифмических спиралей (1.1) $a_1 = a_2 = r$.

Система (1.2) в рассматриваемой задаче замыкается дополнительными ограничениями на класс решений. Предположим, что все элементы правильны и их размеры не зависят от β , т. е. $f_1 = f_2 = 1$. Пусть, кроме того, $\sigma_{r\beta} \equiv \sigma_{\beta r} = 0$, $\nu_\beta \equiv 0$ и $X_\beta = 0$. Ограничимся осесимметрическим решением. Система в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} + X_r &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} &= \frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\beta\beta}), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2\mu} + \frac{2}{\varepsilon r} F\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2}\right), \\ \omega &= \frac{1}{2\varepsilon r} [S(\sigma_{21}^0) - S(\sigma_{12}^0)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = \tau = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2}$ — касательные напряжения на площадках λ_2 , λ_1

$$2F = S(\sigma_{21}^0) + S(\sigma_{12}^0).$$

Рассмотрим последнее уравнение для определения ω . Пусть напряжение $|\tau|$ монотонно увеличивается от нуля. На возрастающей ветви функция S однозначна и, следовательно, $\omega \equiv 0$. Это означает, что на возрастающей ветви проскальзывания по обоим семействам площадок одинаковы и линии λ_1 , λ_2 функционируют симметрично. На падающей ветви функция S многозначна и площадки скольжения функционируют несимметрично: по одному из семейств площадок происходит увеличение проскальзываний при уменьшающихся напряжениях, по другому — разгрузка, т. е. напряжения уменьшаются, а проскальзывания остаются постоянными и равными своему значению S^* , достигнутому в момент перехода на ниспадающую ветвь. (В главе 7 приведены прямые экспериментальные данные, указывающие на возможность подобного поведения). Предположим для определенности, что разгрузка происходит по семейству λ_1 . Тогда на ниспадающей ветви имеем

$$\omega = \frac{1}{2\varepsilon r} [S^* - S(\tau)], \quad F(\tau) = \frac{1}{2} [S^* + S(\tau)],$$

на возрастающей — $\omega \equiv 0$, $F(\tau) \equiv S(\tau)$.

Если исключить переменную ν_r , то систему (1.3) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \sigma' + \frac{(r^2\tau)'}{r^2} + X_r &= 0, \\ (1-2\nu)\sigma' - \frac{(r^2\tau)'}{r^2} - \frac{2\mu}{\varepsilon} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} [r \cdot F(\tau)] &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\beta\beta}}{2}$. Дальнейшее исключение σ' приводит к интегралу

$$\frac{2\mu}{\varepsilon} F(\tau) = \frac{2\mu p}{r} - \frac{1-2\nu}{r} Z(r) - 2(1-\nu)r\tau, \quad (1.5)$$

где p — постоянная интегрирования, $Z(r) = \int r^2 X_r(r) dr$. Вид интеграла (1.5) не изменится и в более общем случае, когда пластические свойства среды неоднородны и зависят от гидростатического давления, т. е. $F = F(\tau, \sigma, r)$. Интегрируя оставшиеся уравнения (1.3), получим общее решение в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2 \int_{R_1}^r \frac{\tau}{r} dr - \int_{R_1}^r X_r dr + \sigma_{rr}(R_1), \\ \sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{rr} - 2\tau, \\ \nu_r &= \frac{1-2\nu}{2\mu} r \sigma_{rr} - \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{Z(r)}{r} - \frac{p}{r}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где функция $\tau(r, p)$ определяется конечным уравнением (1.5). Вопрос об устойчивости решения по отношению к неосесимметрическим возмущениям здесь не рассматривается.

Постоянную интегрирования p будем интерпретировать как параметр нагружения. Связь параметра p с естественными для данной задачи параметрами нагружения (напряжениями и смещениями на границах $r = R_1, R_2$) определяется равенствами (1.5), (1.6). Для несжимаемого материала эта связь приобретает простой вид $p = -\nu_r(R)R$, где $R = R_1$ или R_2 .

Исследуем механический смысл решения. Пусть $(1-2\nu)Z \equiv 0$, т. е. материал либо несжимаем, либо объемные силы отсутствуют. В этом случае интеграл (1.5) упрощается

$$\frac{F(\tau)}{\varepsilon} = \frac{p}{r} - \frac{1-\nu}{\mu} \tau r. \quad (1.7)$$

Так как $F(-\tau) = -F(\tau)$, то $\tau(-p, r) = -\tau(p, r)$; при исследовании достаточно ограничиться случаем $p \geq 0$. Решение уравнения (1.7)

удобно исследовать графически на плоскости (y, τ) (рис. 6.15). Значение τ при фиксированном r определяется как пересечение кривой $y = F(\tau) / \varepsilon$ и прямой $Y = \frac{p}{r} - \frac{1-\nu}{\mu} \tau r$. Если $r'_2 > r'_1$, то прямая, соот-

ветствующая r'_2 при $y, \tau \geq 0$ ниже и круче прямой, соответствующей r'_1 . При $r \rightarrow \infty$ прямая приближается к полуоси $y < 0, \tau = 0$; при $r \rightarrow 0$ ордината пересечения прямой с осью Oy стремится к бесконечности, а угол наклона прямой к оси $O\tau$ — к нулю. Отметим, что при фиксированном r и увеличении

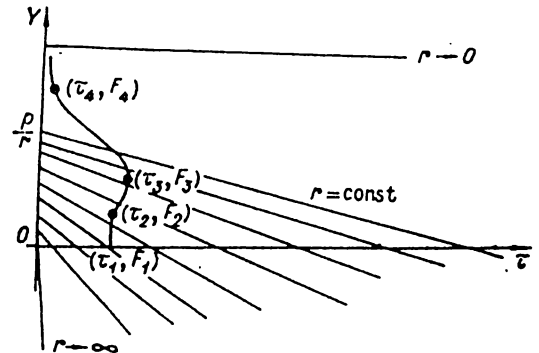


Рис. 6.15

вающемся p прямая, соответствующая данному значению r , перемещается вверх параллельно себе.

Пусть прямая, соответствующая некоторым значениям r^* , p , проходит через точку $(\tau^*, F^* / \varepsilon)$, т. е. $F(\tau^*(r^*, p)) = F^*$. Из (1.7) следует, что

$$p = \frac{F^*}{\varepsilon} r^* + \frac{1-\nu}{\mu} \tau^* r^{*2}, \quad (1.8)$$

$$r^* = -\frac{\mu}{2(1-\nu)} \frac{F^*}{\tau^* \varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{F^*}{\tau^* \varepsilon} \right)^2 + \frac{\mu}{(1-\nu) \tau^*} p}, \quad (1.9)$$

Если $\tau^* \neq 0$ и $r^* = p(\varepsilon / F^*)$, если $\tau^* = 0$. Для сокращения записей обозначим правые части (1.8), (1.9) через $\Phi_1(F^*, \tau^*, r^*)$, $\Phi_2(F^*, \tau^*, p)$. Пусть параметр нагружения p монотонно увеличивается от нуля. Рассмотрим последовательное развитие неупругих зон вокруг выработки для общего случая, когда материал обладает площадкой текучести, упрочнением, разупрочнением и остаточной прочностью. Введем обозначения: $p_i = \Phi_i(F_i, \tau_i, R_1)$, $r_i = \Phi_2(F_i, \tau_i, p)$, где $i = 1 \div 4$; (τ_i, F_i) — характерные точки диаграммы (см. рис. 1). Легко показать, что $p_1 < p_2 < p_3$. Если $0 \leq p < p_1$, то весь материал находится в упругом состоянии. При $p_1 \leq p < p_2$ у внутреннего контура появится зона текучести, которая сменяется упругой зоной; при $p_2 \leq p < p_3$ к внутреннему контуру будет примыкать зона упрочнения, которая при удалении от отверстия сменяется зоной текучести и затем упругой зоной. Радиусы всех зон однозначно определяются параметром p : радиус окружности, отделяющий упругую зону от зоны текучести, равен r_1 , зону текучести от зоны упрочнения r_2 , зону упрочнения от зоны разупрочняющего материала r_3 . При увеличении p от значения p_3 поведение материала будет существенно зависеть от однозначности функции $\tau(r, p)$, определяемой уравнением (1.7). Если функция $\tau(r, p)$ однозначна, то деформирование материала на расстоянии r от центра отверстия в момент, когда параметр нагружения равен p , устойчиво. Неоднозначность означает либо безразличное состояние, либо неустойчивость, в результате которой на расстоянии r от центра отверстия происходит неконтролируемое граничными условиями высвобождение упругой потенциальной энергии.

Природу указанной неустойчивости можно пояснить на следующей модели. Пусть некоторое тело B находится на поверхности OC . Предположим, что усилие сдвига T вызывает смещение тела на величину $\Gamma(T)$ (рис. 6.16). Соединим тело с упругим элементом, для которого жесткость $k = F / (\Delta l / l) = \text{const}$. В качестве параметра нагружения системы будем использовать величину U — смещение точки A элемента из состояния $F = 0$, $T = 0$. При различных фиксированных U рассмотрим устойчивость равновесия системы по отношению к возмущениям Γ . Очевидно, что на возрастающей ветви диаграммы $T(\Gamma)$ равновесие будет устойчивым. На падающей ветви идут два противоположных процесса: с одной стороны, на контакте тела с поверхностью энергия диссипируется, с другой — вследствие уменьшения растягивающей силы часть потенциальной энергии элемента высвобождается. Легко показать, что при $\eta = 1 + l \frac{T'(\Gamma)}{k} > 0$ энергии диссипируется больше, чем высвобождается. Деформирование в этом случае может продолжаться только при подводе

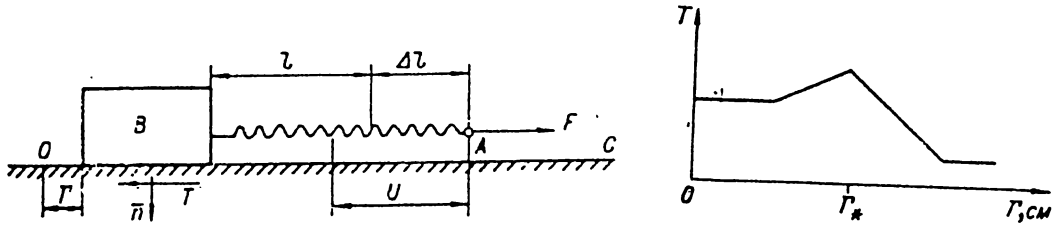


Рис. 6.16

энергии извне и поэтому весь процесс деформирования устойчив. При $\eta < 0$ в упругом элементе высвобождается энергии больше, чем диссипируется на контакте. Равновесие в этом случае (при $\Gamma = \Gamma_*$) неустойчиво и система переходит в устойчивое состояние с выделением энергии (в виде кинетической энергии тела). Случай $\eta = 0$ соответствует безразличному равновесию.

Вернемся к задаче о выработке. Введем обозначение

$$\rho = \frac{\mu}{1-\nu} \min_{F \geq F_3} \left| \frac{F'(\tau)}{\varepsilon} \right|.$$

Можно показать, что если $R_2 < \rho$, то при любых p деформирование материала в кольце $R_1 \leq r \leq R_2$ будет всегда устойчивым. Если $R_2 > \rho$, то устойчивость деформирования будет зависеть от параметра нагружения: при $p < \Phi_1(F_3, \tau_3, \rho)$ деформирование будет устойчивым, при $p \geq \Phi_1(F_3, \tau_3, \rho)$ возможна неустойчивость. Для любого конкретного вида диаграммы $F/\varepsilon - \tau$ легко определить точные значения p и r , при которых деформирование стане неустойчивым.

На рис. 6.17 показаны графики изменения радиусов характерных зон и соответствующие эпюры касательных напряжений τ при различных параметрах нагружения p . С увеличением p ширина зоны идеального течения и зоны упрочнения растет, а зоны разупрочняющегося материала уменьшается. При достаточно большом p зона разупрочняющегося материала вырождается во „фронт“, на котором часть запасенной упругой энергии диссипируется на линиях скольжения, часть идет на динамические возмущения. Обе составляющие энергии легко подсчитать, исходя из интеграла (1.7). Появление динамических эффектов может вызвать разрушение материала. Этот вопрос, а также волновая картина движения не исследуются.

2. Рассмотрим подробнее случай, когда диаграмма деформирования имеет вид, изображенный на рис. 6.18. Из (1.9) следует, что

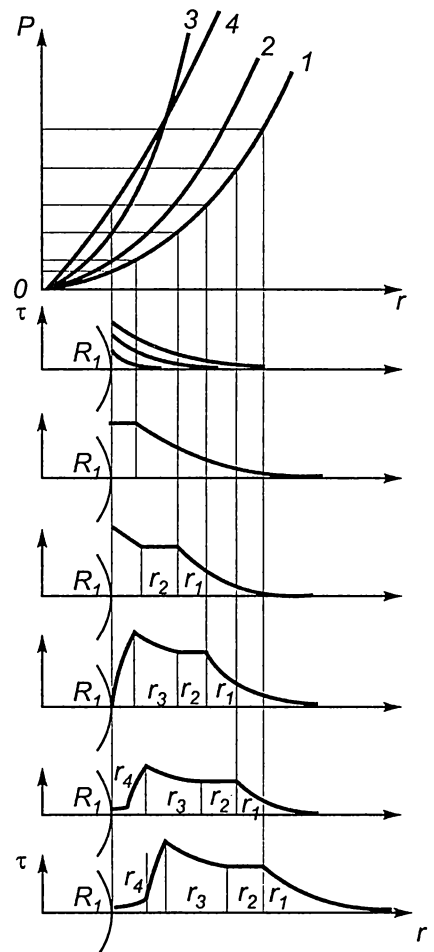


Рис. 6.17

$$r_1 = \sqrt{b}\sqrt{p}, r_4 = p/a,$$

где

$$b = \mu / (1 - \nu) \tau_1 a = F_4 / \varepsilon. \quad (2.1)$$

Вычислим интеграл $I = \frac{1}{\tau_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{r} dr$, фигурирующий в решении (1.6).

Согласно (1.7), $\tau = \frac{\mu p}{(1 - \nu)r^2}$ — в упругой области, $\tau = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{p - ar}{r(r - ab)}$ — в области разупрочнения, $\tau \equiv 0$ — в области „остаточной“ прочности. В дальнейших выкладках удобно ввести безразмерные переменные:

$$q^2 = \frac{p}{a^2 b}, \quad m^2 = \frac{R_1}{ab}, \quad n^2 = \frac{R_2}{ab}, \quad (2.2)$$

где q играет роль параметра нагружения.

Из (2.1) следует, что

$$\frac{r_1}{ab} = q, \quad \frac{r_4}{ab} = q^2. \quad (2.3)$$

Если $0 \leq q < m^2$, то материал работает целиком упруго

$$I = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4} \right). \quad (2.4)$$

При дальнейшем увеличении параметра нагружения ($q \geq m^2$) поведение материала будет зависеть от знака разности $(1 - m^2)$. Если $m^2 > 1$, то при достаточной глубине проведения выработки динамические эффекты начинают проявляться сразу на контуре выработки („стреляние“). Пусть $m^2 < 1$, тогда при $m^2 \leq q < m$ материал в зоне $R_1 \leq r < r_1$ разупрочняется, а в зоне $r \geq r_1$ находится в упругом состоянии. Значение I определяется формулой

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q^2}{n^4} \right) + \left(q - \frac{q^2}{m^2} \right) + (1 - q^2) \ln \frac{1/m^2 - 1}{1/q - 1}. \quad (2.5)$$

Дальнейшее увеличение q ($m \leq q < 1$) приводит к появлению у внутренней границы зоны „остаточной“ прочности $R_1 \leq r < r_4$, которая сменяется зоной разупрочнения $r_4 \leq r < r_1$ и упругой зоной $r \geq r_1$. В указанном диапазоне:

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q^2}{n^4} \right) - (1 - q) + (1 - q^2) \ln \left(1 + \frac{1}{q} \right). \quad (2.6)$$

Если $q = 1$, то $r_4 = r_1$ и зона разупрочнения вырождается. При $q > 1$ в материале остаются только две зоны: „остаточной“ прочности и упругости. Зоны разделены „фронтом“, радиус которого $r = qab$ увеличивается с увеличением q . В данном случае

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q^2}{n^4} \right). \quad (2.7)$$

Из общего решения (1.6) следует

$$Q = -\frac{\sigma_{rr}(R_2)}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_1} \int_{R_1}^{R_2} X_r(r) dr - 2I(q), \quad (2.8)$$

где $Q = -\sigma_{rr}(R_1)/\tau_1$ безразмерное давление на внутреннем контуре (отпор крепи). Последнее уравнение показывает, что для несжимаемого материала действие объемных сил $X_r = \gamma$ эквивалентно (в смысле смещений и давления на внутреннем контуре) приложению на внешнем контуре давления $\int_{R_1}^{R_2} X_r dr$.

Безразмерное смещение на внутреннем контуре определяется по решению (1.6) в виде

$$-\bar{v}_r = -b \frac{v_r(R_1)}{R_1} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[\frac{\sigma_{rr}(R_2)}{\tau_1} + 2I \right] + \frac{q^2}{m^4}. \quad (2.9)$$

Начальное состояние до проведения выработки можно представить как гидростатическое равновесие, при котором на внутреннем контуре приложено то же давление, что и на внешнем. Этому состоянию соответствуют определенные начальные смещения. Проведение выработки можно интерпретировать как уменьшение давления на внешнем контуре с начального значения, равного $\sigma_{rr}(R_2)$. Уменьшение давления вызывает дополнительные смещения $\Delta v_r < 0$, которые определяются вычитанием из (2.9) начальных смещений:

$$-\Delta \bar{v}_r = -b \frac{\Delta v_r(R_1)}{R_1} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} I(q) + \frac{q^2}{m^4}. \quad (2.10)$$

Выписанные формулы позволяют вычислить все параметры массива, представляющие интерес.

Остановимся на проблеме выбора характеристик материала. Выбор упругих постоянных и объемного веса трудностей не представляет. Величина τ_1 может быть вычислена по известному пределу пропорциональности, данным о временном сопротивлении или сцеплении.

При определении диаграммы напряжение — проскальзывание возникают две трудности. Первая связана с наличием на диаграмме падающего участка. Поэтому деформирование образцов должно осуществляться на прессах с контролируемыми деформациями. Вторая — с тем, что один из параметров диаграммы — проскальзывание — имеет размерность длины. При прямом определении диаграммы необходимо измерение относительных смещений „берегов“ линии скольжения. Однако если упругие свойства материала известны и известно расстояние между линиями скольжения, то проскальзывания можно легко вычислить по общей деформации образца. Возможен также путь, при котором учитывается, что закономерность изменения напряжений — проскальзываний близка по своему смыслу к закономерностям внешнего трения. Отличие состоит в том, что

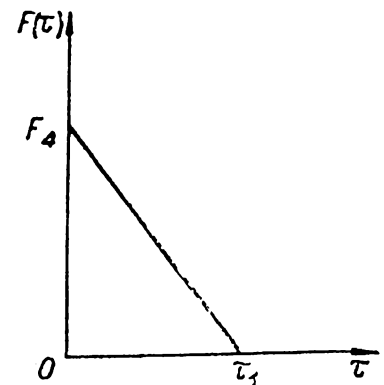


Рис. 6.18

диаграмма внешнего трения отражает поведение предварительно созданных свободных поверхностей при скольжении их друг по другу в то время, как диаграмма напряжения — проскальзывание включает в себя информацию не только о внешнем трении, но и о самом процессе нарушения связей по линии скольжения. Эти обстоятельства позволяют, используя методику исследования внешнего трения и дополнительные экспериментальные данные, косвенно определять диаграмму напряжения — проскальзывания.

В решении (1.5), (1.6) фигурирует также параметр, характеризующий „густоту“ сетки линий скольжения. В общем случае, как показывают эксперименты для сыпучих материалов и простые качественные соображения расстояния между линиями постоянной материала не является и зависит от условий нагружения. Возможно, что в рассматриваемой ситуации расстояние определяется густотой трещин подходящей ориентации.

Рассмотрим подробнее схематизированную диаграмму на рис. 6.18. Пусть некоторый образец сжимается в условиях плоской деформации. Из закона Гука следует, что наибольшая упругая деформация сжатия $\varepsilon_1 = 1/b$. Следовательно, постоянная b имеет смысл обратной величины наибольшей упругой деформации сжатия. Выясним механический смысл постоянной m . Расстояния между линиями скольжения на внутреннем контуре равны $l = R_1 \varepsilon$. Отсюда $a = F_4 / \varepsilon = F_4 R_1 / l$ и $m^2 = \varepsilon_1 / (F_4 / l)$. Предположим, что при сжатии образца за пределом упругости в нем образуется линия скольжения, проскальзывания по которым одинаковы (если не приняты специальные меры, то вследствие неустойчивости полностью может развиваться только одна линия).

Тогда по измеренному наклону падающей ветви путем экстраполяции можно определить осевую деформацию ε_4 , при которой образец полностью разупрочнится. Так как проскальзывание по каждой из линий при $\tau = 0$ равно F_4 , то $\varepsilon_4 \sim F_4 / l$, где l — среднее расстояние между линиями. Отсюда $m^2 \sim \varepsilon_1 / \varepsilon_4$, т. е. величина m^2 имеет смысл отношения наибольшей упругой деформации, при которой образец полностью разупрочняется.

Для выработок выполняется неравенство $R_1 \ll R_2$. Ограничимся только этим случаем. Анализ деформирования толстостенных сосудов из разупрочняющегося материала ($R_1 \sim R_2$) можно провести аналогично.

Обозначим через $\xi = \gamma R_2 / \tau_1$ безразмерную глубину проведения выработки. Величина ξ показывает внешнюю нагрузку, которой противостоят отпор крепи и материал за счет деформаций. Рассмотрим роль отпора крепи. Для реальных ситуаций отношение безразмерных отпора крепи к глубине порядка $10^{-2} \left(\frac{Q}{\xi} = \frac{-\sigma_{rr}(R_1)}{\gamma R_2} \sim \frac{20 m_1 / m^2}{2\varepsilon / \text{см}^3 \cdot 1 \text{ км}} = 10^{-2} \right)$. В

уравнении (2.8), определяющем параметр нагружения, отпор крепи и глубина входят в виде суммы. Поэтому роль отпора крепи в определении смещений на внутреннем контуре и радиуса зоны разупрочнения в общем случае пренебрежимо мала (порядка $10^{-2} \partial q / \partial Q$). Можно показать, что функция $I(q)$ имеет единственный максимум $I(q^*)$, который соответствует полной реализации несущей способности материала. В окрестности максимума $I'(q) \ll 1$, $\partial q / \partial Q \gg 1$ и влияние отпора крепи может быть существенным. Однако в действительности, если иметь ввиду необходимый коэффициент запаса, глубина, близкая к предельной, допускаться не должна. Поэтому для допустимых глубин реальный отпор крепи в терминах точного решения равен практически нулю и в дальнейшем в расчет может не приниматься. Можно показать, что при всех $0 < m < 1$ выполняется нера-

венство $q^*(m) < m$ и, следовательно, $r_4(q^*) < R_1$. Последнее означает, что полная несущая способность массива исчерпывается еще до появления зоны „остаточной прочности“.

Выше было показано, что нагрузке ξ материал должен противостоять только за счет собственных деформаций. Если $\xi < 1$, то нагрузка уравнивается за счет упругих деформаций, при $\xi \geq 1$ появляются неупругие деформации.

Интересно отметить, что при $\xi > 1$ единицу из внешней нагрузки ξ несет материал в упругой зоне, остальную часть — разупрочняющийся материал. Так, при $m = 0,3$ в предельном состоянии упругая область воспринимает 42% внешней нагрузки, неупругая — 58%.

При меньших m роль неупругой области еще выше: если $m = 0,2$, то 33 и 67% соответственно, при $m = 0,24$ и 76% и т. д.

Таким образом, даже простейшая схематизация показывает большую роль неупругой и, в частности, разупрочняющейся области в несущей способности массива.

На рис. 6.19 приведены графики измерения давления Q при различных параметрах нагружения q . Из определения (2.2) следует механический смысл параметра q : величина q является безразмерным радиусом зоны разупрочняющегося материала.

Формулы (2.8), (2.10) дают параметрические представления нагрузки на внутреннем контуре в зависимости от смещений на нем (рис. 6.20). Вид всех кривых $Q(q)$, $Q(-\Delta v_r)$ от глубины ξ не зависит. При изменении ξ , все графики перемещаются параллельно себе так чтобы ордината пересечения графиков с осью $q = 0$ равнялась ξ . Так как для реальных крепей $Q \approx 0$, то радиус зоны разупрочнения и смещение на внутреннем контуре определяются пересечением соответствующей кривой с осью $Q = 0$.

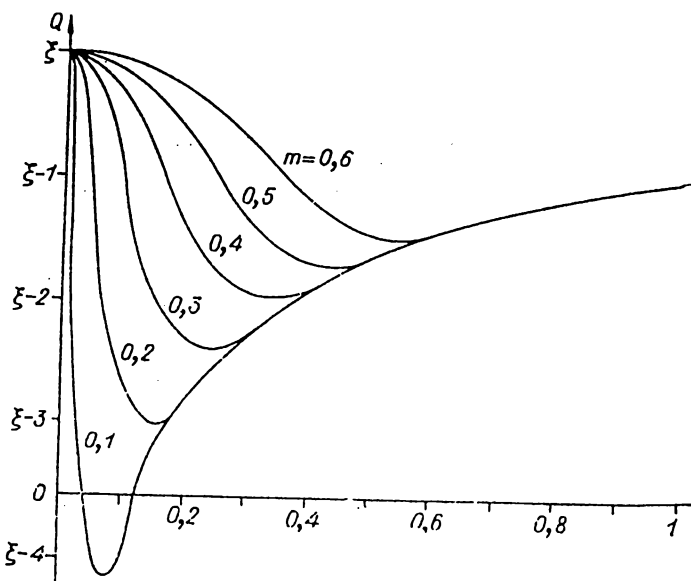


Рис. 6.19

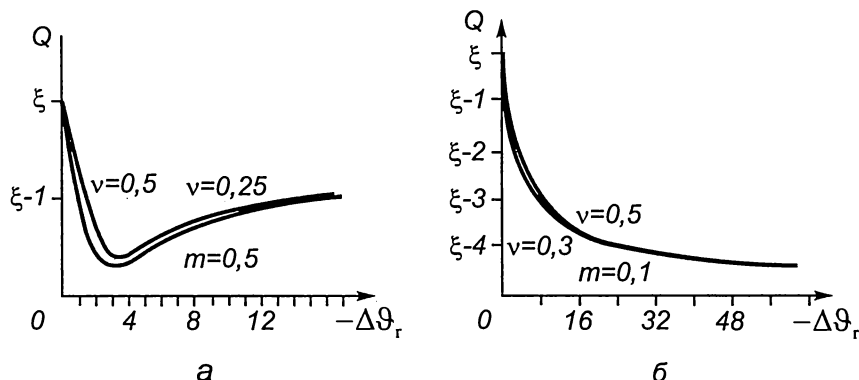


Рис. 6.20

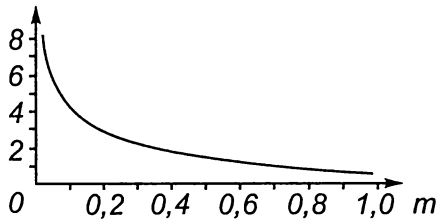


Рис. 6.21

Если $\xi < 1$, то смещение на внутреннем контуре пропорционально глубине, при $\xi > 1$ смещения растут быстрее, чем глубина.

Сравнивая кривые $Q(-\Delta \bar{v}_r)$ для различных m , легко проследить связь наибольшей глубины, при которой выработка устойчива, с параметром массива m : с увеличением m наибольшая глубина уменьшается. Причем с увеличением m предельная глубина становится менее чувствительной к погрешности m (рис. 6.21).

Рассмотрим пример перехода к размерным параметрам. Пусть

$$R_1 = 2 \text{ м}, R_2 = 1 \text{ км}, \tau_1 = 75 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3, \mu = 0,5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\gamma = 2,5 \text{ г/см}^2, m = 0,1.$$

Отсюда $b = 0,95 \cdot 10^3$, $\xi = 3,34$. По графикам на рис. 6.19, 6.20 или соответствующим формулам определяем параметр нагружения $q = 0,0342$ и безразмерную податливость — $\Delta \bar{v}_r = 10,8$. Отсюда ширина зоны разупрочнения равна $r_1 - R_1 = R_1 \left(\frac{q}{m^2} - 1 \right) \approx 4,8 \text{ м}$, податливость — $\Delta \bar{v}_r = 23 \text{ мм}$, что составляет 91% от податливости, рассчитанной для несжимаемого материала в той же ситуации. Доля упругих смещений от полных составляет 7%.

Приведенный пример рассчитан для предельно упрощенной диаграммы, показанной на рис. 6.18. Решение (1.5), (1.6) позволяет делать расчеты и для произвольных диаграмм. Кроме того, интеграл (1.5) позволяет исследовать поведение материала с пластически неоднородными свойствами, зависящими от гидростатического давления. В простейшем случае анализ решения можно провести аналитически. В общем случае анализ решения и соответствующие расчеты конкретных ситуаций необходимо проводить численно по схеме, рассмотренной выше.

Графики рис. 6.20 показывают, что если податливость крепи будет меньше, чем смещения, вычисленные при условии $Q \approx 0$, то давление на крепь резко возрастет и выведет ее из строя. С другой стороны, условие $Q \approx 0$ означает, что необходимый отпор крепи из точного решения определить невозможно. Поэтому для определения реального отпора требуется введение дополнительной гипотезы. Для глубин $\xi > 1$ у контура выработки появляется зона разупрочняющегося материала. Следуя [234], предположим, что отпор должен рассчитываться только на возможный вывал из области разупрочнения. Рассматривая различные гипотезы (например, сила давления равна весу материала в области влияния выработки [59]), можно получить формулы расчета давлений на крепь. В этих формулах через радиус зоны разупрочнения будет учитываться влияние на отпор глубины проведения выработки и прочностных свойств массива.

3. Выше предполагалось, что слагаемое $(1 - 2\nu)Z \equiv 0$. Интеграл (1.5) позволяет исследовать также второй случай $(1 - 2\nu)Z \neq 0$, т. е. исследовать поведение сжимаемого материала с объемными силами, направленными к центру $r = 0$. Если в первом случае $(1 - 2\nu)Z \equiv 0$ чередование зон было последовательным: к контуру отверстия примыкали неупругие зоны, которые сменялись упругостью, то в случае $(1 - 2\nu)Z \neq 0$ возможно непо-

следовательное чередование зон, когда при удалении от центра неупругие зоны сменяются упругой, затем опять неупругими зонами и т. д. Позднее этот эффект получил название явления зональной дезинтеграции и исследовался в ряде работ [240, 241].

Таким образом, построенное выше точное решение позволяет вычислить смещение на внутреннем контуре и неупругие зоны для выработок, пройденных в массиве с произвольной диаграммой, зависящей от гидростатического давления. Из решения можно так же определить параметры нагружения, при которых в массиве начнется неконтролируемое граничными условиями высвобождение упругой потенциальной энергии.

§ 6.6. УЧЕТ ДИЛАТАНСИИ В ОСНОВНЫХ СПРАВОЧНЫХ ФОРМУЛАХ МЕХАНИКИ СЫПУЧИХ СРЕД

Для расчета сооружений, взаимодействующих с грунтами и сыпучими материалами, используются две основные формулы:

$$\xi = \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2), \quad (1)$$

$$\beta = \pi/4 \pm \varphi/2. \quad (2)$$

Первая из них позволяет вычислить значение коэффициента бокового распора ξ в зависимости от угла внутреннего трения φ , вторая — угол наклона линии скольжения β за подпорной стенкой. Эти формулы получены на основе теоретических представлений механики сыпучих сред и широко используются в практических методах расчета.

Сыпучий материал, как известно, обладает двумя основными свойствами: внутренним трением и дилатансией. Соотношения (1), (2) учитывают только внутреннее трение и именно в такой форме приводятся во всех справочниках, учебниках и нормативных документах [242—244]. Вместе с тем в настоящее время имеется большое число теоретических и экспериментальных данных, свидетельствующих о том, что существенное влияние на напряженно-деформированное состояние сыпучих материалов оказывает и дилатансия [140, 245, 246]. Обратимся к математической модели § 4.6. Из формул (2.7), (1.5) § 4.6 следует, что коэффициент бокового распора равен

$$\xi = \operatorname{tg}[\pi/4 - (\varphi'_\mu + \nu)], \quad (3)$$

где φ'_μ — эффективный угол трения между частицами (в § 4.6 обозначен через φ^*); ν — угол дилатансии. Первый зависит только от условия на контактах, второй — от способа упаковки. Угол ν в § 4.6 определен следующим образом: $\operatorname{tg} \nu = \varepsilon / \gamma$, где $\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_1$ — скорость изменения объема, $\gamma = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ — скорость сдвига. Как и при выводе формул (1), (2), рассматривается плоская деформация: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — скорости главных деформаций. Все формулы связаны с уравнением предельного состояния: $\tau = -A\sigma$. Здесь τ, σ — инварианты: $\tau = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ — наибольшее касательное напряжение; $\sigma = (\sigma_2 + \sigma_1)/2$ — среднее сжимающее напряжение; σ_1, σ_2 — главные напряжения. Согласно классической теории [206], $A = \sin \varphi$, согласно § 4.6 $A = \operatorname{tg}(\varphi'_\mu + \nu)$. Углом внутреннего трения Φ принято называть угол между касательной к кругам Мора в плоскости σ_n, τ_n и осью $O\sigma_n$ (σ_n, τ_n — нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью n). В первом случае $\Phi = \varphi$, во втором — $\Phi = \arcsin \operatorname{tg}(\varphi'_\mu + \nu)$.

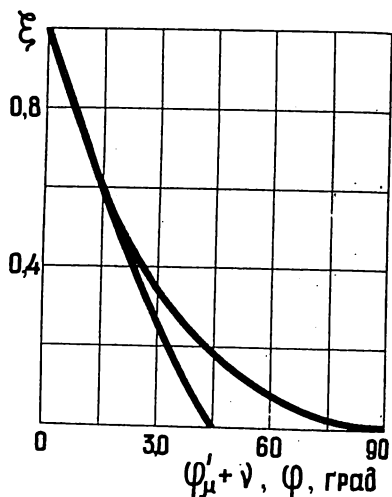


Рис. 6.22

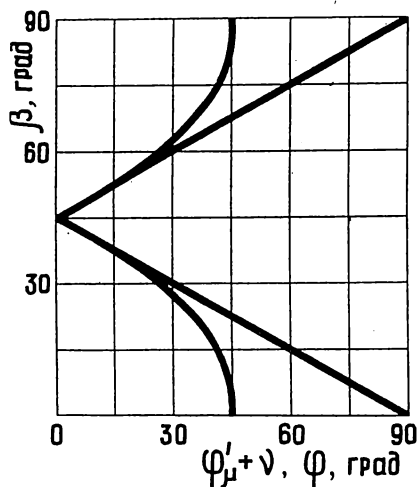


Рис. 6.23

Если иметь в виду тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg}[\pi/4 - (\varphi'_\mu + \nu)] \equiv \operatorname{tg}^2[\pi/4 - 1/2 \arcsin \operatorname{tg}(\varphi'_\mu + \nu)],$$

то соотношению (3) можно придать форму (1). Угол β в (2) дает верхнюю оценку активного давления на подпорную стенку и нижнюю оценку — пассивного. В случае (3)

$$\beta = \pi/4 \pm \frac{1}{2} \arcsin \operatorname{tg}(\varphi'_\mu + \nu). \quad (4)$$

На рис. 6.22 приведены графики функций (1), (3), на рис. 6.23 — функций (2), (4). Видно, что в обоих случаях до значений φ и $\varphi'_\mu + \nu$, равных примерно 20° , результаты близки, затем различие становится существенным, а по мере приближения к 45° они отличаются качественно. Следует отметить, что это связано не столько с учетом дилатансии (формулы (3), (4) не переходят в (1), (2) при $\nu = 0$), сколько с заменой в условии предельного состояния коэффициента A с $\sin \varphi$ на $\operatorname{tg}(\varphi'_\mu + \nu)$.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что соотношения (3), (4) позволяют учесть такое фундаментальное свойство сыпучих материалов, каким является дилатансия, и тем самым более адекватно описывать напряженно-деформированное состояние в массиве из сыпучего материала, взаимодействующего с конструкциями и сооружениями. Инженерные расчеты требуют простых и надежных экспериментальных методов определения параметров материала. Наибольшую трудность вызывает определение угла дилатансии ν . Однако во всех формулах для напряжений угол фигурирует только в сумме $\varphi'_\mu + \nu$. Поэтому в тех случаях, когда вопрос о кинематике не ставится, можно ограничиться определением суммарного угла. Для этого могут быть использованы сдвиговые приборы различных конструкций, позволяющие определять прочностные свойства материалов в зависимости от их исходной плотности [159, 247], а также [9, 16].

На рис. 6.24 показано, как может меняться угол наклона линии скольжения за подпорной стенкой в зависимости от структуры сыпучего материала. В предельном случае,

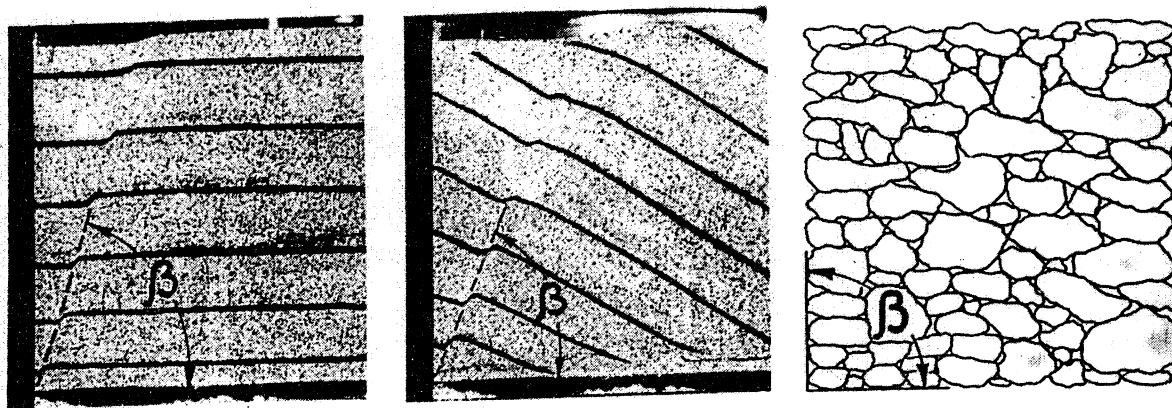


Рис. 6.24

когда форма частиц близка к пластинчатой, угол $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Классическая теория (равенство (2)) такой результат не может дать в принципе, так как в этом случае угол φ должен стремиться к $\pi/2$, а это означает, что коэффициент внутреннего трения $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$. В природе таких материалов не существует. С другой стороны, для формулы (4) такая ситуация является вполне допустимой. Здесь $\varphi'_\mu + \nu \rightarrow \pi/4$ и, следовательно, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

В работе [45] приведены дополнительные экспериментальные результаты, подтверждающие изложенные выше теоретические построения.

§ 6.7. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА БОКОВОГО РАСПОРА СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Выше значение коэффициента бокового распора вычислялось из условия равновесия элементарного объема среды. Для объема среды конечных размеров такой подход эквивалентен предположению о том, что в объеме среды реализуется однородное напряженно-деформируемое состояние. В практических, приближенных расчетах это понятие часто распространяется и на случаи, когда распределение напряжений однородным не является. При такой трактовке понятие о коэффициенте бокового распора становится основным при разработке приближенных схем расчета давлений сыпучего материала. Если же задача о распределении напряжений решается в строгой постановке, то необходимости введения параметра, называемого коэффициентом бокового распора, вообще не возникает. В этом случае задаются только математическая модель деформирования среды, ее параметры и краевые условия. Соотношения между напряжениями, которые можно интерпретировать как коэффициент бокового распора, могут быть определены уже после решения конкретной задачи.

Прикладные задачи обычно решаются в рамках полуобратных приближенных схем, одной из посылок которых является введение дополнительной характеристики среды (коэффициента бокового распора) и ряда априорных предположений о распределении напряжений [248]. Основные предложения концентрируются в гипотезе о том, что коэффициент бокового распора k постоянен.

В этой гипотезе содержится целый ряд предложений о том, что коэффициент бокового распора не зависит от податливости ограждающих поверхностей, характера распределения давлений, истории нагружения материала и т. д. Однако известно, что величина k на самом деле зависит от указанных и многих других факторов. Поэтому все гипотезы, которые содержатся в предположении $k = \text{const}$, являются только определенными приближениями. Можно ожидать, что в зависимости от конкретной ситуации некоторые из указанных гипотез будут выполняться довольно точно, другие — менее точно и третьи вообще будут неудовлетворительными. Большой интерес представляет теоретическая оценка различных предположений, которая может быть получена из решения задач в строгой постановке [42].

Для этого необходимо выбрать математическую модель деформирования, область нагружения и корректные краевые условия. Ограничимся случаем плоской деформации в рамках модели § 4.6, которая описывает основные свойства среды и не предполагает условия предельного состояния. В приближенных схемах расчета гипотеза $k = \text{const}$, вводится как обобщение закона Паскаля, причем сама величина коэффициента характеризует способность тонких слоев материала передавать нагрузку, распределенную по их длине, в направлении боковых ограждающих поверхностей. Поэтому в качестве области нагружения будем рассматривать тонкий слой. Условия на границах слоя зависят от способа нагружения и всей области деформирования, из которой этот слой выделен. Однако для оценки гипотез достаточно ограничиться некоторыми характерными случаями, когда условия на границах слоя задаются непосредственно, а не определяются всей задачей.

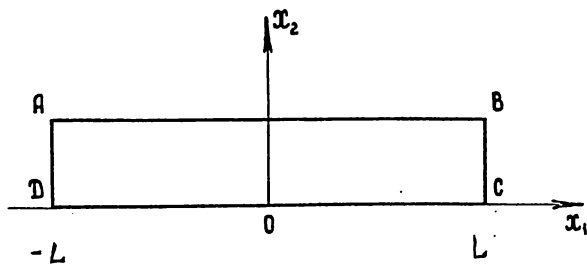


Рис. 6.25

Рассмотрим случай, когда на границах касательные напряжения отсутствуют и боковые поверхности ортогональны поверхности AB (рис. 6.25). На поверхности AB будем задавать распределения нормальных напряжений или смещений, на боковых поверхностях — условия винклеровской податливости, на поверхности CD — условие отсутствия вертикальных смещений. Рассмотрим сначала наиболее простой вопрос о влиянии податливости боковых поверхностей на величину коэффициента

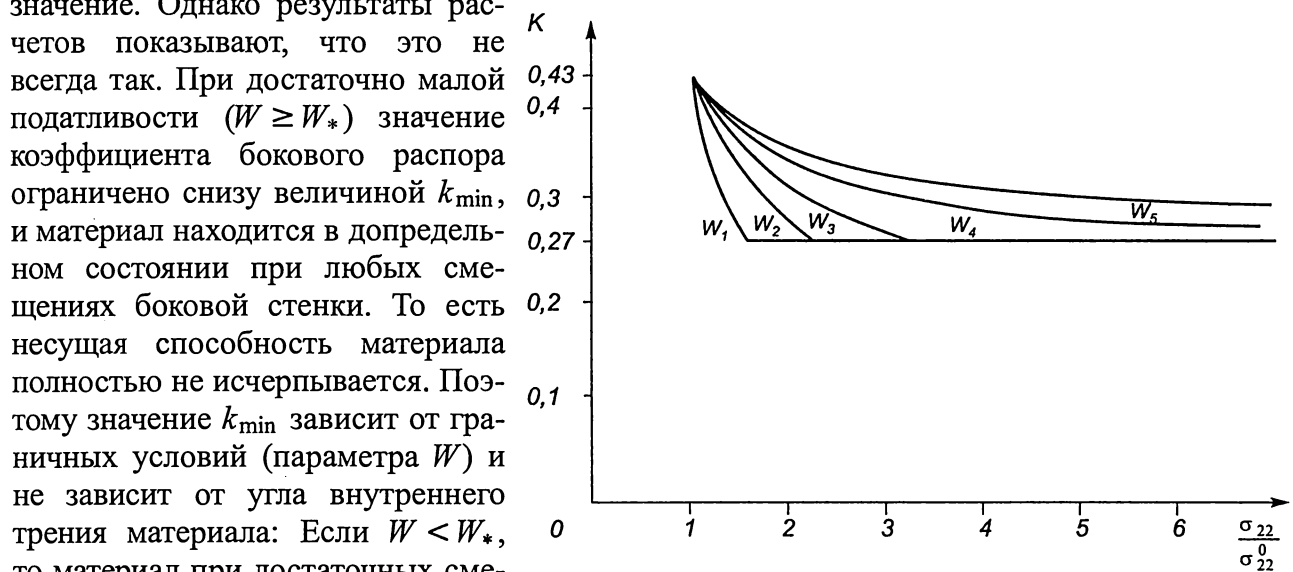
бокового распора. Чтобы выделить это влияние в чистом виде, будем рассматривать случай равномерного давления на AB . Обозначим через W безразмерный коэффициент винклеровской податливости боковых стенок (напряжение σ_{11} , действующее на стенку, вызывает смещение $u_1 = \frac{L}{W} \cdot \frac{\sigma_{11}}{E}$, E — модуль упругости, $2L$ — длина слоя). Одним из факторов, влияющих на коэффициент бокового распора, является способ формирования слоя сыпучего материала. Это влияние учитывается выбором начальных напряжений, действующих в слое при нулевом параметре нагружения. Начальные напряжения не определяются уравнениями среды и зависят только от условий формирования слоя. Во всех задачах в качестве начального рассматривалось однородное напряженное состояние:

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \sigma_{11} = k^0 \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{22}^0, k^0 = \text{const},$$

k^0 — начальный коэффициент бокового распора. Последующие приращения напряжений уже определяются уравнениями среды и граничными условиями. Уравнения решались на ЭВМ БЭСМ-6 методом конечных элементов [41, 249].

Остановимся на предельном случае абсолютно жестких боковых стенок. При $W = \infty$ боковые стенки неподвижны и деформирование материала происходит в стесненных условиях. Поэтому пластические деформации не развиваются и боковой распор определяется в основном упругими характеристиками среды. Более того, если начальное значение $k^0 \leq \nu_e = \frac{\nu_3}{1 - \nu_3}$ (ν_3 — коэффициент Пуассона), то пластические деформации вообще

отсутствуют, и материал может деформироваться только упруго. Причем при дальнейшем нагружении коэффициент бокового распора не меняется. Если $k^0 > \nu_e$, то увеличение нагрузки может привести к некоторому изменению бокового распора за счет незначительных пластических деформаций материала. Таким образом, в условиях стесненных деформаций состояние материала ближе к упругому, чем к предельному. В дальнейшем, чтобы исключить составляющую пластических деформаций, которая связана только с начальными напряжениями, значение k^0 будем полагать равным ν_e . Пусть теперь боковые стенки податливы. Тогда при увеличении вертикальной нагрузки боковая поверхность будет смещаться наружу. Это приведет к развитию сдвиговых деформаций и большей мобилизации несущей способности материала. Поэтому можно ожидать, что коэффициент бокового распора уменьшится. На рис. 6.26 показаны графики изменения коэффициента бокового распора в зависимости от величины безразмерного вертикального, давления для различных значений W . Видно, что при фиксированной податливости W коэффициент бокового распора с увеличением смещения боковой стенки действительно уменьшается. Можно было бы также ожидать, что достаточно большое смещение боковой стенки приведет к тому, что материал перейдет в предельное состояние, при котором его несущая способность исчерпана полностью и коэффициент бокового распора имеет наименьшее значение. Однако результаты рас-



счетов показывают, что это не всегда так. При достаточно малой податливости ($W \geq W_*$) значение коэффициента бокового распора ограничено снизу величиной k_{\min} , и материал находится в допредельном состоянии при любых смещениях боковой стенки. То есть несущая способность материала полностью не исчерпывается. Поэтому значение k_{\min} зависит от граничных условий (параметра W) и не зависит от угла внутреннего трения материала: Если $W < W_*$, то материал при достаточных смещениях боковой стенки в предельное состояние переходит. В этом

Рис. 6.26

случае значение k_{\min} зависит от угла внутреннего трения и не зависит от W . Графики, приведенные на рис. 6.26, получены для следующих значений параметров: коэффициент Пуассона $\nu_3 = 0,3$ ($\nu_e = 0,43$), угол дилатансии $\nu = 0$, угол внутреннего трения $\varphi^* = 30^\circ$, $W_1 = 0,05$; $W_2 = 0,42$; $W_3 = 0,96$; $W_4 = 1,93$; $W_5 = 2,56$. В этом случае $W_* = 1,83$.

Рассмотрим вопрос о влиянии характера распределения давлений на величину бокового распора. Для оценки этого фактора решалась серия задач об определении величины k при различных распределениях нагрузки по длине слоя. Эпюры нормальных давлений $\sigma_{22}(x_1)$ задавались тремя параметрами p, ρ, t

$$\frac{\sigma_{22}(x_1)}{\sigma_{22}^0} = t \left[p + \rho \left(\frac{x_1^2}{L^2} - \frac{1}{3} \right) \right] + 1, \quad (1)$$

где $t \geq 0$ — параметр нагружения, ρ — параметр, характеризующий отклонение эпюры от равномерной, $\sigma_{22}^0 \cdot (pt + 1)$ — среднее давление.

Пусть распределение напряжений имеет вид (1), где $t = 1$. Известно, что напряженно-деформированное состояние сыпучей среды зависит от всей истории нагружения. В уравнениях это свойство отражается в неголономности определяющих соотношений. При исследовании конкретных задач это обстоятельство приводит к необходимости решения последовательности задач при всех предшествующих значениях параметра нагружения. Рассмотрим сначала случай монотонного нагружения, когда приближение к эпюре (1) осуществляется снизу, т. е. t монотонно меняется от 0 до 1.

Таблица 1

ρ	-14,72	-7,36	-3,68	0	3,68	7,36	14,72
k	0,27	0,3	0,32	0,43	0,54	0,56	0,58

Таблица 2

ρ	-7,36	-3,68	-1,84	0	1,84	3,68	7,36
k	0,31	0,32	0,34	0,43	0,5	0,53	0,56

Таблица 3

ρ	-14,72	-7,36	-3,68	0	3,68	7,36	14,72
k	0,27	0,27	0,27	0,27	0,33	0,33	0,34

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициента бокового распора для различных параметров p и r в случае абсолютно жестких боковых стенок (в табл. 1 $p = 10$, в табл. 2 $p = 5$). Решения показывают, что неравномерность эпюры даже для абсолютно жестких боковых стенок приводит к значительным пластическим деформациям. Поэтому коэффициент бокового распора определяется как упругими, так и пластическими свойствами среды. Для

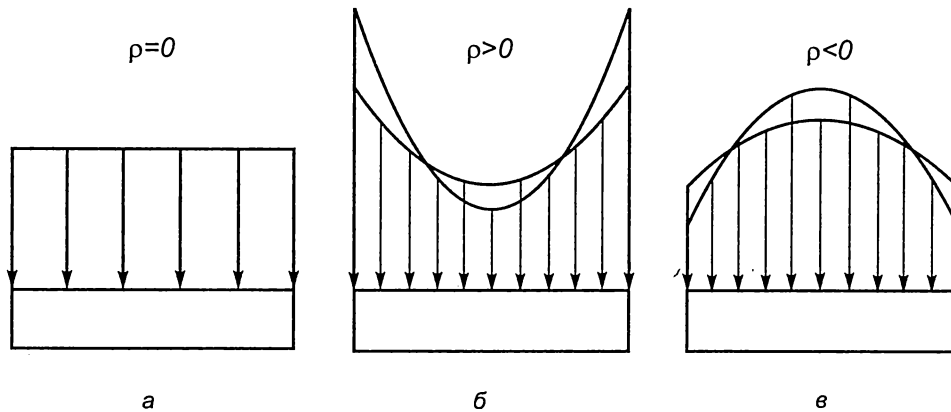


Рис. 6.27

равномерной эпюры (рис. 6.27 а) значение $k = 0,43$. Если распределение давлений неравномерно и меняет свой характер, как показано на рис. 6.27 б, то коэффициент бокового распора увеличивается, в случае 6.27 в — уменьшается.

Податливость стенок приводит к увеличению пластических деформаций. Например, при $W = 0,56$, $p = 0$ материал переходит в предельное состояние уже при $\rho = 0$ (табл. 3). Поэтому при распределениях нагрузки, показанных на рис. 6.27 в, уменьшения коэффициента бокового распора не происходит. Для распределений, показанных на рис. 6.27 б — значение k больше, чем при равномерном давлении, но меньше, чем для таких же эпюр, но в случае, когда боковые стенки жесткие (см. табл. 1). Перейдем к вопросу о влиянии истории нагружения. Пусть параметр t увеличивается от 0 до $t_{\max} > 1$ и затем уменьшается до 1, т. е. приближение к эпюре (1), $t = 1$ идет сверху. В этом случае боковой распор будет больше, чем при монотонном нагружении. Так, при $W = \infty$, $p = 10$, $\rho = 14,72$ и $t_{\max} = 1,3$; $1,5$ соответственно значение $k = 0,63$; $0,67$ (для монотонного нагружения $k = 0,58$). Введение податливых стенок приводит к возрастанию роли истории нагружения. Например, при $W = 0,56$, $p = 10$, $\rho = 14,72$, $t_{\max} = 1,5$ коэффициент бокового распора равен $0,44$ (для монотонного нагружения $k = 0,34$).

Задача о сжатии слоя сыпучего материала имеет и самостоятельное значение в связи с расчетами несущей способности закладочного массива, используемого при некоторых системах отработки угольных пластов (см. главу 11). Рассмотрим простейшую ситуацию, когда слой горизонтален и сжимается шероховатыми плитами. На нижнем основании по-прежнему будем ставить условия отсутствия касательных напряжений и вертикальных смещений (середина слоя между плитами), на верхнем основании — условие сухого трения $|\sigma_{21}| \leq -f \cdot \sigma_{22}$, где f — коэффициент внешнего трения. Если выполняется строгое неравенство, то смещения вдоль плиты отсутствуют (трение неразвито), если выполняется равенство, то на смещения вдоль плиты ограничений нет (развитое трение). Участки развитого и неразвитого трения заранее неизвестны и определялись в процессе решения задачи так же, как и в работе [41]. Кроме указанных условий, на верхнем основании задается эпюра вертикальных смещений. На боковых поверхностях, которые можно считать гладкими, задается условие винклеровской податливости.

Наличие внешнего трения приводит к появлению в слое несущего ядра — области материала, для которой внешнее трение неразвито. Ограничимся случаем, когда плиты

абсолютно жесткие, т. е. на верхнем основании смещение u_2 постоянно и монотонно увеличивается от нуля. На рис. 6.28 показаны эпюры-распределения нормальных напряжений на различных этапах сжатия слоя ($l = 8h$, h — высота слоя, эпюры 1, 2, ..., 6 соответствуют смещениям $\frac{u_2}{h} \times 10^2 = 0; 1; 2; 3; 4; 5$).

Решения показали, что во всей области, за исключением участков, примыкающих к боковым стенкам, трение неразвито.

В заключение отметим, что для упрощения интерпретации результатов некоторые факторы из расчетов были исключены. Так, предполагалось, что угол дилатансии от сдвигов не зависит и равен нулю, коэффициент η (см. § 4.6), связывающий приращения допредельных пластических деформаций и напряжений, постоянен ($\eta = 0,01$). Соответствующие обобщения могут быть легко сделаны и приведут к некоторому количественному изменению результатов. Основные качественные выводы, по-видимому, останутся без изменений.

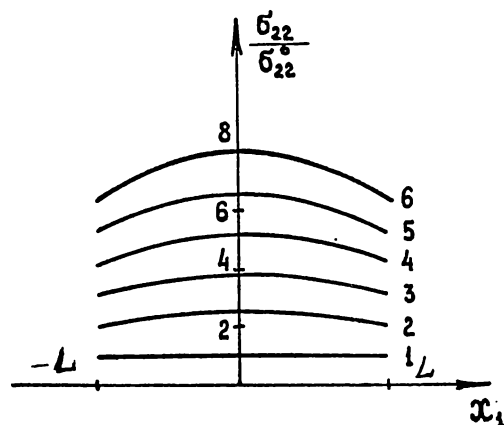


Рис. 6.28

§ 6.8. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЯНСЕНА

Пусть некоторая емкость заполнена жидкостью. Задача определения давления жидкости на дно и стенки емкости имеет элементарное решение. Это решение следует из уравнения равновесия, закона Паскаля и условия отсутствия касательных напряжений на границе. Предположим теперь, что емкость заполнена идеально сыпучим материалом, состоящим из отдельных твердых частиц. В этом случае задача определения давления существенно усложняется. Это связано с тем, что для сыпучих материалов нет аналога закона Паскаля и, кроме того, в отличие от жидкостей, давление сыпучего материала зависит не только от высоты заполнения емкости, но и от способа ее заполнения.

Задача определения давления сыпучего материала на дно и стенки емкости является одной из классических в механике. Интерес к ней связан с необходимостью расчета различных бункеров для хранения сыпучих и порошковых материалов, химических реакторов, заполненных гранулированными компонентами и т. д.

Первое решение задачи для вертикальных боковых стенок было получено Янсенем [250]. Решение Янсена базируется на двух гипотезах: коэффициент бокового распора k , равный отношению нормального напряжения на стенке к среднему нормальному напряжению в горизонтальном сечении, постоянен (аналог закона Паскаля) и касательные напряжения на стенках полностью развиты и пропорциональны нормальным напряжениям.

Последующие исследования этой задачи, по существу, проводились в рамках указанных гипотез [248]. Действующие в настоящее время строительные нормы и правила также базируются на решении Янсена, в которое вводится ряд поправочных эмпирических коэффициентов [244].

Для использования решения Янсена необходимы данные о величине коэффициента бокового распора. Рекомендуемые различными нормами значения k колеблются в весьма широких пределах. Так, для зернохранилищ по нормам России $k \approx 0,4$ [244], по нормам

США $k \approx 0,6$, в ФРГ в течение многих лет использовалось значение $k \approx 0,3$, затем ввели $k \approx 0,5$, причем „эти значения чисто предположительные“ [251]. Таким образом, в схеме Янсена вопрос о значении коэффициента бокового распора остается открытым. Кроме того, оставаясь в рамках этой схемы, невозможно оценить и ее точность. Экспериментальная же оценка точности наталкивается на ряд принципиальных трудностей, связанных с зависимостью давления от податливости датчиков, стенок емкости и других факторов.

В связи с этим большой интерес представляет решение задачи методами механики сплошных сред без использования гипотез 1), 2). Решение точными методами позволяет найти распределение всех напряжений и количественно оценить влияние различных факторов. При таком подходе обобщения на случай наклонных или криволинейных боковых стенок, в отличие от схемы Янсена, новых трудностей не вызывают. По известному решению может быть вычислен коэффициент бокового распора и дана оценка погрешности инженерного решения, основанного на гипотезах 1), 2) [41].

Первая трудность, которая возникает при строгой постановке задачи, связана с выбором математической модели деформирования среды. Математическая модель должна удовлетворительно описывать два основных свойства среды: внутреннее трение и дилатансию. В большинстве моделей внутреннее трение описывается конечным уравнением относительно напряжений. В это уравнение входит гидростатическое сжатие, т. е. для каждого элементарного объема среды принудительно ставится условие предельного состояния. Анализ экспериментальных данных показывает, что в общем случае это основное предположение является наименее оправданным. Поэтому вопросы о предельном или допредельном состоянии материала также, как и об активном нагружении или разгрузке должны рассматриваться в процессе решения краевой задачи.

Рассмотрим поставленную задачу в рамках математической модели § 4.6. Ограничимся случаем плоской деформации. В § 4.6 введена характеристика напряженного состояния φ , имеющая смысл угла, на который отклоняется вектор напряжений на контакте возможного скольжения между частицами от нормали к контакту. Ориентация контактов определяется направлением наибольшего сжимающего напряжения и углом дилатансии ν . Пусть Ox_1x_2 — исходная декартова система координат. Обозначим через σ_{ij} , σ_i ($i, j = 1, 2$) компоненты напряжений и главные напряжения. Пусть

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}.$$

Как отмечалось, сжимающие напряжения будем считать отрицательными. Выберем угол θ так, чтобы $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Из уравнений § 4.6 следует необходимое условие появления приращений пластических деформаций:

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\pi}{4} - \nu > 0.$$

В противном случае материал будет деформироваться упруго при любых приращениях напряжений. Пусть $\Delta\Lambda$ — приращение безразмерных проскальзываний на контактах. Одно из определяющих уравнений имеет вид:

$$\Delta\Lambda = \eta_s \Delta\varphi, \quad (1)$$

где

$$\eta_s = \begin{cases} 0 \leq \eta < \infty & \text{при } \varphi < \varphi^*, \Delta\varphi > 0, \\ 0 & \text{при } \varphi > 0, \Delta\varphi < 0, \end{cases}$$

$\eta, \varphi^* > 0$ — параметры материала. Если $\varphi = \varphi^*$, то уравнение (1) заменяется на следующее:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ при } \Delta\Lambda \geq 0,$$

$$\Delta\Lambda = 0 \text{ — в остальных случаях.}$$

Проскальзывания между частицами, вообще говоря, приводят к изменению ориентации их контактов. Поэтому

$$\Delta\nu = \xi\Delta\Lambda,$$

где ξ — известный параметр.

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (2)$$

$$\{\Delta\sigma\} = [B]\{\Delta\epsilon\},$$

где $\Delta\sigma = \{\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}, \Delta\sigma_{33}\}$, $\Delta\epsilon = \{\Delta\epsilon_{11}, \Delta\epsilon_{22}, \Delta\epsilon_{33}\}$, $[B]$ — матрица, определенная в § 4.6.

Рассмотрим сначала общую схему численного решения задачи. Напряженно-деформированное состояние сыпучего материала зависит от истории его нагружения. Этот факт отражается в неголономности определяющих уравнений. Поэтому задача решается по приращениям параметра нагружения. Есть еще одна не менее важная причина необходимости перехода к приращениям. Эта причина связана со спецификой параметра нагружения в поставленной задаче. Как правило, задачи деформирования ставятся для определенных областей, на границах которых задаются краевые условия, зависящие от параметра нагружения. При этом предполагается существование естественного состояния, когда при нулевом значении параметра нагружения напряжения и деформации отсутствуют. Такие постановки для рассматриваемой задачи неудовлетворительны.

Основным фактором, влияющим на формирование давления на дно и стенки емкости является вес материала. Заполнение емкости производится постепенно при постоянном ускорении свободного падения. Поэтому в качестве параметра нагружения необходимо принять положение свободной поверхности материала. Таким образом, при начальном значении параметра нагружения деформируемая область вообще отсутствует. При увеличении параметра нагружения меняются как напряжения в области, так и сама область деформирования. Поэтому понятие естественного состояния теряет смысл. В связи с этим теряет смысл и понятие деформаций.

При численном решении необходимо задаваться малым, но конечным приращением параметра нагружения. Так как параметром нагружения является положение свободной поверхности материала, то в качестве его приращения в данной задаче выступает не скаляр, а скалярная функция $h_i(x_1) \geq 0$, равная высоте слоя материала, поступающего в бункер на i -м шаге. Пусть на предыдущем шаге решение известно, т. е. в области D_{i-1} известно распределение напряжений, угла φ и параметров η , ξ и ν (рис. 6.29). На следующем

шаге в бункер поступает новый слой материала d_i . Под действием собственного веса в слое устанавливается некоторое распределение напряжений $\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}(x_1, x_2)$. В общем случае для расчета этих напряжений не существует определенной замкнутой системы уравнений. Начальные напряжения должны удовлетворять только неравенствам, отражающим ограниченность коэффициентов внутреннего и внешнего трения, уравнениям равновесия и в остальном могут быть произвольными. Распределение этих напряжений определяется не моделью материала, а конкретными способами заполнения емкости. Таким образом, способ заполнения емкости характеризуется последовательностью функций $h_i(x_1), \sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}(x_1, x_2)$ и функциями η, ξ, ν . Параметры η, ξ, ν определяют поведение материала при его последующем нагружении, когда слой d_i оказывается внутри области деформирования. Как правило, сыпучие материалы состоят из частиц различных фракций. При однородном распределении фракций по объему материал будет однородным. Однако если при заполнении не предусмотрены специальные меры, то может произойти сегрегация — разделение фракций. Это приводит к тому, что при засыпке первоначально однородного материала в поступившем слое d_i он будет уже неоднородным. Поэтому функции ξ, η, ν в общем случае будут явно зависеть от координат x_1, x_2 .

Можно поставить задачу определения характеристик засыпки, исходя только из условий ее технической реализации. Однако эта задача по методам исследования отличается от исходной и в настоящей работе не рассматривается. Ниже будем предполагать, что способ заполнения задается непосредственно функциями

$$h_i(x_1), \sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}(x_1, x_2), \eta, \xi, \nu(x_1, x_2 \dots).$$

Для области D_{i-1} поступление в бункер i -го слоя означает, что на поверхности AB появилось некоторое распределение касательных и нормальных напряжений

$$\tau_{\alpha}^{(i)} = \Delta \tau_{\alpha}, \sigma_{\alpha}^{(i)} = \Delta \sigma_{\alpha}. \quad (3)$$

Напряжения (3) приводят к изменению состояния материала в области D_{i-1} . Это изменение уже определяется уравнениями (2). Прибавляя приращения напряжений, полученные из решения системы (2) при условии (3), к известному распределению напряжений, получим распределение напряжений в области D_{i-1} на следующем шаге. Затем полученное решение продолжается на большую область $D_i = D_{i-1} \cup d_i$ (начальные напряжения в слое d_i известны). Отметим два обстоятельства. Во-первых, продолженное решение, вообще говоря, не будет гладким. Это связано с тем, что условия склейки (3) обеспечивают непрерывность только двух компонент тензора напряжений. Третья компонента, которая не входит в эти условия, может быть разрывной. Кроме того, на границах слоев могут быть разрывными и производные напряжений. Возможная негладкость решения связана с

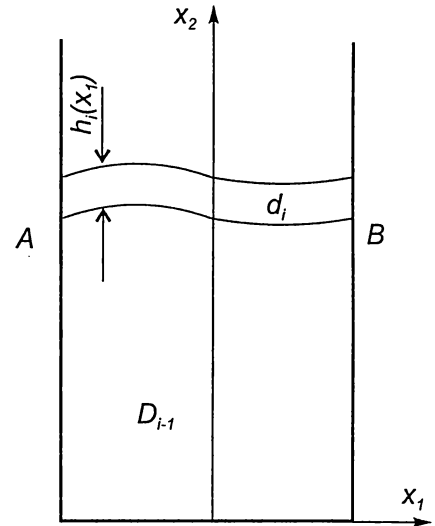


Рис. 6.29

существом рассматриваемой задачи. Таким образом задача сводится к решению системы (2) для фиксированной области деформирования.

Рассмотрим краевые условия. Одно из условий имеет вид (3). Перейдем к условиям на контакте материала с емкостью. Ограничимся пока случаем абсолютно жестких стенок. Контакт обладает свойствами сухого трения. Обычно условие сухого трения записывается в виде равенства $|\tau_\alpha| = -f\sigma_\alpha$, где τ_α , σ_α — касательное и нормальное напряжения на границе, f — коэффициент внешнего трения (сжимающие напряжения отрицательны). Такая форма краевого условия предполагает, что трение на границе полностью развито и, строго говоря, не описывает основное свойство сухого трения. Вопрос о степени развитости внешнего трения того же порядка, что и о предельном или допредельном состоянии среды. В рассматриваемом классе задач этот вопрос имеет принципиальное значение. Поэтому в строгой постановке граничное условие необходимо записывать в виде неравенства $|\tau_\alpha| \leq -f\sigma_\alpha$. Причем участки границы, где выполняются строгое неравенство или равенство, заранее неизвестны и должны определяться в ходе решения краевой задачи. Пусть α — угол, на который отклоняется стенка бункера от вертикали, Δu_1 , Δu_2 — приращения компонент смещений. Тогда по правилам тензорного проектирования:

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &= \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_\alpha &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Если внешнее трение развито не полностью, то смещением материала относительно жесткой поверхности можно пренебречь. При развитом трении проскальзывание неопределено и остается только одно кинематическое условие непроникания. Таким образом,

$$\Delta u_1 = 0, \Delta u_2 = 0, \text{ если } |\tau_\alpha| < -f\sigma_\alpha \quad (4)$$

и

$$\Delta u_1 \cos \alpha + \Delta u_2 \sin \alpha = 0, \text{ если } |\tau_\alpha| = -f\sigma_\alpha. \quad (5)$$

Рассмотрим вопрос определения неизвестных участков границы, где выполняются условия (4) или (5). В точках раздела должно выполняться условие склейки

$$(\tau_\alpha / \sigma_\alpha)^+ = (\tau_\alpha / \sigma_\alpha)^-, \quad (6)$$

где индексами „+“, „—“ обозначены односторонние пределы. Предположим сначала, что на всей границе относительное проскальзывание материала отсутствует. Из полученного решения определим отношение нормальной и касательной компонент напряжений. Сравнивая его со значением f , определим участки границы, где на следующем шаге необходимо поставить условие развитого сухого трения (5). Этот итерационный процесс заканчивается, когда во всех точках раздела выполняется условие склейки (6).

Более общий случай, когда учитывается различие в значениях статического и кинематического коэффициентов трения, рассматривается аналогично. Пусть f , f_0 — статический и кинематический коэффициенты трения, $f_0 < f$. Тогда условие непрерывности (6) заменяется условием на скачок отношения $\tau_\alpha / \sigma_\alpha$:

$$(\tau_\alpha / \sigma_\alpha)^+ - (\tau_\alpha / \sigma_\alpha)^- = f - f_0.$$

Таким образом, задача с краевыми условиями, содержащими неравенства, сводится к решению последовательности задач с краевыми условиями типа равенств.

Переход к приращениям в системе уравнений позволяет частично линеаризовать задачу и считать параметры ξ, η постоянными, зависящими от решения на предыдущем шаге. Однако в целом система (2) нелинейна. Источником нелинейности является существенная зависимость коэффициента η_s в уравнениях от решения $\Delta\varphi$. Механический смысл этой зависимости связан с тем, что в областях активного нагружения и разгрузки поведение среды описывается различными уравнениями. Так как эти области заранее неизвестны, то это приводит к проблеме решения задачи с неизвестной границей.

Модель (2) описывает постепенное накопление пластических сдвигов при допредельном состоянии материала. Если есть некоторый порог $\varphi_e > 0$ такой, что при $\varphi < \varphi_e$ материал деформируется упруго, то в процессе решения необходимо определить и упруго-пластические границы. Необходимо выделить и области предельного состояния материала, когда угол φ достигает своего предельного значения φ^* и при активном нагружении не меняется ($\varphi = \varphi^*, \Delta\varphi = 0, \eta = \infty$). Границы области предельного состояния также предполагаются неизвестными.

Неизвестные границы определялись следующим образом. На первом шаге область деформирования представляет собой один слой с заданным начальным состоянием и напряжением. Затем выбирается определенная малая величина пригрузки, или толщина h следующего поступившего слоя материала. Для этой пригрузки решается задача (2) с $\eta_s = \eta$ и определяется область, где $\Delta\varphi < 0$. Если эта область оказывается большой, то величина h уменьшается в M_h раз так, чтобы для нового значения h характерный размер области, где $\Delta\varphi < 0$, был не больше наперед заданной величины L_ε . Величина L_ε выбрана так, чтобы решение задачи с разрывным коэффициентом η_s ($\eta_s = \eta$ внутри области, где получилось $\Delta\varphi > 0$, и $\eta_s = 0$ вне этой области) не изменяло в пределах точности всех вычислений область, где $\Delta\varphi < 0$. Величина M_h выбиралась оптимальным образом, исходя из линейности задачи при заданном η_s . На последующих шагах упруго-пластические границы смещались на величину порядка L_ε , и каждый раз решалась задача с разрывным коэффициентом η_s .

Реализация изложенной схемы методом конечных элементов (рис. 6.30) описана в [41].

Прежде чем переходить к численному решению двумерных задач, полезно рассмотреть аналитическое решение для какой-либо простейшей ситуации. Предположим, что бункер ограничен вертикальными абсолютно гладкими стенками. Можно выбрать такой способ засыпки, что вертикальные напряжения будут линейны по высоте, а касательные — равны

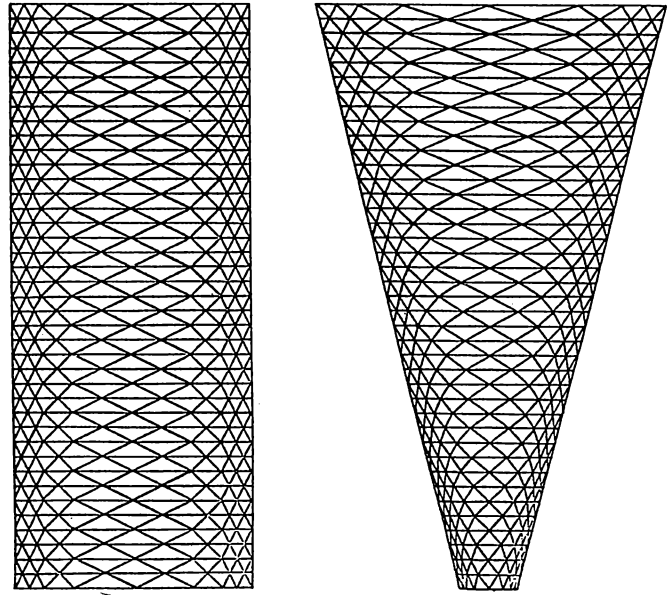


Рис. 6.30

нулю. В этом случае главные направления тензоров напряжений и скоростей деформаций совпадают с направлениями осей Ox_1, Ox_2 . Решение такой простейшей задачи сводится к анализу поведения элементарного объема, ориентированного по осям Ox_1, Ox_2 . Обозначим отношение начальных напряжений $\sigma_{11} / \sigma_{22}$ через k^0 , $0 < k^0 < 1$. Тогда $\theta = \pi / 2$ и $\sigma_1 = \sigma_{22}$, $\sigma_2 = \sigma_{11}$, $\Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_{22}$, $\Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_{11}$. Связь приращений напряжений и деформаций имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= \left[1 - \sqrt{2} H_s \sin\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_2 \right] \frac{\Delta \sigma_1}{E} + \left[-\nu_e + \sqrt{2} H_s \sin\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_1 \right] \frac{\Delta \sigma_2}{E}, \\ \Delta \varepsilon_2 &= \left[-\nu_e + \sqrt{2} H_s \cos\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_2 \right] \frac{\Delta \sigma_1}{E} + \left[1 - \sqrt{2} H_s \cos\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_1 \right] \frac{\Delta \sigma_2}{E}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть стенки — абсолютно жесткие. Тогда приращение полной деформации в направлении Ox_1 равно нулю. Для чисто упругого материала в этом случае было бы $\Delta \sigma_{11} / \Delta \sigma_{22} = \nu_e$. Если же допустить неупругие деформации и дилатансию, то

$$\frac{\Delta \sigma_{11}}{\Delta \sigma_{22}} = \nu_e \frac{1 - \frac{1}{\nu_e} \sqrt{2} H_s \cos\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_2}{1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \sqrt{2} H_s \cos\left(\frac{\pi}{4} - \nu\right) \sigma_2}. \quad (8)$$

Наряду с параметрами материала в коэффициенты связей (7) входят начальные напряжения σ_1, σ_2 . То есть исходные напряжения играют такую же по значимости роль в определении поведения среды, как и собственно характеристики среды E, ν_e, ν и др.

Какова роль упругости при деформировании в стесненных условиях? Из (8) следует, что при $E = \infty$, $\nu \neq -\frac{\pi}{4}$ выполняется равенство $\Delta \sigma_{11} / \Delta \sigma_{22} = \sigma_{11} / \sigma_{22}$. Поэтому пластические деформации невозможны. Таким образом, проявление неупругих свойств среды можно ожидать только за счет соответствующих упругих деформаций.

Пусть в результате предварительного нагружения достигнуто следующее соотношение напряжений: $\sigma_2 / \sigma_1 = \nu_e$. Тогда в формуле (8) сокращаются все члены, несущие информацию о пластических и дилатансионных свойствах среды, и $\Delta \sigma_{11} / \Delta \sigma_{22} = \nu_e$, $(\sigma_{11} + \Delta \sigma_{11}) / (\sigma_{22} + \Delta \sigma_{22}) = \nu_e$. Таким образом, если траектория нагружения попадает на луч $\sigma_{11} = \nu_e \sigma_{22}$, то в дальнейшем уйти с этого луча она уже не может. Таким образом, в условиях стесненного деформирования наличие упругих деформаций не всегда достаточно для проявления неупругих свойств среды.

Если вернуться к исходному вопросу о предельном или допредельном состоянии среды и считать, что есть два крайних состояния среды — упругое и предельное ($\varphi = \varphi^*$), то проведенный анализ и решения краевых задач показывают, что в условиях стесненного деформирования материал тяготеет скорее к упругому состоянию, чем к предельному.

Перейдем к основным численным результатам. Задача решалась по указанной выше схеме для бункеров с вертикальными и наклонными стенками. Обозначим через m — мощность (ширину бункера) с вертикальными стенками. Пусть H — максимальная высота засыпки. Для того чтобы можно было корректно сравнивать давления в бункерах с вертикальными и наклонными стенками, параметры последних выбирались так, чтобы при

одной и той же максимальной высоте засыпки объем материала во всех бункерах был одинаковым. Поэтому для наклонных бункеров m — это ширина бункера на высоте $H/2$.

В качестве характерного напряжения выбрана величина γm (γ — удельный вес среды). Все напряжения отнесены к γm , линейные размеры — к m . При расчетах в качестве исходных использовались следующие размерные параметры: $E = 10$ МПа, $m = 8$ м, $\nu_3 = 0,3$ (соответственно $\nu_e = 0,43$), $\gamma = 1,7 \cdot 10^4$ Н/м³, $f = 0,3$; $\varphi^* = 30^\circ$. На каждом шаге определялись поле напряжений, участки границы развитого и неразвитого трения. Вычислялось также среднее давление по горизонтальному сечению и коэффициент бокового распора в смысле Янсена. Все эпюры и упруго-пластические границы выводились на графопостроитель для каждого шага по параметру нагружения. Это позволило проследить эволюцию напряженного состояния и областей активного нагружения и разгрузки в процессе заполнения бункера материалом. Расчеты показали, что упруго-пластические границы и напряженное состояние материала, как и следовало ожидать, зависят от способа заполнения бункера.

Рассмотрим сначала поведение упруго-пластических границ. Из решения тривиальной задачи следует, что при деформировании в стесненных условиях в случае $k^0 \leq \nu_e$ пластические деформации не реализуются, т. е. материал деформируется только упруго; при $k^0 > \nu_e$ — вся область переходит в пластическое состояние. То есть в случае гладких стенок все способы засыпки по их характеристике k^0 разделяются значением $k^0 = \nu_e$ на два типа, которые определяют принципиально различные режимы деформирования материала при его последующем нагружении.

Естественно, что в задаче, учитывающей трение на стенках, ситуация будет сложнее. Так, при $k^0 = \nu_e$ трение на стенках способствует развитию сдвигов в материале, что в свою очередь приводит к появлению пластических областей. Сравнение решений, соответствующих различным значениям k^0 , показывает, что увеличение k^0 приводит к тому, что пластичность захватывает все большие объемы материала. Причем при $k^0 > k_p$ в пластическое состояние переходит весь материал ($k_p = 0,6$). Можно ожидать, что уменьшение значения k^0 от ν_e будет приводить к увеличению областей разгрузки. Существует такое значение $k^0 = k_e$, при котором трение на стенках становится недостаточным для развития пластических деформаций, т. е. материал будет деформироваться целиком упруго. Численные эксперименты показывают, что при уменьшении k^0 пластические области действительно уменьшаются и при $k^0 > k_e$ — исчезают совсем ($k_e \approx 0,3$).

Таким образом, наличие трения на стенках приводит к тому, что в зависимости от условий засыпки возможно три режима деформирования материала: при $k^0 \leq k_e$ — упругий режим, при $k_e < k^0 < k_p$ — упруго-пластический режим, при $k^0 \geq k_p$ — пластический. Длина интервала (k_e, k_p) существенно зависит от коэффициента внешнего трения, и при $f \rightarrow 0$ интервал стягивается в точку $k^0 = \nu_e$. Следует отметить, что хотя пластические деформации и развиваются, материал предельного состояния $\varphi = \varphi^*$ не достигает.

Перейдем к вопросу о давлениях. Давления вычислялись для различных углов дилатансии ($\nu = 0^\circ, \pm 10^\circ$), различных значений η (0,1; 0,5; 1) и k^0 . Оказалось, что параметры ν и η слабо влияют на распределения напряжений. Это можно объяснить тем, что даже в случаях, когда пластические деформации возникают в силу стесненных краевых условий, они развиваются незначительно. Поэтому приведены только характерные эпюры для значений $\nu = -10^\circ$ и $\eta = 0,1$. Выше было показано, что условия засыпки существенно

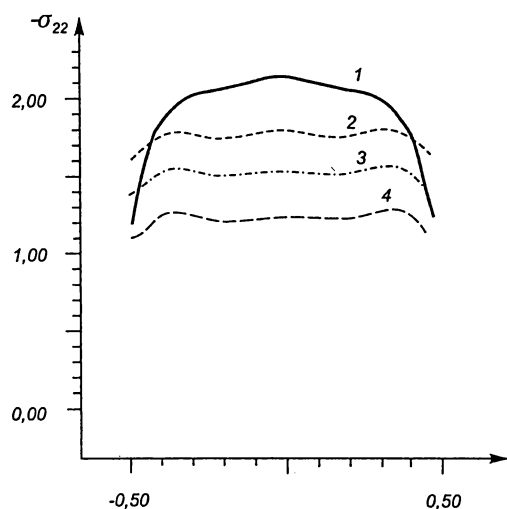


Рис. 6.31

вливают на упруго-пластические границы. Это влияние прослеживается также и на эпюрах давлений.

Расчеты показывают, что общее давление на дно возрастает, пока высота засыпки меньше $3m$. Затем давление практически стабилизируется. На рис. 6.31 (эпюры 1—4) показан характер распределения давления ($-\sigma_{22}$) в различных горизонтальных сечениях $x_2 = 0, m/2, m, (3/2)m$ при высоте засыпки $H = 3m$. Распределение давлений на дно неравномерно, но с удалением от дна приближается к равномерному. Эпюры 1, 2 распределения среднего по горизонтальному сечению и бокового давлений показаны на рис. 6.32. По этим данным легко определяется коэффициент бокового распора в смысле Янсена. Вычисления показывают, что этот коэффициент прак-

тически постоянен по высоте, и его величина определяется характеристиками материала, коэффициентом внешнего трения и параметрами засыпки. Так, при $k^0 = 0,37; 0,43; 0,5$ соответственно $k = 0,4; 0,47; 0,53$.

Выше предполагалось, что стенки бункера не имеют никаких дефектов на поверхности. В реальных ситуациях могут быть определенные дефекты. Большой интерес представ-

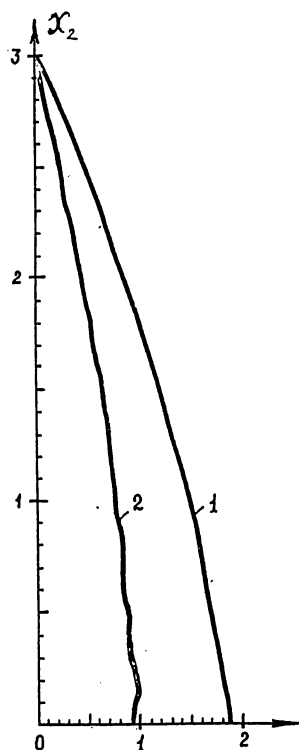


Рис. 6.32

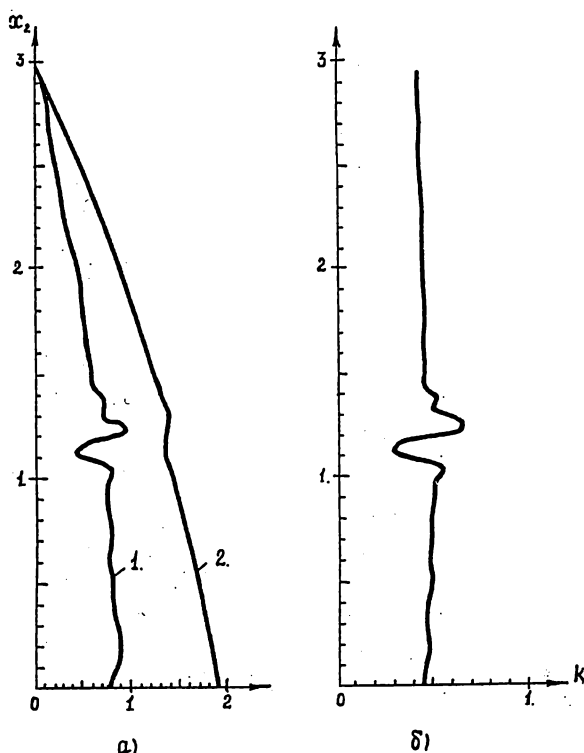


Рис. 6.33

ляет вопрос о возмущениях, которые вносят эти дефекты на распределения давлений. Так как задача решается в строгой постановке, без привлечения дополнительных гипотез, то учет влияния дефектов на поверхности (выбоин, выступов, участков повышенного или пониженного внешнего трения и др.) дополнительных трудностей не вызывает. Остановимся на одном примере. Пусть боковая поверхность на небольшом участке имеет выбоину. На этом участке коэффициент „внешнего“ трения повысится ($f = f^*$). Численный эксперимент (при $f^* = 0,6$) показывает, что на этом участке наблюдается всплеск бокового давления на стенку (рис. 6.33 а, эпюра 1) и соответственно коэффициента бокового распора (рис. 6.33 б). На эпюре 2 показано распределение по высоте среднего вертикального давления.

Таким образом, если для вертикальных стенок без дефектов основная гипотеза Янсена выполняется довольно точно, хотя, как показывают решения, сама величина коэффициента бокового распора и зависит от многих факторов, то для стенок с дефектами эта гипотеза становится неудовлетворительной.

В случае наклонных стенок само понятие коэффициента бокового распора может быть обобщено по-разному. Под коэффициентом бокового распора будем понимать отношение нормальной составляющей давления на наклонной стенке к среднему вертикальному давлению в соответствующем горизонтальном сечении. Для бункеров, расширяющихся книзу, давление на стенки понижается (эпюра 1, рис. 6.34), для суживающихся книзу — повышается (эпюра 2). Коэффициент бокового распора ведет себя аналогично.

Остановимся на второй гипотезе Янсена о полной развитости трения на боковых стенках. Можно ожидать, что и для выполнения этой гипотезы большое значение имеет способ засыпки материала. В первой серии расчетов начальные напряжения в нижних слоях, примыкающих ко дну, задавались так, что начальные касательные напряжения на стенках отсутствовали. Затем, когда при дальнейшей засыпке трение развивалось, то и начальные напряжения вновь поступающих слоев задавались таким образом, чтобы трение на контакте было развитым. Решения показали, что в этом случае вторая гипотеза выполняется для всей боковой поверхности, за исключением небольшого участка высотой $0,1 m$, примыкающего ко дну.

Затем условия засыпки были изменены. Материал в бункер подавался так, что во вновь поступившем слое касательные напряжения на контакте с боковой поверхностью отсутствовали. При дальнейшей пригрузке эти касательные напряжения увеличивались (от нуля). Расчеты показали, что и в этом случае (по крайней мере, при указанных выше параметрах материала и внешнего трения) трение развивается полностью по всей боковой стенке, за исключением участка, примыкающего ко дну. Размер этого участка H_0 зависит от величины коэффициента внешнего трения. Так, для $f = 0,3$ $H_0 = 0,1 m$, для $f = 0,5$

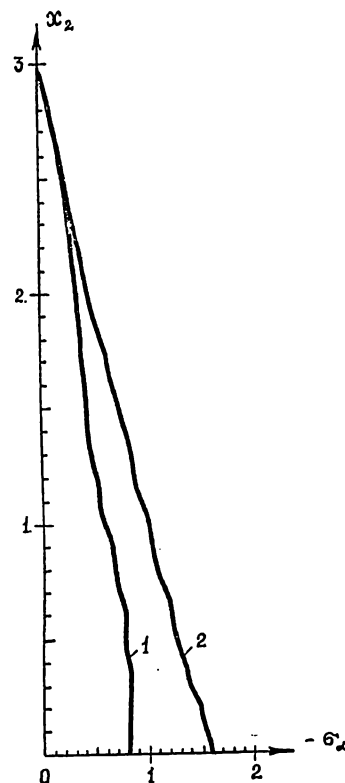


Рис. 6.34

$H_0 = 0,3 \text{ м}$. При увеличении коэффициента внешнего трения, модуля упругости, учете различия в значениях статического и кинематического коэффициентов внешнего трения указанный способ засыпки может привести к тому, что участки развитого и неразвитого трения будут чередоваться, и вторая гипотеза Янсена станет неудовлетворительной.

§ 6.9. ДАВЛЕНИЕ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ НА ПОДАТЛИВЫЕ ОГРАЖДАЮЩИЕ КОНСТРУКЦИИ

Большой класс задач механики грунтов и сыпучих материалов сводится к определению давлений на ограждающие конструкции. В некоторых постановках податливость конструкций значения не имеет. Классический пример — задачи об активном и пассивном давлении грунта на подпорные стенки. И в том и другом случаях нагрузка определяется для крайних случаев достаточно больших смещений стенки, так что сами смещения влияния на нагрузку не оказывают. Однако для анализа реальных ситуаций подобные постановки, как правило, недостаточны. В первую очередь это связано с тем, что активное и пассивное давления существенно различаются между собой. Поэтому в качестве оценок действительных нагрузок (и тем более эпюр давлений и моментов) они дают весьма грубое приближение. В связи с этим возникает необходимость исследования задач в более строгих постановках.

Хорошо известно, что в реальных ситуациях давления на ограждающие конструкции существенно зависят от их податливости [252, 253]. Поэтому в строгой постановке задачи расчета давлений должны ставиться как статически неопределимые. Для таких постановок необходимо сформулировать замкнутую систему уравнений, описывающую деформирование среды и корректные краевые условия. Не менее важным является вопрос об адекватности этих условий реальным условиям на границе. Можно дать следующую классификацию естественных краевых условий; на границе заданы: 1) вектор напряжений или смещений; 2) отдельные компоненты векторов смещений и напряжений; 3) связь между компонентами напряжений (например, условие развитого сухого трения); 4) ограничение на компоненты напряжений в виде неравенства (например, сухое трение или прилипание на неизвестных участках границы); 5) функциональная зависимость между компонентой напряжения, действующего в определенной точке границы, и компонентой смещения этой же точки; 6) компонента смещения как функционал от распределения напряжений на определенном участке границы и т. д. Для плоской деформации в общем случае необходимо задавать два краевых условия на всем замкнутом контуре, ограничивающем область деформирования. Задачи с краевыми условиями типа 3—5 исследовались в [41, 42]. Учет податливости ограждающих конструкций приводит к более сложным краевым условиям типа 6 [43].

Рассмотрим способ реализации таких условий методом конечных элементов. Предположим, что компонента смещения u_1 зависит от напряжений σ_{11} действующих на прямолинейном участке границы AB ($x_1 = \text{const}$, x_1, x_2 — декартовы координаты):

$$u_1(x_2) = \int_A^B G(x_2, z) \sigma_{11}(z) dz, \quad x_2 \in AB. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что ограждающая конструкция работает упруго. Функция G определяется параметрами конструкции. Второе условие на границе может быть одним из сле-

дующих: $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $|\sigma_{12}| \leq -f\sigma_{11}$, причем при $|\sigma_{12}| < -f\sigma_{11}$ компонента $u_2 = 0$ (f — как и прежде коэффициент внешнего трения, остальные обозначения здесь и ниже — стандартны).

Задачи будем рассматривать в рамках тех же уравнений, что и в § 6.7, 6.8. Наиболее четко эффекты податливости проявляются при измерении статических давлений грунтов и сыпучих материалов [254, 255]. Эксперименты показывают, что замеры датчиков зависят от их податливости. Это создает трудности при интерпретации экспериментальных данных. Можно рассмотреть задачу о напряженно-деформированном состоянии материала с учетом податливости датчика и определить зависимость между истинными давлениями, которые действовали бы в материале, если бы датчика не было, и давлениями, которые устанавливаются вследствие возмущений от датчика. Пусть в бункере (рис. 6.35) боковые стенки и дно — абсолютно жесткие, а участок $A'B'$ (датчик давления) обладает винклеровской податливостью. Предположим, что условия засыпки таковы, что в материале устанавливается линейное распределение начальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^0 &= -\gamma(H - x_2) - \gamma h, \quad \sigma_{11}^0 = k^0 \sigma_{22}^0, \\ k^0 &= 0,43, \quad H = 1,5m, \quad A'B' = 0,1m, \quad h = m/8, \end{aligned} \quad (2)$$

γ — удельный вес материала, m — ширина бункера. Следует отметить, что в (2) и ниже на свободных поверхностях вводится небольшая начальная пригрузка. Это связано с тем, что в математической модели начальные напряжения играют роль неупругих характеристик среды (свойство внутреннего трения). Так как в коэффициентах матрицы жесткости содержится отношение главных напряжений, то на свободной поверхности при численном счете получалась бы большая погрешность. Введение начальной пригрузки позволяет без изменения постановки задачи и конечных результатов эту трудность преодолеть.

После того, как проведена засыпка материала, к поверхности СВ прикладывается монотонно увеличивающееся давление. Задача о совместном деформировании материала и датчика решается методом конечных элементов при начальных условиях (2) и следующих условиях на границе:

$$u_2 \equiv 0, \quad |\sigma_{12}| \leq f\sigma_{22} \text{ на } AD,$$

$$u_2 \equiv 0, \quad |\sigma_{12}| \leq f\sigma_{11} \text{ на } DC \text{ и } AA', \quad B'B,$$

$$u_1 = -\frac{m}{2W} \cdot \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad |\sigma_{12}| \leq -f\sigma_{11} \text{ на } A'B',$$

$$\sigma_{12} \equiv 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 \cdot (t+1) \text{ на } CB,$$

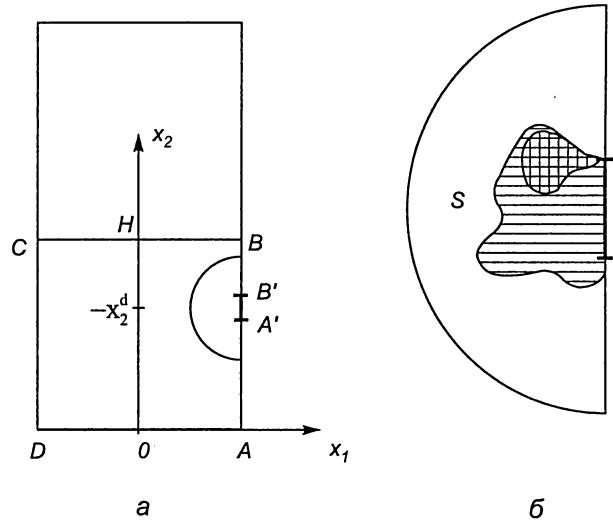


Рис. 6.35

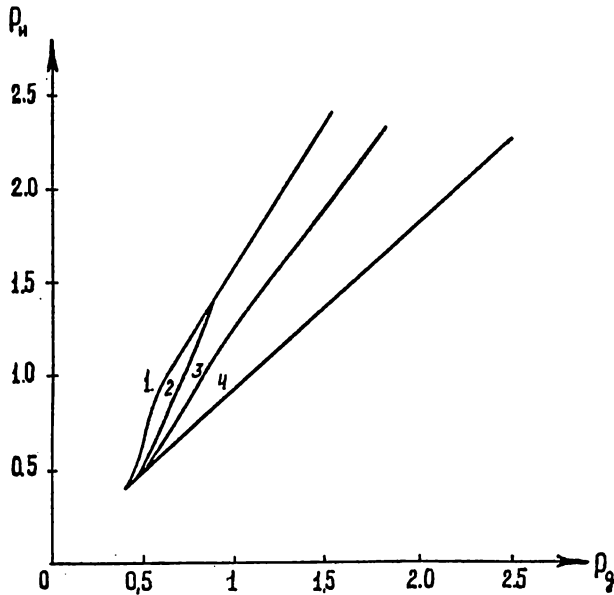


Рис. 6.36

где $t \geq 0$ — параметр нагружения, E — модуль Юнга, W — безразмерная характеристика податливости датчика. Расчеты ($E = 10$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_3 = 0,3$; $\gamma = 1,7 \cdot 10^4$ Н/м³; углы внутреннего трения φ^* и дилатансии ν равны 30° и 0° ; коэффициент η , связывающий приращения напряжений и допредельных пластических деформаций, равен $0,01$; $f = 0,3$; $m = 1$ м) показывают, что во всей области S , примыкающей к датчику, идет активное нагружение, а следовательно, и пластические деформации. Существует также область предельного состояния материала, которая с увеличением нагрузок расширяется. Причем при $W = 0,05$ (см. рис. 6.35), $W = 0,96$ область предельного состояния охватывает датчик полностью, а при $W = 2,56$ — полностью не охватывает даже при больших t .

На рис. 6.36 показаны графики, устанавливающие соответствие между измеренными давлениями на датчике P_d и истинными давлением P_n на стенку, которые развились бы в этом месте, если бы датчик отсутствовал ($W = \infty$). Давления отнесены к начальному напряжению σ_{22}^0 , действующему на уровне датчика: $\sigma_{22}^0(x_2^n) = -\gamma(H - x_2^n) - \gamma h$. Расчеты показывают, что податливость датчика приводит к занижению давлений. Однако с увеличением жесткости датчика (боковые стенки абсолютно жесткие) величина искажения уменьшается (эпюры 1—4 получены соответственно при $W = 0,05$; $0,96$; $2,56$; ∞).

Рассмотрим теперь задачу о заполнении бункера сыпучим материалом. Стенки бункера будем предполагать податливыми и шероховатыми (§ 6.8). Как и в § 6.8, будем предполагать, что в процессе нагружения меняются как напряжения в материале, так и сама область деформирования. Поэтому часть границы, на которой ставится условие (1), будет зависеть от параметра нагружения. Пусть на k -м шаге нагружения материал контактирует со стенкой на участке AB_k (рис. 6.37). Тогда

$$u_1(x_2) = \int_A^B G(x_2, z) \sigma_{11}(z) dz, \quad x_2 \in AB_k. \quad (3)$$

При решении конкретных задач предполагалось, что стенка AB при нагрузке ведет себя как упругая свободно опертая балка. Второе условие на AB имеет вид $|\sigma_{12}| < -f\sigma_{11}$. На OA ($x_1 = 0$ — ось симметрии) ставилось такое же условие сухого трения и условие $u_2 \equiv 0$. В ходе решения на каждом шаге по параметру нагружения выводились поля напряжений, границы областей предельного состояния, упругой разгрузки и допредельных пластических деформаций.

Податливость боковых стенок приводит к развитию областей предельного состояния материала (на рис. 6.37 отмечены горизонтальной штриховкой) и значительному уменьше-

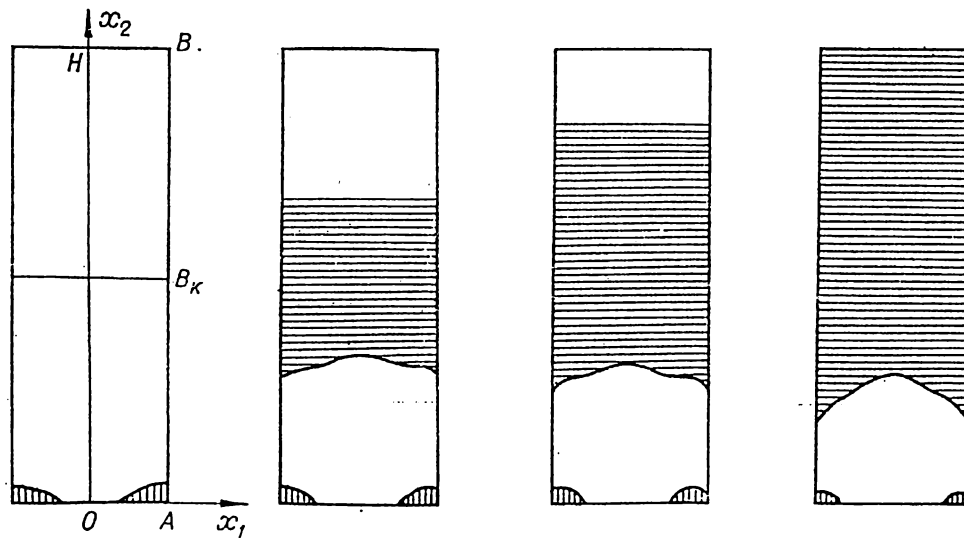


Рис. 6.37

нию областей упругой разгрузки (вертикальная штриховка). Остальной материал находится в допредельном пластическом состоянии. На рис. 6.38 показана эпюра 1 давлений на боковую стенку при полном заполнении бункера. Расчеты проводились при $E = 10$ МПа; $\nu_3 = 0,3$; $\gamma = 1,7 \cdot 10^4$ н/м³, $j^* = 30^\circ$, $\nu = -10^\circ$, $\eta = 0,01$, $f = 0,3$, $R = 10^2$, $H = 3$ м, $m = 8$ м. Для сравнения показана эпюра 2 давлений, которые действовали бы в случае жесткой стенки. Податливость стенки, как и следовало ожидать, привела к уменьшению давлений. Давление на дно соответственно увеличилось.

В процессе решения выводились также значения смещений и напряжений на боковых стенках. После этого делалась проверка выполнения граничного условия (3). Проверка показала, что условие (3) выполняется с точностью, не меньшей, чем для обычных краевых условий.

В заключение рассмотрим пример расчета давлений подпорную стенку (рис. 6.39). Пусть условия засыпки и пригрузки на поверхности $x_2 = H$ таковы, что начальное распределение напряжений имеет вид (2), где $h = 0,8H$. Для упрощения предположим, что основание $x_2 = 0$ и стенка AB являются жесткими и абсолютно гладкими. Посмотрим теперь, к чему приведет вращение стенки около точки B . Задача сводится к решению уравнений при начальных напряжениях (2) и следующих краевых условиях: при $x_2 = 0$ $\sigma_{12} \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$; при $x_2 = H$ $\sigma_{12} \equiv 0$, $\sigma_{22} \equiv -\gamma h$; при $x_1 = 0$ $\sigma_{12} \equiv 0$, $u_1 = -\operatorname{tg} \alpha (H - x_2)$, где $\alpha \geq 0$ — параметр нагружения. Правая граница выбиралась достаточно далеко так, чтобы ее влияние было несущественным (при $x_1 = 4H$ $\sigma_{12} \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$). В

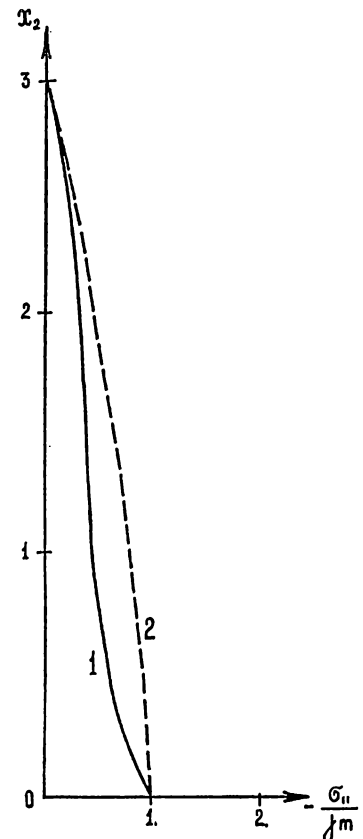


Рис. 6.38

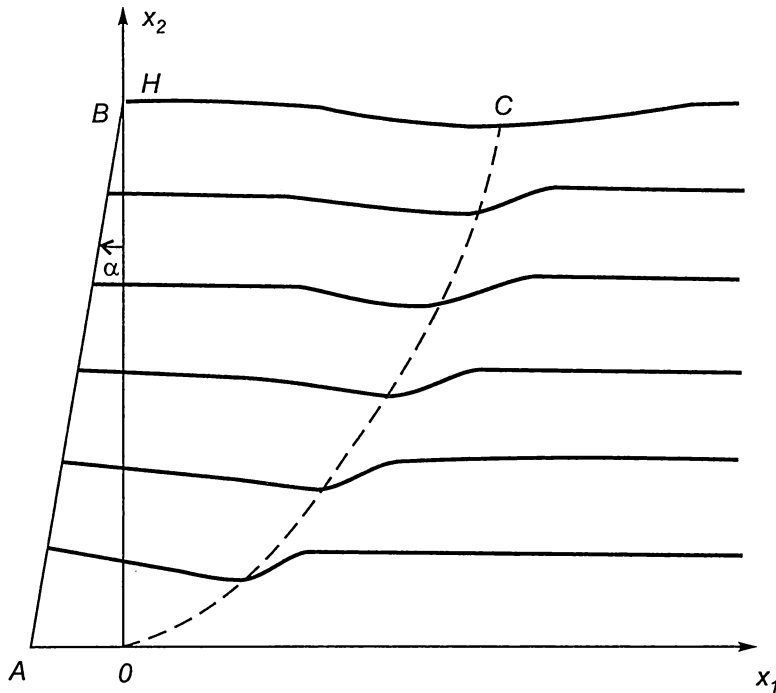


Рис. 6.39

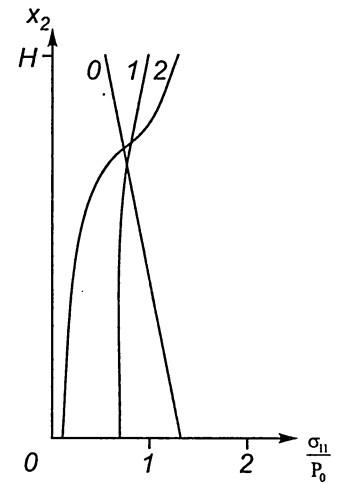


Рис. 6.40

расчетах принимались следующие значения параметров: $E = 10$ МПа, $\nu_3 = 0,3$, $\gamma = 1,7 \cdot 10^4$ Н/м³, $\varphi^* = 30^\circ$, $\nu = 0^\circ$, $\eta = 0,01$, $H = 4$ м, $k^\circ = 0,43$.

На рис. 6.39 показано распределение вертикальных смещений при $\alpha = 10^\circ$ (сплошные линии первоначально были горизонтальными). Четко прослеживается тенденция к локализации сдвигов вдоль кривой OC . Решение показывает, что в области BOC происходит активное нагружение, а в области справа от OC — разгрузка. Интересно поведение эпюр давлений. Вначале распределение напряжений линейно (эпюра 0, рис. 6.40). При увеличении угла поворота наибольшее смещение стенки происходит в ее нижней части. Поэтому там наблюдается и наибольшее снижение давления.

Так как смещение верхней части стенки меньше, чем нижней, в верхней увеличивается давление по сравнению со статическим. Общая нагрузка на стенку уменьшается. Так, при $\alpha = 6$ и 10° нагрузка составляет 0,86 и 0,61 от статической нагрузки P_0 (эпюры 1, 2, см. рис. 6.40).

Таким образом, построенные в главе 4 уравнения можно использовать для решения различных прикладных задач в рамках строгих постановок механики деформируемого твердого тела. Полученные решения позволяют дать оценку различным инженерным методам решения (см. также главу 8).

Глава 7. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Предположим, что имеется упруго-пластическое тело, которое постепенно нагружается так, что интенсивность нагружения все время увеличивается. В общем случае можно наблюдать следующие стадии его деформирования. Вначале тело деформируется устойчиво, то есть любым малым изменениям внешних параметров отвечают малые изменения в теле. Затем наступает критическое состояние и тело либо разрушается (в нем растут магистральные трещины), либо в теле развиваются магистральные линии скольжения, если деформации стеснены. В дальнейшем, если тело рассматривать как несущую конструкцию, то оно либо деградирует, либо переходит в качественно новое состояние. Такова типичная картина.

Если посмотреть несколько шире, то можно увидеть, что подобное поведение наблюдается и во многих других процессах. Действительно, многие процессы, которые мы наблюдаем в природе, обществе, да и в собственной жизни, имеют одну общую черту. Большую часть времени они развиваются более или менее спокойно, устойчиво. В этот период любые внешние воздействия вызывают вполне соизмеримые последствия. Затем наступают моменты, когда картина резко меняется и за очень короткое время происходят большие необратимые изменения. Причем в эти моменты видимые и в привычном понимании незначительные причины вызывают несоизмеримо большие последствия („минуты роковые“ у Тютчева).

В механике такие моменты связаны с потерей устойчивости, последовательностями бифуркаций, разрушением. Часто, как отмечалось, это приводит к тому, что несущая способность исчерпывается и система деградирует. Однако при стечении ряда обстоятельств результат может быть прямо противоположный: переход через критические состояния приводит к самоорганизации, формированию в среде упорядоченных структур и, как следствие, к появлению у системы новых качеств. В последние десятилетия интерес к подобного рода явлениям значительно возрос. Изучение закономерностей самоорганизации, возникновения структур в системах различной природы составляет предмет новой научной дисциплины — синергетики [256].

В настоящей книге мы ограничимся только структурами, которые возникают при деформировании неупругих сред. Изучение этой проблемы представляет интерес по следующим причинам. Во-первых, процессы возникновения структур имеют самостоятельное значение, так как реализуются либо в определенных естественных условиях, либо в тех или иных технологических процессах. Во-вторых, исследование конкретных задач всегда дает некоторый материал для дальнейших (и часто далеко идущих) обобщений. И,

наконец, подобные ситуации носят всегда нетривиальный характер и поэтому их изучение или даже просто созерцание (например, упорядоченных структур в альбоме [257]) всегда дает определенные положительные эмоции.

§ 7.1. АЛГОРИТМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПОЛУЧЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУР

Вначале обратимся к хорошо известным фактам. В гидродинамике классические примеры регулярных структур связаны с формированием ячеек Бенара при конвективном всплывании слоя жидкости, вихрей Тейлора в сдвиговых течениях между коаксиальными цилиндрами, системы вихрей в стратифицированном сдвиговом течении (неустойчивость Кельвина—Гельмгольца) и другие [257].

Механика горных пород и сыпучих материалов также дает много интересных примеров такого рода. Так, наверное, все наблюдали, как растрескивается земля при высыхании после дождя. Здесь образуется характерная полигональная система трещин. Различные системы трещин присущи и массиву горных пород. Они разбивают его на блоки различных масштабов, причем масштабы структур различных уровней имеют четко выраженный характер [160]. Можно сослаться также на факты упорядоченного разрушения твердых тел при динамическом нагружении и т. д. [258].

Дальше обратимся к сыпучим средам — средам, которые в определенном смысле занимают промежуточное положение между твердыми телами и жидкостями. Здесь также возможно формирование различных структур. Отметим самую простую ситуацию — течение Куэтта между параллельными пластинами. Как упоминалось выше, для сыпучих сред подобные сдвиговые течения реализовать довольно сложно, так как, в отличие от вязких жидкостей, здесь нет условия прилипания на границе. Их можно получить на специальном приборе однородного сдвига (глава 2). Оказалось, что при малых сдвигах течение носит плоскопараллельный характер. При этом распределение скоростей является линейным, а значит, распределение деформаций и их скоростей — однородным. Однако при больших сдвигах устойчивость течения теряется, и материал разбивается на отдельные ячейки. После этого большая часть деформаций локализуется по их границам. Как следствие, в материале формируется довольно регулярная пространственная структура [6, 10, 11] (подробнее она рассматривается ниже).

Еще один пример связан с течением сыпучих материалов в сходящихся радиальных каналах. Здесь материал разделяется на систему подобных блоков, размеры которых образуют геометрическую прогрессию. Со временем блоки смещаются вниз и дробятся новой системой линий скольжения. Поэтому структура возникает вновь, но уже на новых материальных элементах и в целом носит в целом пространственно-временной характер [50, 51] (см. ниже).

7.1.1. Постановка задачи

Таким образом, мы видим, что при определенных условиях в материале возникают регулярные структуры, при других — в тех же самых материалах никакой структуры не возникает. Можно ли сопоставить описанные течения между собой и найти в них какие-то общие черты? Иными словами, есть ли что-то общее во всех этих течениях?

Можно, конечно, сказать, что общее — это потеря устойчивости, реализация последовательности бифуркаций и т. д. Но нас будет интересовать другая сторона вопроса: что общего в способах реализации течений, приводящих к диссипативной структуре? В случае положительного решения общие признаки можно будет сформулировать в виде алгоритма, позволяющего реализовать течения с потенциальной структурой. В этом случае дальнейшая программа будет состоять в применении алгоритма для получения новых диссипативных структур.

Более формально поставленную задачу можно изложить следующим образом. Разобьем все процессы течения сплошных сред на три класса (для краткости течениями будем называть и процессы деформирования твердых тел). Первый класс — это обычные процессы, в которых формирование структур не происходит, второй — процессы с образованием регулярных структур и третий (для полноты) — остальные процессы. Это, конечно, нестрогая классификация, но сейчас ее вполне достаточно.

Тогда поставленная задача сводится к тому, чтобы дать конструктивное описание второго класса течений. Ясно, что само течение и его характер зависят от реологии среды (то есть выбора материала), а также выбора условий и режимов нагружения (начальных и краевых условий, массовых сил). Указанные параметры можно отнести к управляющим. Управляемые — это параметры, связанные с реакцией среды (скорость диссипации энергии, распределения напряжений и деформаций, сам факт возникновения структуры и ее характеристики). На этом языке поставленную задачу можно представить таким образом: из всего множества управляющих параметров выделить такие их сочетания, которые приводят к формированию регулярных структур [49, 53].

7.1.2. Алгоритм

В качестве первого шага сделаем следующее. Как и в [259], будем рассматривать структуры не как некоторую статическую данность, а как нечто, возникающее в процессе эволюции системы, в данном случае системы „деформируемая среда — внешние условия“. То есть будем рассматривать всю эволюцию течения. В таком случае уместно поставить вопрос, каким условиям должно удовлетворять течение, которое предшествует появлению структуры, или, иными словами, из каких именно течений могут появиться упорядоченные структуры? Этот вопрос уже проще, чем исходный, так как он относится к описанию уже обычных течений без структур. Эти течения будем называть базовыми.

Теперь второй шаг. Регулярность структуры означает некоторую ее инвариантность в пространстве. Практически это приводит к тому, что распределения напряжений, деформаций, локальной диссипации энергии и других характеристик приобретают более или менее периодический характер. Поэтому в целом процесс со структурой — это в определенном смысле однородный, пространственно-инвариантный процесс. Такой взгляд приводит к следующей идее: течение, которое предшествует возникновению структуры, то есть базовое течение, должно быть как можно более однородным по пространству. В идеале это должно быть течение, в котором напряжения, деформации, а значит, и их скорости от пространственных координат вообще не зависят.

Этого признака уже достаточно для точного описания базовых течений. Действительно, пусть компоненты тензора деформаций ε_{ij} от пространственных координат не зависят.

Следовательно, в процессе эволюции они могут меняться только как функции времени t : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$. Точно так же и поворот от координат зависеть не должен: $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$. Ясно, что какова бы ни была мера деформаций, поставленным условиям можно удовлетворить, если потребовать, чтобы скорости были линейными функциями координат. Отсюда можно заключить, что траектории материальных частиц должны описываться следующими уравнениями:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + a_{i3}(t)x_3, \quad (1)$$

где x_i — декартовы координаты; $a_{ij}(t)$ — заданные функции; v_i — скорости. Таким образом, в математическом плане мы пришли к той же самой задаче, что и при исследовании однородных течений. Поэтому здесь можно воспользоваться всеми результатами главы 1, а также глав 2 и 3.

Принципиальное отличие от построений, сделанных в главе 1, состоит в следующем. Главное условие реализации однородных течений сводилось к обеспечению единственности решения системы (1). Здесь же ставится противоположная задача — добиться неединственности решения (1). Для этого проще идти от противного, т. е. рассмотреть условия, обеспечивающие единственность решения.

В главе 1 было показано, что если на всей границе деформируемого тела задано распределение скоростей (1), то течение будет однородным, если выполняются следующие три условия: а) есть устойчивость тела, в) материал реологически устойчив и с) нагружение осуществляется так, что массовыми силами, включая силы инерции, можно пренебречь. Отсюда следует, что появление регулярных структур можно ожидать только в тех случаях, когда хотя бы одно из условий „а“—„с“ нарушается.

Если теперь посмотреть на практическую сторону дела, то обнаруживается еще одно очень существенное обстоятельство. Пусть реализовано некоторое течение и в некоторый момент времени его единственность нарушается. Для базового течения совершенно безразлично, каким именно образом были определены краевые условия: путем задания на границе скоростей, напряжений или каких-то их комбинаций. Лишь бы этих условий было достаточно для однородного распределения напряжений и деформаций. В случае же, когда начинает формироваться структура, вид краевых условий становится совсем безразличным.

Это проще всего пояснить на конкретном примере. Пусть базовый процесс сводится к одноосному растяжению стержня. Его можно реализовать очень просто: один конец стержня закрепить, к другому приложить растягивающую силу P , а боковую поверхность S оставить свободной от напряжений. Формально такой способ нагружения выглядит так:

$$u_1(x_1 = 0) = 0; \sigma_{11}(x_1 = L) = P/F, \sigma_n|_S = 0. \quad (2)$$

Он приводят к следующему результату

$$u_1 = \frac{u_0}{L} x_1, u_2 = -\nu \frac{u_0}{L} x_2, u_3 = -\nu \frac{u_0}{L} x_3. \quad (3)$$

Здесь L — длина стержня, F — площадь сечения, σ_n — напряжения на боковой поверхности, u_0 — смещение на конце $x_1 = L$, Ox_1 — ось стержня. Связь $P = P(u_0)$ и параметр ν

определяются свойствами материала. Предположим, что критическому состоянию соответствует переход диаграммы „ $P - u_0$ “ на ниспадающую ветвь. Очевидно, что для базового течения, то есть деформирования на возрастающей ветви, неважно, каким образом задавались краевые условия. Если мы на границе задаем напряжения (2), то как следствие, получаем граничные смещения (3). И наоборот, если на границе задаем смещения (3), то в результате получаем напряжения (2). И в том и в другом случае смещения внутри области определяются по одним и тем же формулам (3).

Однако после перехода через критическое состояние способ поддержания внешних условий становится принципиальным. Легко видеть, что при способе нагружения (2) выход на ниспадающую ветвь приведет к разрушению стержня и никаких структур не возникнет. Действительно, пусть площадь некоторого сечения $x_1 = l$ чуть меньше, чем остальных сечений. Поскольку напряжение σ_{11} везде одинаково, то переход на ниспадающую ветвь в сечении $x_1 = l$ приведет к разгрузке остального материала. Поэтому стержень разрушится тривиальным образом, разделившись только на две части со случайными размерами l и $(L - l)$. Если же на границе задавать условия (3), то картина будет совершенно другой. Здесь возмущения на всю длину распространяться уже не будут, и в стержне сформируется регулярная система трещин (близкие задачи рассматривались в [64, 65, 142]). Есть все основания полагать, что и в общем случае условия нагружения должны быть как можно ближе ко второму типу — типу (3) (жесткое нагружение).

Таким образом, способ получения упорядоченных структур сводится к реализации следующего алгоритма: 1) выбирается определенное базовое течение (например, из класса (1)); 2) задается исходная конфигурация деформируемого тела и по ней определяются соответствующие краевые условия, затем 3) создается устройство нагружения, которое реализует граничные условия как можно более жестким образом; 4) реология деформируемой среды, параметры нагружения, а возможно, и конфигурация границы (по п. 2) выбираются так, чтобы в определенный момент условия единственности базового течения „ a “—„ c “ нарушались.

Здесь уместно рассмотреть одно обобщение. Требование п. 1, предписывающее полную однородность базового течения, является довольно сильным. С одной стороны, оно суживает класс базовых течений, с другой — приводит к большим техническим трудностям. Поэтому его следует ослабить. Например, допустить замену краевых условий (1) на близкие к ним и более удобные в реализации. Кроме того, можно допустить зависимость базовых деформаций от одной из пространственных координат и т. д.

Таким образом, можно ожидать, что в результате осуществления алгоритма пп. 1—4 будут возникать определенные упорядоченные структуры. В частных случаях это можно доказать теоретически, например, как в [64, 142]. В общем случае, без конкретизации реологии среды и условий ее нагружения, доказательство, по-видимому, невозможно. Здесь, по крайней мере, достаточно сослаться на то, что все известные структуры и, главное, способы их реализации в указанный алгоритм вполне укладываются.

Так, в случае конвективных ячеек Бенара в исходной базовой ситуации нет зависимости от горизонтальных координат x_1, x_2 (если отвлечься от боковых стенок). В базовом течении для вихрей Тейлора практически нет зависимости от цилиндрических координат θ и x_3 . В стратифицированном течении, из которого развивается неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, также нет существенной зависимости от двух пространственных координат и т. д.

Таким образом, во всех приведенных примерах п. 1 указанного выше экспериментального алгоритма — присутствует. Легко видеть, что и остальные признаки п. 2—4 здесь также налицо. Эти факты можно истолковать как определенное подтверждение алгоритма. Теперь естественно рассмотреть применение алгоритма для поиска новых упорядоченных структур.

§ 7.2. БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

Естественно начать с наиболее простых способов нагружения. Обратимся к сдвигу без поворота осей тензора деформаций. Конструкция устройства нагружения, рассмотренная в главе 2, достаточную жесткость краевых условий — обеспечивает. Ограничимся описанием результатов, полученных на сыпучих материалах без сцепления [10]. (Результаты для материалов со сцеплением приведены в [6]). Свойства подобных материалов таковы, что потерю устойчивости а, значит и неединственность можно ожидать при достижении деформации сдвига определенных критических значений.

Обратимся к экспериментальным фактам. Использовались методика и прибор, описанные в главе 2. Как уже отмечалось, при однородном сдвиге обеспечивается течение материала типа куэтовского между параллельными плоскостями. Вначале деформация имеет аффинный характер. Затем происходит переход к новому режиму. Материал разбивается плоскими вертикальными поверхностями скольжения на отдельные блоки, и дальнейшее деформирование происходит в условиях локализации сдвигов. На поверхности образца плоскости скольжения образуют довольно регулярную систему линий. Возникают два вопроса: в чем причина локализации сдвигов и чем определяется характерный размер блока. Для выяснения этих вопросов необходимы данные о напряжениях в образце. Для измерения напряжений использовались датчики, описанные в [110, 117].

Нормальные напряжения измерялись датчиком с корпусом в виде пластины $23 \times 12 \times 2$, в центре которой имелся прямоугольный вырез 14×10 мм. Тыльная сторона выреза заглашалась тонкой пластиной. К корпусу над вырезом с предварительным натяжением приклеивался чувствительный элемент-тензорезистор 2ФКПА-10-100ГВ, который защищался резиновой оболочкой. Тензорезистор включался в одно из плеч сбалансированного моста. При воздействии нормальных напряжений сигнал разбаланса через усилитель поступал на самописец.

Касательные напряжения измерялись датчиком, представляющим собой две прижатые друг к другу прямоугольные пластины $24 \times 12 \times 0,5$ мм, заключенные в тонкую резиновую оболочку. Фиксировались напряжения, сдвигающие одну пластину относительно другой. Фиксация осуществлялась двумя чувствительными элементами 2ФКПА-10-100ГВ. Для исключения влияния нормальных давлений и трения контакт между пластинами осуществлялся через два ряда несоприкасающихся между собой стальных шариков $\varnothing 0,1$ мм, которые удерживались в тонком слое смазки. Проверка линейности и тарировка проводились измерением скатывающей силы, действующей на эталонный груз, помещенный на наклонную плоскость.

Измерения проводились следующим образом. На дно камеры засыпался тонкий слой сыпучего материала. В центре на его поверхности вертикально устанавливался датчик. Затем камера заполнялась материалом и измерялось статическое давление. После этого

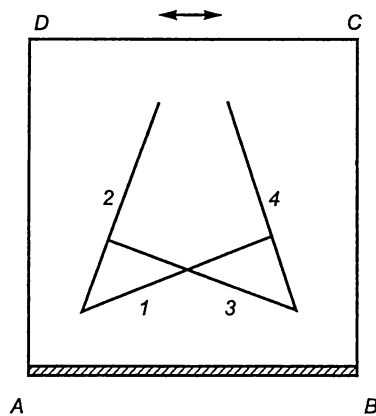


Рис. 7.1

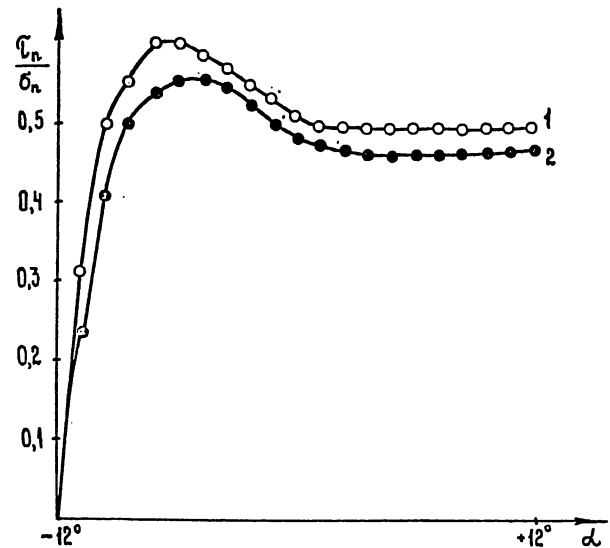


Рис. 7.2

проводилось нагружение. Сигнал от датчика угла сдвига камеры подавался на горизонтально отклоняющий ход самописца, от датчиков напряжений — на вертикально отклоняющий вход. Начальное положение камеры $\alpha = -12^\circ$. (Соответствует смещению стенки DC в крайнее положение влево, рис. 7.1). Ориентацию датчика будем характеризовать углом δ наклона его к диагонали AC . Угол δ отсчитывается против часовой стрелки и измеряется в положении камеры, показанном на рис. 7.1 ($\alpha = 0$).

Полученные данные о нормальных и касательных напряжениях позволяют определить поведение их отношение $\tau_\delta / \sigma_\delta$ для различных фиксированных площадок δ . При сдвиге как рыхлого, так и плотного материалов отношение напряжений $\tau_\delta / \sigma_\delta$ вначале монотонно возрастает, затем достигает своего максимума и переходит на ниспадающую ветвь (рис. 7.2, $\delta = 32^\circ$). Подобный характер кривых прослеживается для всех площадок δ , где $\tau_\delta \neq 0$. Причем, как и следовало ожидать, максимум на всех площадках достигается одновременно. В момент достижения максимума возникают линии скольжения. Четко визуализируются они несколько позже, при дальнейшем сдвиге на $3-4^\circ$.

Диаграммы показывают, что при сдвиге в одном направлении существуют две площадки $\delta = \pm\delta^*$ ($\delta^* \approx 32^\circ$), на которых достигается абсолютный максимум отношения $\tau_\delta / \sigma_\delta$ (по α и δ). Направления линий скольжения определяются ориентацией именно этих площадок. (Семейства 1, 2 которые соответствуют сжатию вдоль направления AC , см. рис. 7.1). Однако локализация происходит не по обоим семействам $\delta = \pm\delta^*$, а преимущественно только по одному из них. Знак δ зависит от случайных возмущений. Путем заданного возмущения (например, предварительным внедрением в материал тонкой узкой линейки) можно задать и положение (но не ориентацию) одной из линий скольжения.

При сдвиге камеры от $+12$ до -12° направление проскальзывания на линиях меняется, и происходит частичное „залечивание“ нарушенной структуры материала. Кроме этого, меняется скачком и направление максимального сжатия: AC на BD . Теперь локализация становится возможной на семействах линий 3, 4, повернутых относительно 1, 2 на угол, равный примерно 90° .

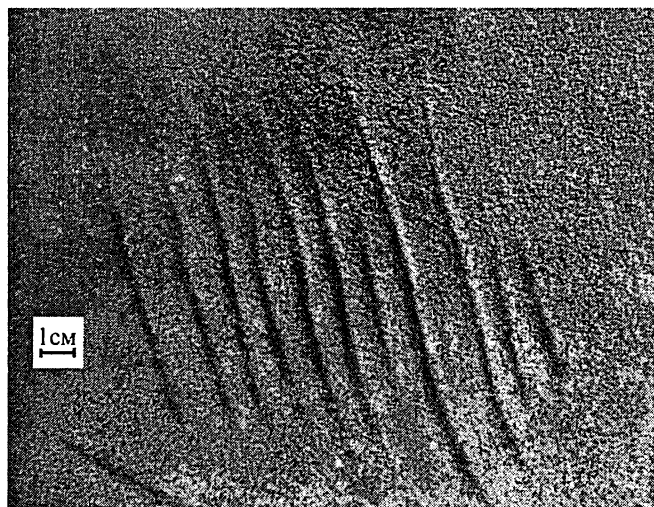


Рис. 7.3 а

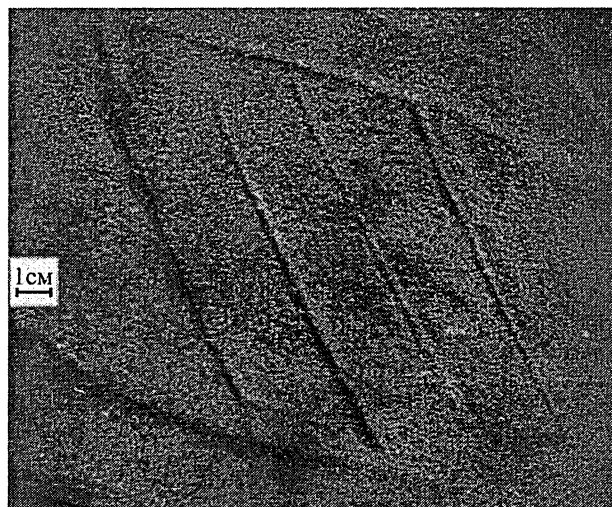


Рис. 7.3 б

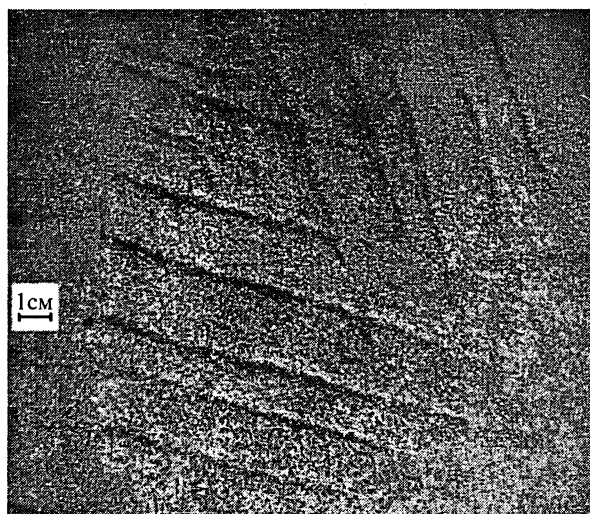


Рис. 7.3 в

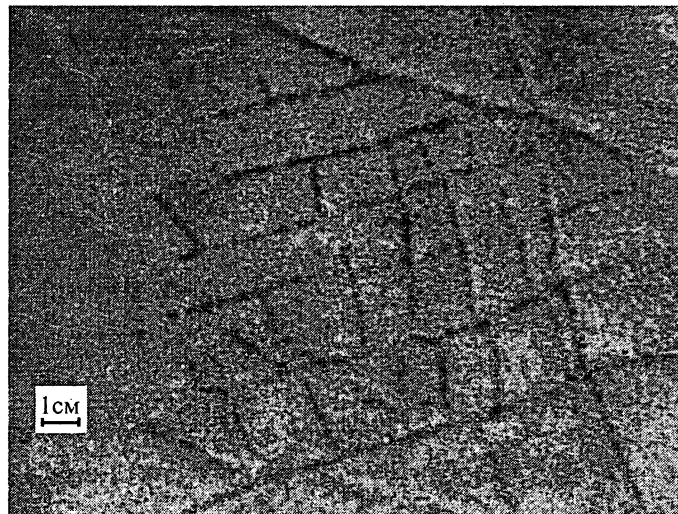


Рис. 7.3 г

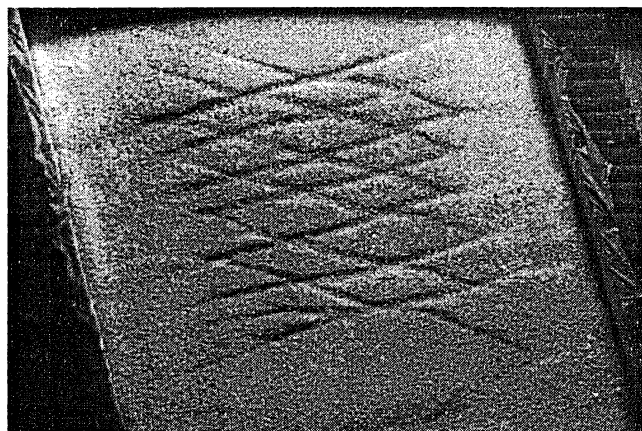


Рис. 7.4

На рис. 7.3, 7.4 показаны различные варианты реализации линий скольжения из семейств 1—4 (упорядоченные структуры на рис. 7.3 получены на приборе, описанном в главе 2, структуры на рис. 7.4 — на приборе, описанном в [6]).

Перейдем теперь к вопросу о расстояниях между линиями скольжения. Локализация приводит к новому механизму деформирования и, в частности, к нарушению однородности распределения напряжений. Измерения напряжений внутри блоков показали, что максимальные по уг-

лам α и δ касательные напряжения с удалением от линии скольжения монотонно увеличиваются до середины блока (рис. 7.5). Однако в его середине отношение напряжений $\tau_{\delta} / \sigma_{\delta}$ критического значения не достигает. Этот факт и определяет абсолютное расстояние между линиями скольжения. Изменяя характер нагружения, можно управлять градиентом напряжений, а следовательно, и расстояниями между линиями.

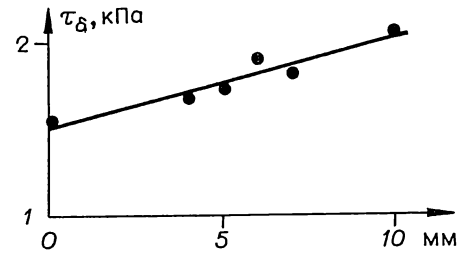


Рис. 7.5

Воспользуемся теперь возможностью независимого изменения объема камеры в процессе ее сдвига. Этого можно добиться за счет изменения расстояния $h(\alpha)$ между ее двумя гранями [9, 10] (см. рис. 2.4). Реализуем нагружение по программе

$$h(\alpha) / h(-12^\circ) = 1 + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 12^\circ) \operatorname{tg} \kappa,$$

где $\kappa = \text{const}$ (начальное положение камеры, как и прежде, $\alpha = -12^\circ$). Тогда при сдвиге первоначально плотного материала среднее расстояние между линиями равняется $l = 10$ мм, число линий $n = 12$, если $\kappa = -7^\circ$ (рис. 7.6 а), $l = 13$ мм, $n = 8$ при $\kappa = 0^\circ$ и $l = 26$ мм, $n = 4$ при $\kappa = +7^\circ$. Первоначально рыхлый материал менее чувствителен к условиям нагружения. Так, при $\kappa = -7^\circ$ $l = 21$ мм, $n = 7$; $l = 23$ мм, $n = 6$ при $\kappa = 0^\circ$ и $l = 27$ мм, $n = 4$ при $\kappa = +7^\circ$.

Расстояние между линиями имеет размерность длины. В данном процессе есть только два параметра размерности длины — характерный размер частиц d и размер самой камеры. Влияние первого параметра можно проследить на опытах с материалами, имеющими различные размеры частиц. Здесь возникает трудность, связанная с тем, что для материалов типа пшена, охотничьей дробы, стеклянных шариков линии визуально не наблюдаются. Визуализация осуществлялась следующим образом. Свободная поверхность исследуемого материала покрывалась тонким слоем другого сыпучего материала с частицами в 2—3 раза меньших размеров, чем исходный. При таком соотношении верхний слой внутрь основного материала не проникал. В случае необходимости сверху наносился еще один тонкий слой материала с частицами в 2—3 раза меньших размеров, чем преды-

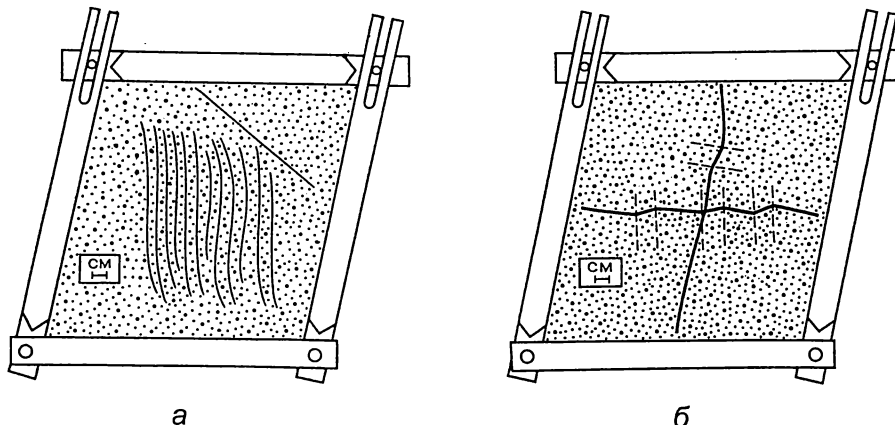


Рис. 7.6

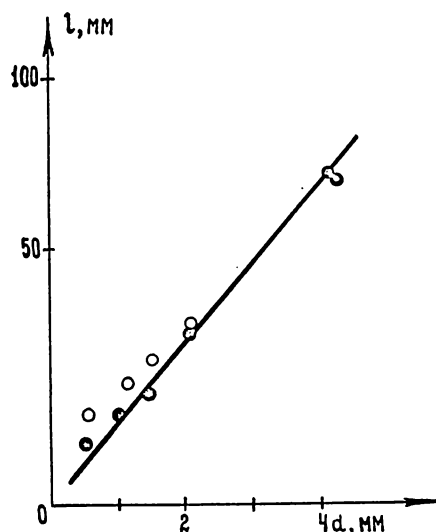


Рис. 7.7

дущий, и т. д. Самый верхний слой состоял из белого кварцевого песка с частицами $d \approx 0,3$ мм.

В начальном положении камеры ($\alpha = -12^\circ$) на поверхность образца параллельно стенкам камеры наносились две маркерные линии. На рис. 7.6 б показано их положение при $\alpha = +12^\circ$ (пшено). Пунктиром нанесены границы „линий“ скольжения. В ряде работ отмечалось, что „линий“ скольжения имеют определенную „толщину“ порядка 6—10 диаметров частиц [59]. Для крупных частиц этот факт становится существенным.

В качестве характерного размера d выбирался размер, которому соответствует максимум на гистограмме грансостава. График на рис. 7.7 показывает, что расстояние между линиями скольжения примерно пропорционально размеру частиц (темные точки соответствуют плотной упаковке, светлые — рыхлой). Следует отметить, что при

большом числе сдвигов на фоне основной системы линий, которая возникла на первом цикле, слабо визуализируются дополнительные линии, которые делят блоки примерно на две равные части (второе поколение линий скольжения).

Изменение размеров камеры также влияет на расстояние между линиями, хотя и не в такой степени, как размер частиц. Так, если для рыхлого песка $d \approx 0,3$ мм в исходной камере расстояние между линиями равнялось $l = 23$ мм, то в камере с линейными размерами в 2 раза меньше расстояния $l = 15$ мм. Для плотного песка соответственно имеем $l = 13$ и 11,7 мм.

Таким образом, проведенные эксперименты показывают, что причиной локализации является прогрессирующее развитие начальных возмущений, связанное с наличием ниспадающей ветви на диаграмме „отношение касательного и нормального напряжений — сдвиг“; ориентация линий определяется максимальным значением отношения напряжений, расстояние между линиями — размером частиц и условиями нагружения.

§ 7.3. ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Выше в качестве базового процесса рассматривался простой сдвиг. Простой сдвиг, как известно, можно свести к частному случаю двухосного растяжения, а именно, растяжения в некотором фиксированном направлении и точно такого же сжатия в ортогональном направлении. Естественно теперь в качестве следующего шага рассмотреть общий случай двухосного растяжения вдоль фиксированных ортогональных направлений.

Ограничимся случаем плоского нагружения*. Соответствующий стенд показан на рис. 7.8. Стенд включает в себя два независимых привода, которые обеспечивают растяжение листовой вакуумной резины (подложки) в двух направлениях (толщина резины со-

* Эксперименты были проведены в 1978 г. совместно с А.П. Бобряковым и ранее не публиковались, кроме диссертации и автореферата [260].

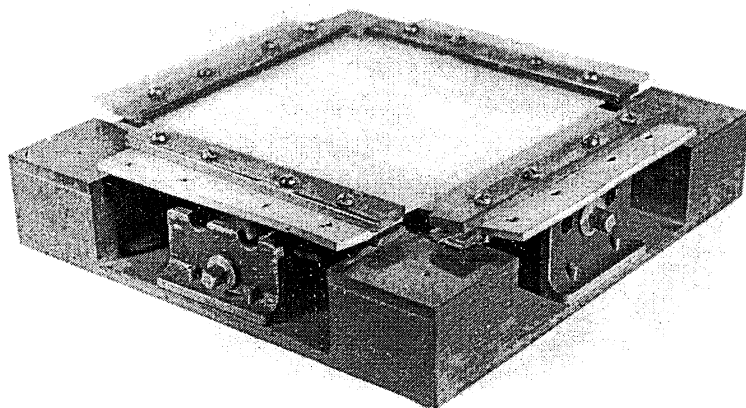


Рис. 7.8

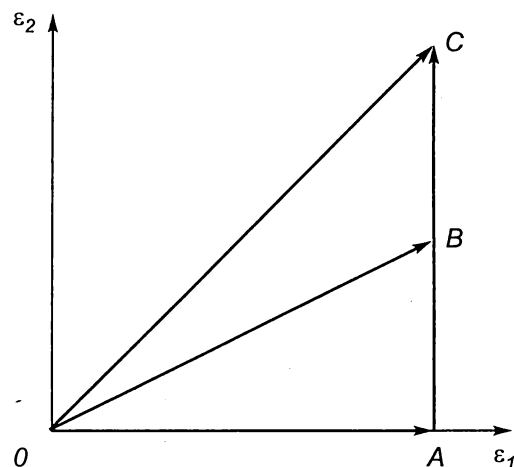


Рис. 7.9

ставляла 4 мм, модуль упругости $E = 0,82 \text{ кг/см}^2$). Подложка изготовлена в форме квадрата, по краям которого имелись выступы для захватов устройства нагружения. В местах захвата резина защемлялась между двумя стальными пластинами, которые кинематически были связаны с приводом. Привод представлял собой винтовую передачу, имеющую с одной стороны правую, а с другой — левую нарезку. При вращении винта за счет накручивающихся на винт гаек противоположные пластины могли удаляться, либо сближаться. Шаг резьбы, равный 1 мм, и количество оборотов винта определяли абсолютное удлинение резины в данном направлении. Деформации в ортогональном направлении осуществлялись аналогично. Для уменьшения взаимного влияния деформаций вблизи захватов по толщине резиновой подложки делались сквозные прорезы, которые за счет раскрытия могли частично снимать напряжения, вызывающие возникновение неоднородности поля деформаций.

Таким образом, здесь можно рассматривать различные программы нагружений. Если через ε_1 , ε_2 обозначить средние деформации в ортогональных направлениях, то программы нагружения можно характеризовать различными траекториями в плоскости $O\varepsilon_1\varepsilon_2$ (рис. 7.9).

В первой серии опытов исследовались хрупкие покрытия нитроэмалевой пленки и силикатного клея. Нитроэмалевая краска ровным слоем (распылением) наносилась на подложку. Для увеличения толщины покрытия операция нанесения краски с промежуточной сушкой повторялась несколько раз.

При одноосном растяжении (участок OA , см. рис. 7.9) образуется система параллельных сквозных трещин, расположенных нормально к направлению растяжения подложки (рис. 7.10). Расстояние между трещинами остается приблизительно одинаковым на всем поле деформаций; с

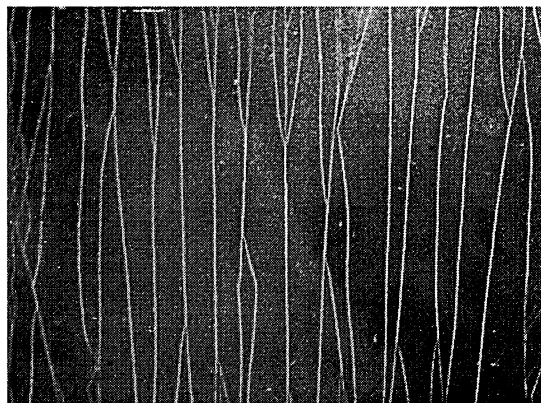


Рис. 7.10

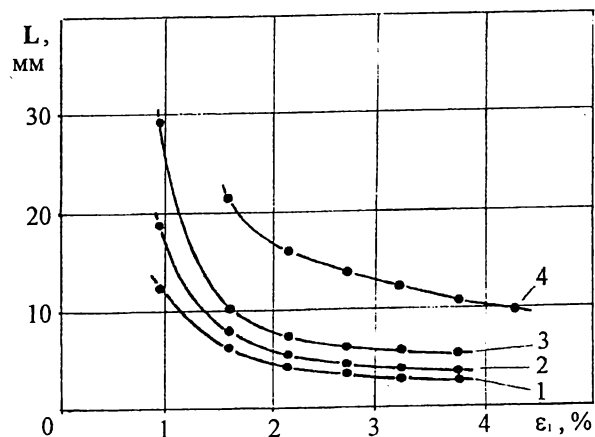


Рис. 7.11

увеличением деформаций происходит дальнейшее дробление целых кусков на равные части.

На рис. 7.11 приведены графики расстояний между трещинами L в зависимости от приложенных деформаций ε_1 для разных толщин нитроэмалевых покрытий 1, 2, 3 (0,025, 0,04, 0,075 мм соответственно) и силикатного клея 4 (0,1 мм). Как видно, при малых деформациях происходит резкое уменьшение среднего расстояния между трещинами с последующим плавным приближением его к некоторой устойчивой величине.

Если теперь создать такую же деформацию в поперечном направлении ε_2 (отрезок AC на рис. 7.9), то все поле растрескается теперь уже не сквозными, а локальными трещинами, длина которых ограничивается существующей системой трещин (см. рис. 7.10, 7.12).

В рассматриваемой задаче геометрия структуры существенно зависит от всего пути нагружения. Если в ту же самую точку C в пространстве деформаций прийти по траек-

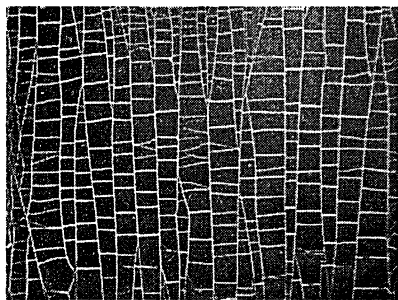


Рис. 7.12

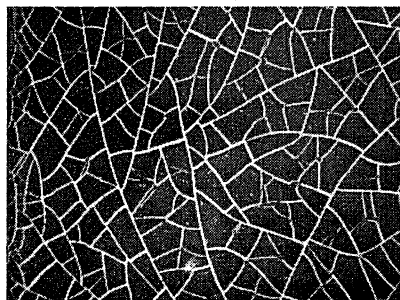


Рис. 7.13

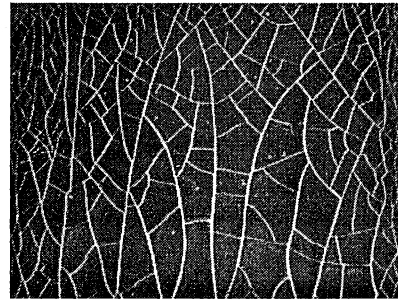


Рис. 7.14

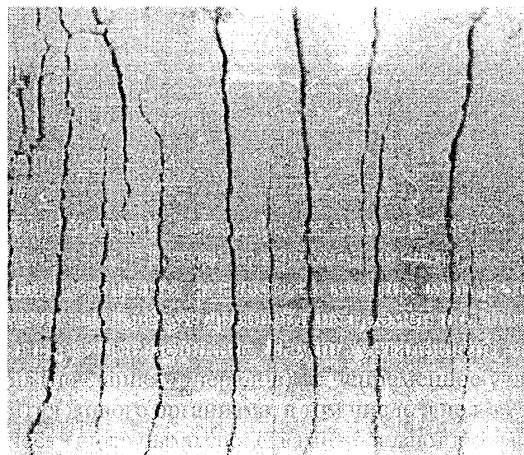


Рис. 7.15 а

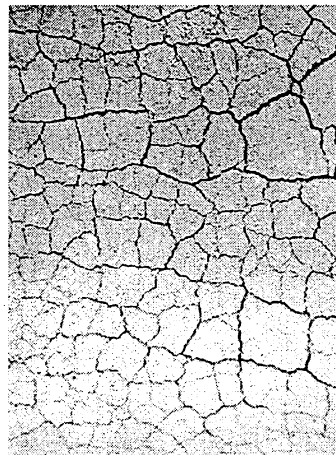


Рис. 7.15 б

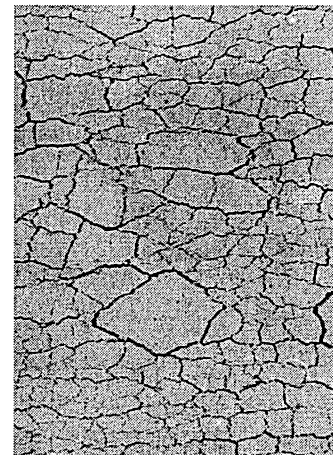


Рис. 7.15 в

тории OC , то получим структуру (рис. 7.13), которая существенно отличается от структуры, полученной на траектории OAC .

Структуры изображенные на рис. 7.10 и 7.13, охватывают два крайних случая: одноосное и всестороннее растяжения. Промежуточный тип структур для траекторий $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ изображен на рис. 7.14.

Аналогичные картины получаются для мелкодисперсных материалов, обладающих слабым сцеплением (каолин, рис. 7.15 *а, б, в*, траектории $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$).

В целом все картины деформирования носят случайный характер. Однако их статистические характеристики (средние размеры блоков, число сторон в блоке и др.) довольно устойчивы. В частности, даже визуально нетрудно заметить, что отклонение условий нагружения от равномерного дает определенную анизотропию структуры. Для описания анизотропии подсчитывались средние диаметры блоков, измеренные вдоль различных направлений. На рис. 7.16 показаны средние размеры как функция угла α ($\alpha = 0$ соответствует направлению ε_2). Светлым точкам соответствует нагружение по траектории $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (четкая изотропность картины), темным точкам — нагружение с $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$. Видно, что средние размеры блоков в зависимости от направления измерения могут меняться в два раза. Подобные данные могут служить основой для решения обратной задачи — определения характеристик поля напряжений по статистическим данным о характере структуры среды. Численная модель процесса рассмотрена в § 9.2.

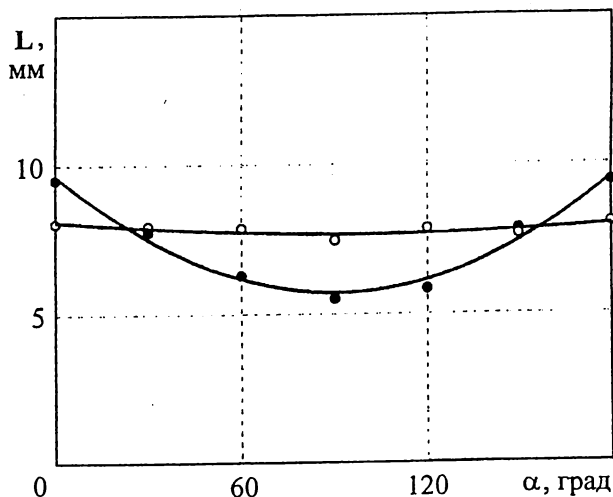


Рис. 7.16

§ 7.4. СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ МАТЕРИАЛОВ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

7.4.1. Полигональные структуры

Выше в качестве базовых было рассмотрено два простейших типа деформаций: сдвиг и двухосное растяжение. Следующим по сложности можно считать плоское нагружение с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Ограничимся только эллиптическим случаем (см. главы 1, 3), так как здесь возникновение структур можно наблюдать непосредственно и, кроме того, как отмечалось, такие процессы наиболее удобны для реализации.

Вначале рассмотрим постепенное разрушение тонкого слоя, обладающего слабым сцеплением. На нижнем основании слоя зададим деформации, близкие к эллиптическим. Способ нагружения описан в главе 3, характер деформирования основания показан на рис. 6.1. На рис. 7.17 видны последовательные стадии формирования упорядоченной структуры. В качестве материала использовался слой муки толщиной 5 мм. Коэффициент сжатия эллипса — 0,91 (то есть здесь базовые деформации гораздо меньше, чем показано на рис. 6.1). Рисункам *а, б, в, г* соответствуют углы поворота на 60, 90, 180 и 360°.

Полученная структура относится к полигональному типу и „помнит“ начальное положение осей эллипса. Это связано с тем, что все трещины формируются на первых стадиях нагружения. В дальнейшем их конфигурация сохраняется.

При последующем деформировании можно наблюдать, как вся структура „дышит“. В ней идут знакопеременные сдвиги, трещины попеременно раскрываются, закрываются и т. д. Это приводит к дальнейшему разрушению блоков и постепенному изменению их формы. Ниже рассмотрен случай, когда подобный процесс полностью стирает память о начальной форме образца и приводит к формированию вполне изотропных структур.

7.4.2. Вихревые структуры

Применим теперь построенный алгоритм для получения структур, близких к изотропным. В качестве базового по-прежнему будем рассматривать плоское эллиптическое

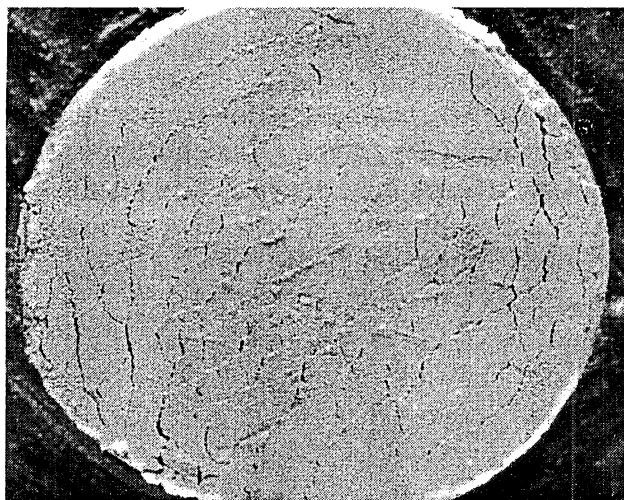


Рис. 7.17 а



Рис. 7.17 б

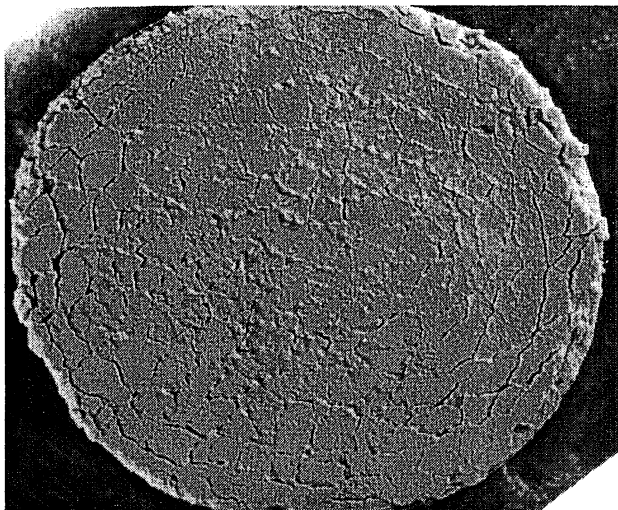


Рис. 7.17 в

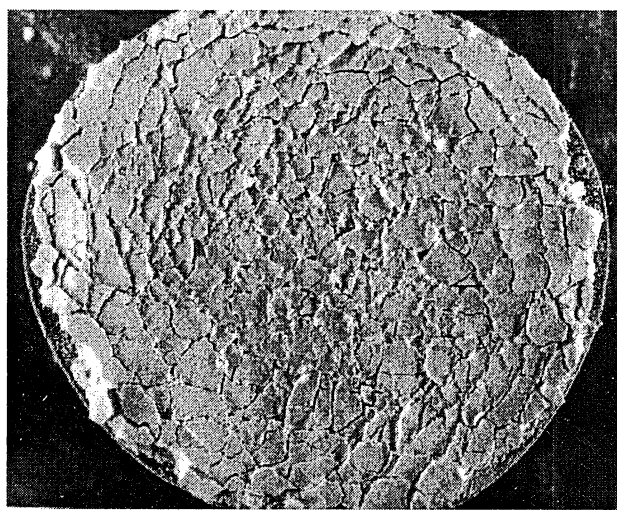


Рис. 7.17 г

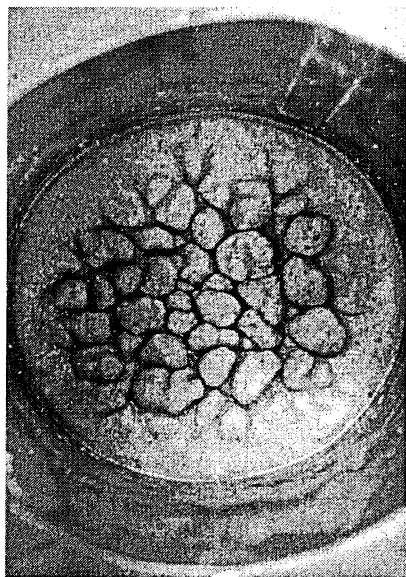


Рис. 7.18 а

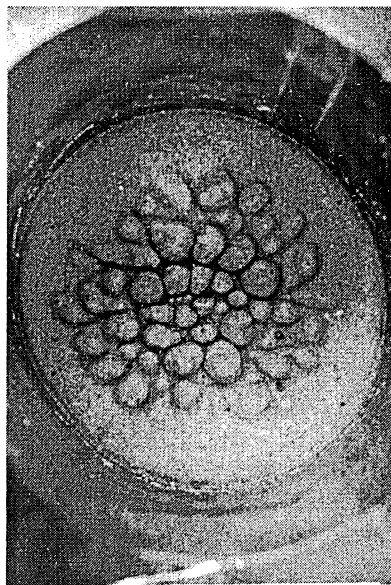


Рис. 7.18 б

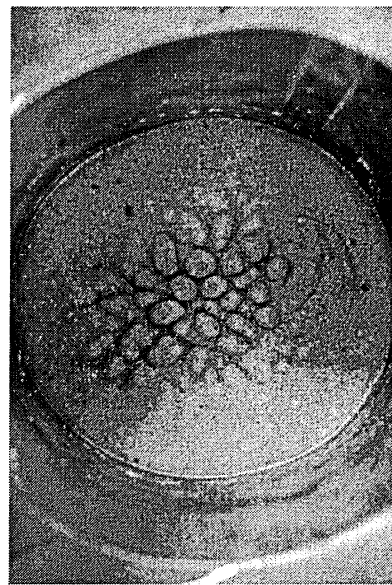


Рис. 7.18 в

течение. В качестве потенциального носителя структуры выберем упруго-вязко-пластическую среду (кварцевый песок, насыщенный вязкой жидкостью). Такая среда обладает сцеплением и потому в ней возможны как линии скольжения, так и трещины нормального разрыва. Разрушение происходит, если деформации достигают определенного критического значения. Следовательно, если эксцентриситет эллипса взять достаточно большим, то однородность неизбежно нарушится и можно ожидать, что в среде возникнет определенная упорядоченная структура.

Опыты ставились в следующей последовательности. Сначала в камеру помещался образец из сухого песка и проводилось нагружение до перехода упаковки частиц в стационарное состояние. При этом коэффициент сжатия эллипса выбирался таким, чтобы структур не возникало ($K = 0,91$; $a = 60,8$ мм, $b = 55,3$ мм). Использовался кварцевый песок с размером частиц $0,3$ мм, вес образца — 545 г, в стационарном состоянии объемы образца и пор равны 320 см³ и $V_n = 115$ см³, пористость — 36% .

После достижения стационарного состояния нагружение прекращалось, и в образец вводилась жидкость. Во всех опытах ее объем $V_{ж}$ превосходил объем пор, то есть коэффициент насыщения $m_v = V_{ж}/V_n$ в исходном состоянии был больше 1 . Поэтому перед деформированием на поверхности образца всегда оставался слой избыточной жидкости. Затем начиналось нагружение уже водонасыщенного образца. При повороте внешнего цилиндра упаковка частиц испытывает положительную дилатансию. Поэтому слой жидкости с поверхности образца всасывается в увеличенный объем пор. При достижении критических деформаций в образце формируется система параллельных трещин. Вследствие конвективного поворота трещины уходят из-под нагрузки и формируется новая система трещин. В этом отношении указанный процесс похож на деформирование сухого песка. Отличие состоит в том, что в сухом песке трещины носили только сдвиговый характер и залечивались. Здесь же образуются отдельные устойчивые ячейки. При повороте углы их сглаживаются (рис. 7.18 а, б, в, $V_{ж} = 128$; 130 и 131 см³ соответственно). Видно,

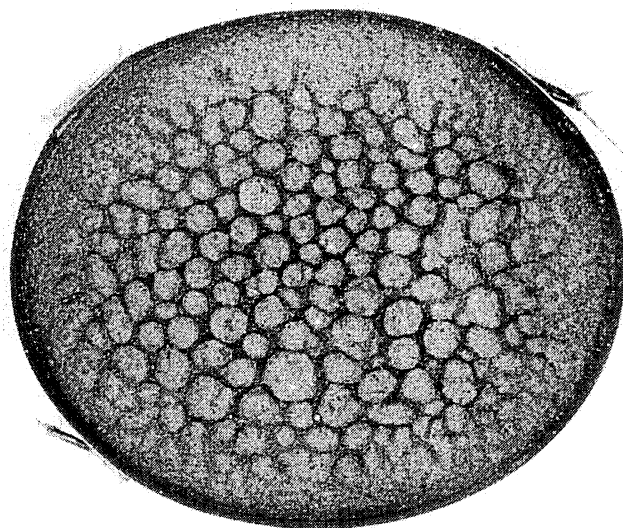


Рис. 7.19

что наряду с характерным размером встречаются также ячейки малых размеров. Они получены в основном при разрушении углов первоначальных ячеек.

Общая картина деформирования зависит также от вязкости жидкости. На рис. 7.19 показана структура, полученная на смеси кварцевого песка и глицерина с водой (1:1). От структуры, показанной на рис. 7.18, она отличается бóльшим захватом деформированной области и гораздо бóльшим временем, которое требуется для ее формирования (200 циклов нагружения, 100 оборотов). Во всех опытах увеличение объема жидкости приводит к уменьшению размеров ячеек. Зависимость в координатах „средний размер ячеек — коэффициент насыщения“ является практически линейной [53].

§ 7.5. СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ИДЕАЛЬНО СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Напомним, что идеально сыпучими принято называть такие материалы, сцеплением которых можно пренебречь [206]. Представление о подобных материалах дает сухой кварцевый песок. Как уже отмечалось, по своему реологическому поведению материалы такого типа можно отнести к пластическим, все модули которых зависят от гидростатического сжатия. Характерным свойством идеальных сыпучих материалов является множественность форм их равновесия. Так, одинаковым краевым условиям, достигнутым различными путями, могут соответствовать совершенно различные распределения напряжений (см., например, главу 6).

Еще более поразительной является множественность различных картин локализации деформаций, которые получаются при довольно близких путях нагружения. Здесь, правда, следует отметить, что локализация зависит также от истории формирования образца, то есть от его начальной пористости и способа упаковки частиц. Большую роль играет также гранулометрический состав и, особенно, средний размер частиц. Поэтому вначале рассмотрим вопрос о среднем размере частиц.

Задача определения среднего размера частиц является далеко не такой тривиальной, как это может показаться на первый взгляд. Рассмотрим самую простую ситуацию. Пусть среда состоит из двух типов отдельностей. Например, сыпучий материал содержит N_1 частиц диаметра d_1 и N_2 частиц диаметра d_2 . Действительную упаковку требуется заменить эффективной упаковкой N одинаковых частиц некоторого среднего диаметра D . Проще говоря, по заданным числам N_1 , d_1 , N_2 , d_2 требуется определить D и N . Так как число неизвестных равно двум, то при осреднении можно удовлетворить только двум условиям.

Первое условие кажется очевидным: объем частиц в эффективной упаковке должен равняться объему частиц в действительной упаковке. Отсюда

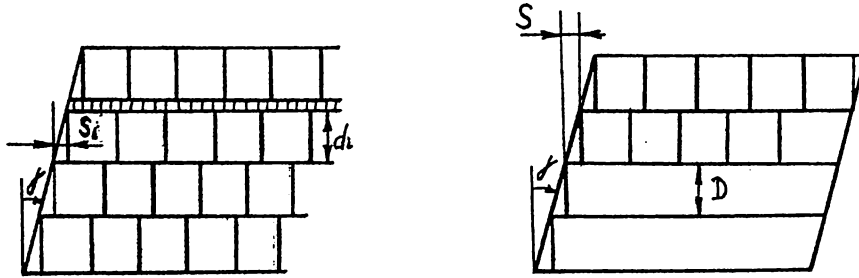


Рис. 7.20

$$N_1 \cdot d_1^3 + N_2 d_2^3 = N \cdot D^3. \quad (1)$$

Разумно ввести еще один критерий — критерий проскальзывания. Деформация сдвига сплошной среды является величиной безразмерной. Однако если учитывать масштабный фактор, то любой сдвиг повлечет за собой относительные проскальзывания размерности длины. Простая оценка (рис. 7.20) показывает, что величина проскальзывания пропорциональна размеру структурного элемента: $S_i = d_i \cdot \tan \gamma$. Проскальзывания определяют дилатансию упаковки, пластическую деформацию и диссипацию энергии на контактах. Потребуем, чтобы сумма всех проскальзываний в действительной и эффективной упаковках совпадали между собой. Это требование приводит к равенству (2):

$$N_1 \cdot d_1 + N_2 \cdot d_2 = N \cdot D. \quad (2)$$

Из системы (1), (2) следует, что

$$D = \sqrt{\frac{N_1 \cdot d_1^3 + N_2 d_2^3}{N_1 \cdot d_1 + N_2 \cdot d_2}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{D^2} = n_1 \frac{1}{d_1^2} + n_2 \frac{1}{d_2^2}, \quad (3)$$

где $n_1 = m_1/M$, $n_2 = m_2/M$ — весовое процентное содержание соответствующих фракций (m_i — масса всех частиц диаметра d_i , M — общая масса, $i = 1, 2, \dots$). Таким образом, условия (1), (2) приводят к обычному правилу определения средневзвешенной величины, но только не для самих размеров частиц, а для квадратов обратных величин.

Формула без изменений обобщается на любое число фракций:

$$\frac{1}{D^2} = \sum_i n_i \frac{1}{d_i^2}.$$

В случае непрерывного распределения имеем

$$\frac{1}{D^2} = \int_0^\infty \frac{n(d)}{d^2} dd,$$

где $M \cdot n(d)dd$ — масса частиц, радиусы которых лежат в интервале $(d - d/2, d + d/2)$.

7.5.1. Пространственно-временная структура, связанная с локализацией по системам плоскостей

В качестве базового будем, по-прежнему, рассматривать плоское эллиптическое течение, описание в главе 1. Нагружение будем осуществлять путем вращения пластин-шаблонов относительно гибкой камеры, в которую помещался деформируемый материал (см. главу 3). В данном случае рассматривается деформирование сухого кварцевого песка. Если взять материальное волокно, совпадающее с малой осью эллипса, то в процессе деформирования оно переходит в большую ось, затем опять в малую ось и так далее, т. е. его длина меняется в диапазоне $2b, 2a$, где $a \geq b$ — полуоси эллипса. Поэтому в качестве обобщенной меры деформации можно принять либо величину $(a - b) / a$, либо эксцентриситет эллипса $\lambda = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$. Если $\lambda = 0$, то область представляет собой круг, который вращается как жесткое целое относительно шаблонов. Если $\lambda \rightarrow 1$ при $b = \text{const}$, то $a \rightarrow \infty$. В пределе получаем течение Куэтта между параллельными пластинами.

При малых λ течения этого типа исследовались в главе 3. Здесь нас будет интересовать больший диапазон λ , который охватывает процессы возникновения структур [52]. Обозначим через α угол поворота шаблонов и будем считать его параметром нагружения. В процессе деформирования измерялись напряжения внутри образца, а также его высота.

В качестве параметра P , характеризующего процесс деформирования образца в целом примем его среднюю плотность. Если образец получен свободной засыпкой струей, то при нагружении он необратимо уплотняется (участок OA диаграммы 1 рис. 7.21, начальная высота образца $H = 141$ мм, по оси ординат отложено уменьшение высоты, $a = 62,38$ мм; $b = 53,64$ мм; $\lambda = 0,51$). Затем плотность образца выходит на асимптоту и больше уже не меняется. Если образец формировался так, что его исходная плотность была достаточно большой, то с началом нагружения он разрыхляется. Затем деформирование выходит на тот же самый стационарный режим. Иными словами, память об исходной структуре материала стирается и стационарное состояние от исходной упаковки частиц не зависит. Этот режим рассматривался в главе 3. Здесь он отмечается только для сравнения.

Будем теперь постепенно увеличивать значение λ . До значений $\lambda = \lambda^* = 0,661$ реакция среды качественно не меняется. Меняются только параметры стационарных состояний: напряжения уменьшаются, пористость возрастает. На рис. 7.22 показаны стационарные

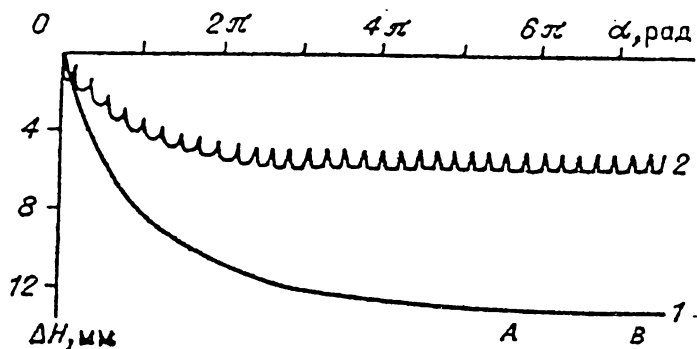


Рис. 7.21

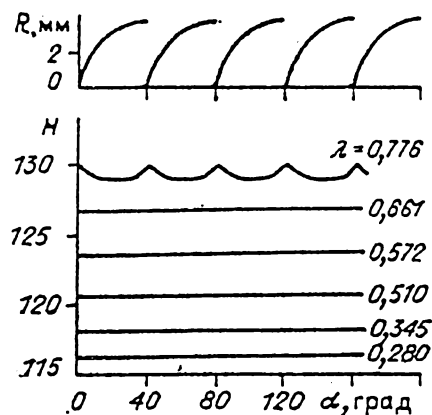


Рис. 7.22

участки дилатансионных кривых типа AB на рис. 7.21 для различных значений λ . Затем происходит качественное изменение — дилатансия приобретает пульсирующий характер и стационарный режим сменяется новым, который характеризуется более-менее периодической реакцией (диаграмма 2 рис. 7.21). Период пульсации равен времени поворота шаблонов примерно на угол 40° .

Какова причина такого поведения? Обратимся к наблюдениям за кинематикой деформирования. При малых значениях λ поле скоростей носит гладкий характер. С увеличением λ интенсивность деформаций возрастает, и в конце концов достигает таких значений, при которых начинается локализация. Это и является главной причиной формирования временных структур.

Рассмотрим механизм этого явления подробнее. Пусть установлена камера с эксцентриситетом $\lambda \geq \lambda^*$. Камера заполняется материалом и начинается нагружение. Некоторое время $0 < \alpha < \alpha^*$ материал деформируется без разрывов (допредельные деформации). Затем формируется система линий скольжения. Для их наблюдения на поверхность образца наносились маркирующие полосы из закрашенного материала (рис. 7.23). При повороте шаблонов на угол $\alpha > \alpha^*$ полосы разбиваются на отдельные отрезки, между которыми образуются разрывы. Их величина — это и есть скачок касательной компоненты смещения. Впервые линии скольжения появляются на площадках, где отношение касательных и нормальных напряжений τ_n / σ_n максимально.

В процессе деформирования линии скольжения вместе с материалом испытывают конвективный перенос и поворот. Поэтому отношение напряжений τ_n / σ_n , действующих на линиях, уменьшается. Однако скольжение при этом не прекращается. Последнее связано с тем, что скольжение меняет свойства самого материала на линиях. Материал разупрочняется и поэтому для продолжения скольжения требуются уже меньшие значения τ_n / σ_n . Таким образом, здесь действуют два фактора: уменьшение отношения напряжений τ_n / σ_n , с одной стороны, и разупрочнение материала — с другой. При увеличении сдвига разупрочнение материала постепенно прекращается и его „прочность“ (отношение τ_n / σ_n на линии) стабилизируется. Следовательно, первый фактор довольно быстро исчерпывает себя; второй фактор более существен, так как в данном классе нагружений оси тензора напряжений непрерывно поворачиваются. Поэтому через определенный угол поворота отношение τ_n / σ_n уменьшается настолько, что скольжение все же прекращается. Этот процесс хорошо виден на графике рис. 7.22. Видно, как с увеличением угла α проскальзывание R на линии монотонно растет, но скорость его постепенно уменьшается до нуля. Затем скольжение прекращается, и система линий этого семейства функционировать перестает.

Материал между линиями можно рассматривать как новый образец со специфическими границами. В силу заданных краевых условий этот образец

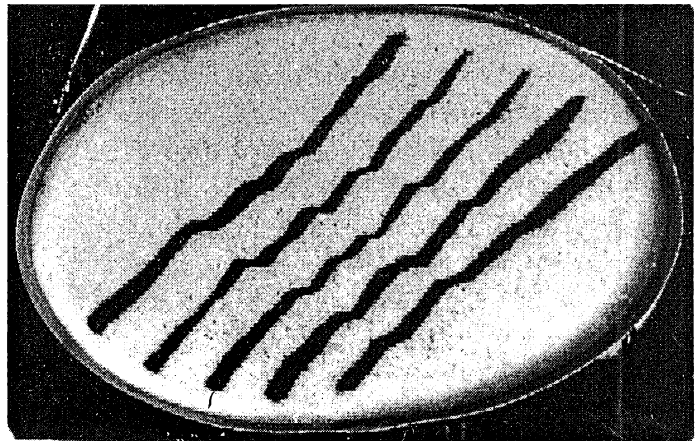


Рис. 7.23

будет сжиматься. Напряжения в нем снова достигнут критической величины и начнется новая локализация. Интересно отметить, что моменты прекращения скольжения на линиях одного семейства и начала скольжения на следующем семействе не совпадают между собой. Промежуток между ними составляет примерно 10° , т. е. в это время деформирование образца происходит без локализации: идет подготовка нового семейства линий и материал разрыхляется. Затем все повторяется снова.

Таким образом, рассмотренная структура имеет пространственно-временной характер. Упорядоченность ее в пространстве определяется характером нагружения (жесткое и, достаточно близкое к однородному), а также свойствами материала (потеря устойчивости деформирования). Упорядоченность во времени имеет не абсолютный характер, а связана только со скоростью нагружения. Действительно, из параметров, управляющих процессом, невозможно скомбинировать характеристику размерности времени (среда не обладает вязкостью, инерционные эффекты отсутствуют и т. д. Поэтому период процесса будет определяться только со скоростью нагружения (естественно, до определенного предела).

7.5.2. Системы спиральных линий скольжения

Продолжим изучение структур, возникающих при сложном нагружении эллиптического типа. Для этого придется расширить диапазон различных ситуаций, в которых можно ожидать появление структур. Обратимся к экспериментальному алгоритму п. 7.1.2. В соответствии с требованием алгоритма, нагружение должно быть однородным или близким к однородному. При этом степень „близости“ можно трактовать достаточно широко. Далее, материал и условия его нагружения должны быть такими, чтобы стало возможным проявление неустойчивости (выход на ниспадающую ветвь). Свойствами сыпучего материала проще всего управлять, изменяя размер частиц. Ниже воспользуемся именно этой возможностью.

Теперь остановимся на основном параметре — интенсивности нагружения. Алгоритм указывает на то, что имеет смысл рассматривать максимально возможные интенсивности. Для эллиптического нагружения интенсивность определяется отношением осей a/b . Однако, схема нагружения, принятая в главе 3, не позволяет реализовать деформирование сильно вытянутых областей. Для таких областей скручивающий момент, действующий на гибкую оболочку, возрастает и оболочка теряет устойчивость.

Рассматривалось два пути преодоления этой трудности. Первый путь — самый простой. Не меняя конструкции стенда и схемы нагружения, в центр камеры помещался жесткий вертикальный цилиндр радиуса r . В результате деформирование материала осуществлялось в эллиптической области с круговым вырезом (ядром). Наличие ядра приводило к тому, что характерная деформация материала увеличивалась с величины a/b до $(a-r)/(b-r)$ без изменения длин осей эллипса.

Второй путь является более радикальным [55]. Был изготовлен новый стенд, в котором в известной степени были объединены идеи приборов однородного сдвига (глава 2) и сложного нагружения (глава 3). Принципиальная схема стенда показана на рис. 7.24. Ведущий шкив 2 приводился во вращение, которое передавалось ведомому шкиву 3 с помощью нескольких одинаковых ременных передач 4, равномерно расположенных по высоте шкивов. Регулировка натяжения ремней, осуществлялась перемещением шкивов относительно друг друга. Внутри ременных передач на гладкую поверхность 5 устанавли-

валась цилиндрическая камера 1 с сыпучим материалом. Боковая поверхность камеры изготавливалась из упругого листового металла толщиной 0,3 мм, а дно представляло собой равномерно растянутую тонкую резину, приклеенную к боковой поверхности. Сжатие камеры задавалось путем регулирования расстояния между жесткими подвижными платформами 6. При движении ремней камера увлекалась ими за счет сил трения и происходило ее непрерывное деформирование так, что скорость всегда была направлена по касательной к границе.

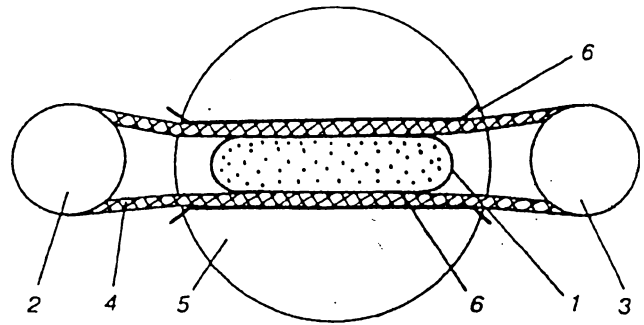


Рис. 7.24

Перейдем теперь к описанию результатов. Вначале остановимся на картинах локализации, полученных на приборе сложного нагружения (с цилиндрическим ядром и без него). Эксперименты проводились в следующей последовательности. Вначале устанавливались шаблоны и цилиндр заданного диаметра. Затем камера заполнялась материалом и включался привод шаблонов. В процессе эксперимента измерялся угол поворота цилиндра в зависимости от числа оборотов шаблонов и велось наблюдение за поверхностью образца.

Опыты показали, что независимо от крупности материала и параметров нагружения (диаметра цилиндра и эксцентриситета шаблонов) процесс деформирования проходит две стадии. Первая стадия является нестационарной. Для нее характерно изменение плотности материала и изменение кинематики его течения во времени.

В настоящей работе нестационарная стадия не затрагивалась. Следует только отметить, что она переходит в стационарную после 30—40 циклов нагружения. Остановимся на стационарной кинематике деформирования. Общим для всех проведенных опытов является то, что независимо от диаметра цилиндра, эксцентриситета шаблонов и крупности частиц его деформирование сопровождается локализацией сдвигов.

Однако сам тип локализации зависит от крупности материала и от соотношения геометрических параметров нагружения. К первому типу относятся линии, которые имеют вид логарифмических спиралей. Они наблюдались при деформировании всех образцов материала, кроме самого мелкозернистого ($D = 0,084$ мм). На рис. 7.25 показаны типичные картины локализации, относящиеся к этой группе.

В этих опытах была замечена одна интересная особенность, связанная с тем, что порой незначительное изменение формы шаблонов существенным образом влияло на поле перемещений. Формально это не означает неустойчивости процесса, так как любое незначительное изменение поля скоростей в условиях стационарного течения всегда ведет к значительному изменению перемещений, если время наблюдения будет достаточно большим.

В общем же случае возможна ситуация, когда незначительное изменение формы может существенно изменить и само поле скоростей. Например, могут появиться новые картины локализации.

Следует отметить, что этот вопрос требует более детальных исследований. В самом деле, какие формы следует считать близкими? Здесь недостаточно только визуальной оценки. Например, если брать во внимание радиусы кривизны, либо высшие производные, то внешне незначительные изменения в новой норме могут быть уже значительными.

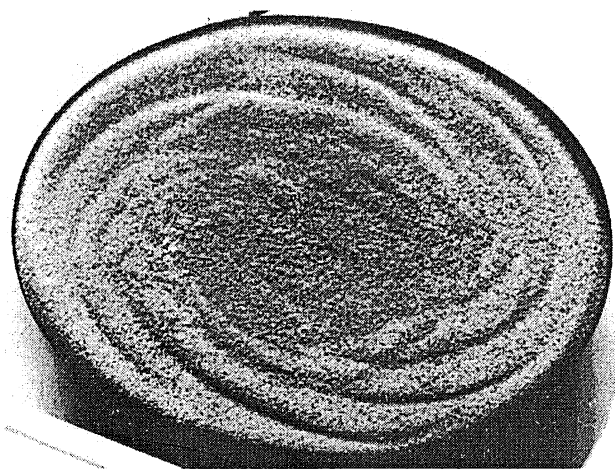


Рис. 7.25 а

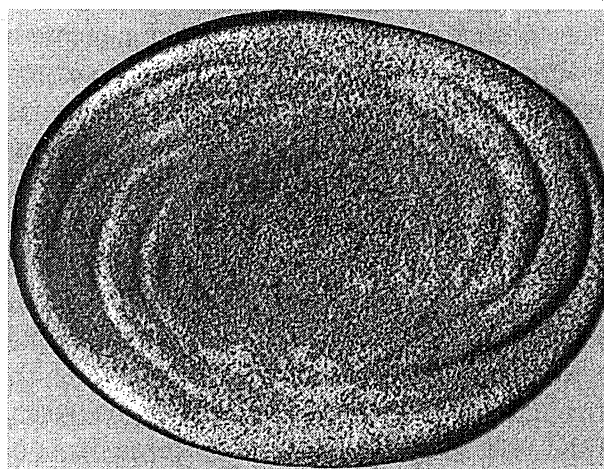


Рис. 7.25 б

Перейдем теперь к аналогичным экспериментальным данным, полученным на стенде, изображенном на рис. 7.24. Эксперименты показали, что в зависимости от параметров оболочки и крупности материала здесь также возможен целый ряд стационарных и нестационарных состояний материала.

Опыты проводились в следующем порядке. Оболочка определенной длины помещалась между плитами и задавалось ее некоторое сжатие, которое в эксперименте оставалось фиксированным. После этого оболочка заполнялась материалом. Затем начиналось нагружение с постоянной скоростью (линейная скорость оболочки во всех опытах составляла $\sim 0,5$ см/с). Нагружение носило квазистатический характер.

Опыты показывают, что здесь каждое течение также имеет нестационарную стадию. Вначале при небольшом сдвиге процесс имеет характер допредельного деформирования. Затем происходит локализация и дальнейшее деформирование происходит уже в условиях локализации. Линии скольжения переносятся и в конце концов приобретают некоторую окончательную форму. В некоторых случаях эта форма стационарна, а в некоторых — квазистационарна, т. е. возникает одна форма, затем периодически другая, третья и т. д.

В зависимости от длины оболочки, степени сжатия и крупности материала существует множество равновесных форм, что приводит к большому разнообразию картин течения. Здесь невозможно описать все стационарные состояния и переходы при различных формах линий локализации. Поэтому ограничимся описанием только основных стационарных картин течения.

При описании всех опытов приводим следующие оригинальные экспериментальные данные: 1) радиус оболочки, если ей в плане придать форму круга — R ; 2) величину малого диаметра оболочки (расстояние между плитами) — H ; 3) величину большого диаметра оболочки (наибольшее расстояние между точками горизонтального сечения оболочки) — L .

На рис. 7.26 приведена картина течения кварцевого песка с размером частиц $0,25 < d < 0,45$ мм и следующими параметрами нагружения; мм: $R = 47$, $H = 80$, $L = 100$. Видно, что в стационарном состоянии сформировано две линии скольжения, которые представляют собой две спирали, одинаково раскрученные в одну сторону. Они идут от

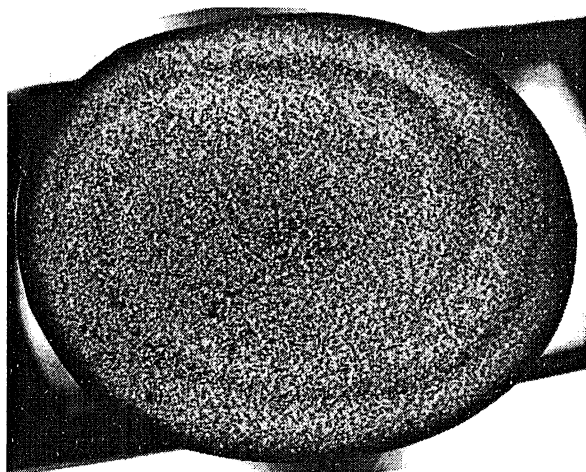


Рис. 7.26

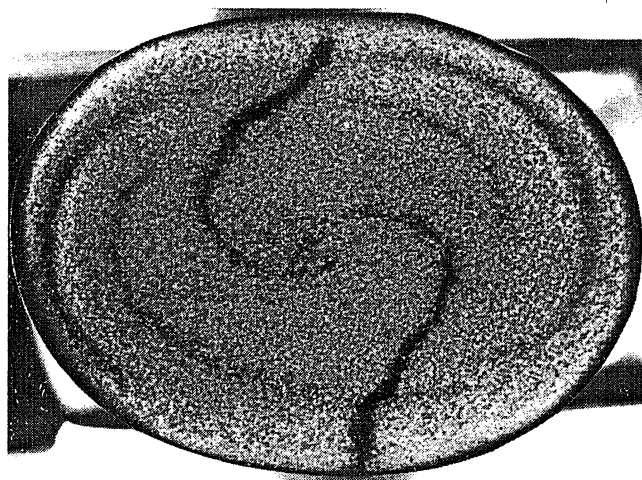


Рис. 7.27

периферии к центру образца. Однако ближе к центру они становятся малозаметны и исчезают.

Увеличим сжатие оболочки (см. рис. 7.27). Для этого случая $R = 47$ мм, $H = 75$ мм, $L = 104$ мм. Картина деформирования отличается от описанной в первом опыте тем, что увеличилось число линий скольжения. Однако, они по прежнему имеют форму спиралей и незамкнуты. Отметим, что для описываемых течений характерно наличие эффекта дифференциального вращения среды, подобного тому, который наблюдался при деформировании эллиптической области с помощью шаблонов. Это видно, например, на рис. 7.27 по искажению в процессе деформации первоначально прямолинейной маркерной полосы, нанесенной вдоль малого диаметра (на рисунке она окрашена темным цветом). Эффект дифференциального вращения подробнее исследуется в главе 10.

Как отмечалось, описанный выше алгоритм приводит к множеству самых разнообразных упорядоченных структур. Выше рассматривались структуры, образованные системой спиральных линий. Дальнейшее развитие этих структур возможно по различным сценариям, в зависимости от того, каким образом увеличивается интенсивность нагружения. Вначале рассмотрим случай, когда интенсивность увеличивается путем введения в материал цилиндрического ядра [56].

7.5.3. Турбулентное пластическое течение

Из общих соображений непрерывности ясно, что при малых радиусах ядра картина локализации должна остаться прежней. Эксперименты подтверждают это (рис. 7.28).

При увеличении диаметра цилиндра и эксцентриситета шаблонов, а также при уменьшении крупности материала число этих линий увеличивается и они становятся менее закрученными (рис. 7.29).

В конце концов происходит переход к новому механизму деформирования. Он характеризуется тем, что дополнительно к первому семейству линий скольжения, нарезается второе семейство, которое также имеет вид противоположно закрученных логарифмических спиралей (рис. 7.30). При этом материал вблизи цилиндра разбивается на блоки более-

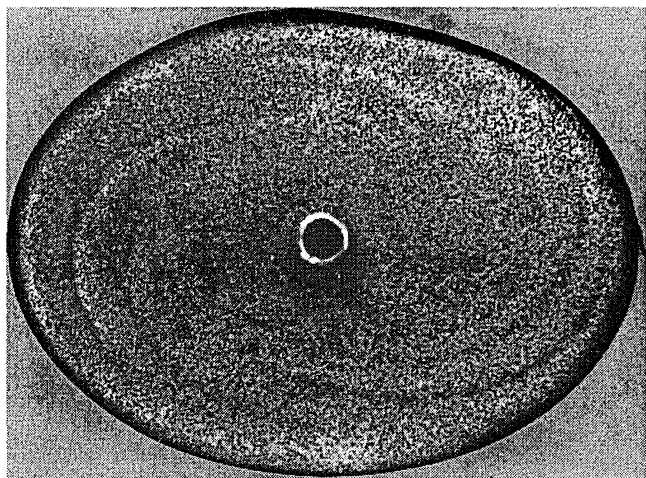


Рис. 7.28

менее правильной формы. По мере поворота шаблонов происходит поочередное функционирование то одного то другого семейства линий скольжения. Переключение функционирования линий происходит через угол поворота шаблонов равный приблизительно 45° .

Полученный результат позволяет яснее понять механизм пластической деформации вообще. Классические теории пластичности дают два семейства линий скольжения. Главным является то обстоятельство, что оба семейства совершенно равноправны; на них действуют одинаковые касательные напряжения, реализуются одинаковые сдвиги и т. д. При этом линии между собой

пересекаются (образуют сетку). Трудно представить себе одновременное функционирование пересекающихся линий.

В поставленном эксперименте получены прямые и непосредственные данные о механизме скольжения: линии скольжения из разных семейств функционируют попеременно. Для металлов подобный механизм функционирования получил название турбулентного пластического течения [261].

Глядя на картины деформирования на рис. 7.30, нельзя не заметить их поразительное сходство с линиями скольжения, которые получаются при решении методами теории предельных состояний задачи о распределении напряжений вокруг цилиндрической выработки или вокруг отверстий при пластическом деформировании металлов [262, 263]. Это служит еще одним подтверждением того, что все процессы, в которых появляются упорядоченные структуры, в той или иной мере представляют самостоятельный интерес (в том числе, и прикладной). В данном случае полученные результаты можно рассматри-

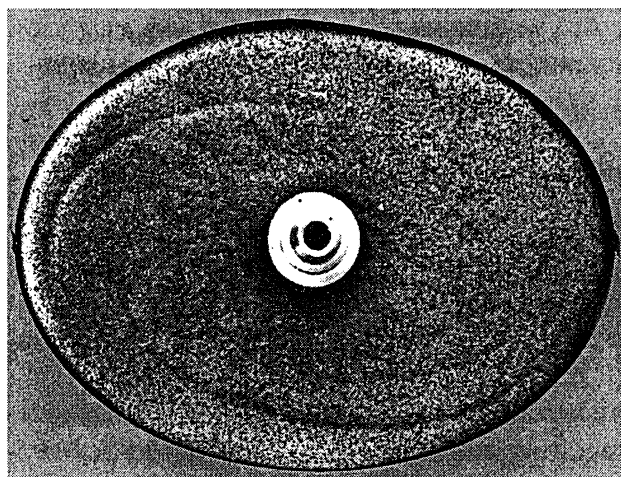


Рис. 7.29 а

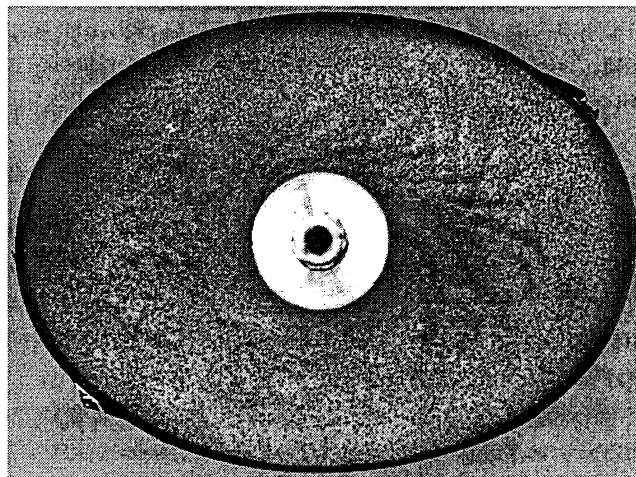


Рис. 7.29 б

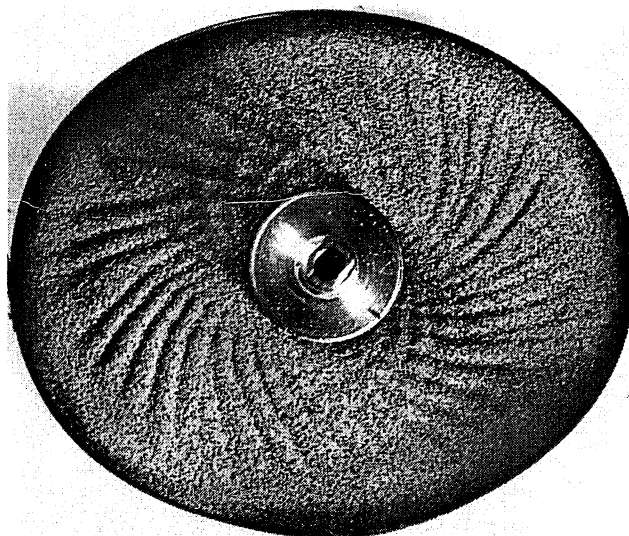


Рис. 7.30 а

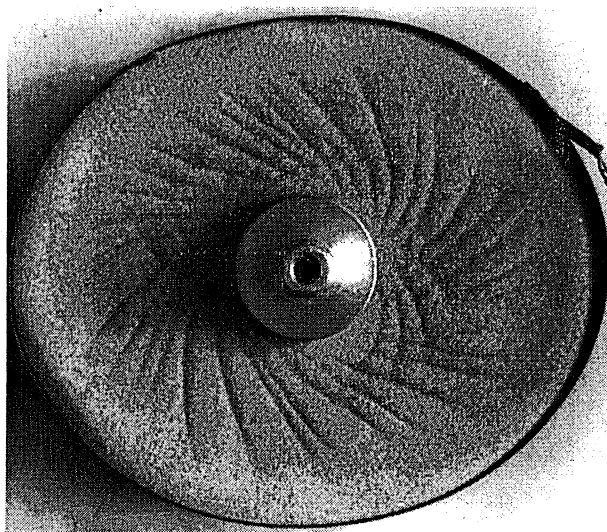


Рис. 7.30 б

вать как определенную модель деформирования горного массива вокруг выработки. Еще одну интерпретацию можно дать в связи с моделированием деформаций небесного тела под действием приливных сил. Эта возможность подробнее рассматривается в главе 10.

7.5.4. Структуры, связанные с линиями скольжения типа овалов Кассини и лемнискаты Бернулли

Вернемся к спиральным структурам, описанным в п. 7.5.2. Выше рассмотрена их дальнейшая эволюция в случае, когда интенсивность нагружения увеличивается за счет введения в область жесткого ядра. Возможен, однако, и другой сценарий эволюции. Для его исследования будем использовать схему нагружения, изображенную на рис. 7.24. В качестве исходной выберем спиральную структуру, изображенную на рис. 7.26, 7.27. Будем теперь от опыта к опыту постепенно увеличивать степень сжатия деформируемой области. Для этого расстояние H между плитами будем постепенно уменьшать (сохраняя периметр оболочки в плане неизменным). Картина деформирования меняется непрерывно. Вначале она подобна изображенной на рис. 7.27. Затем происходит качественное изменение.

Линии формируются вначале как спирали, затем они замыкаются. При переходе от рис. 7.27 к рис. 7.31 ($R = 47$ мм, $H = 67$ мм, $L = 122$ мм, материал прежний) видно первое качественное изменение. Оно выражается в том, что формируются две внутренние области, ограниченные линиями скольжения, близкие по форме к лемнискаты Бернулли. В общем здесь имеются две внутренние области и внешняя область с незамкнутыми спиральными линиями скольжения.

Следующий качественный переход показан на рис. 7.32. Здесь $R = 47$ мм, $H = 60$ мм, $L = 117$ мм. Видна замкнутая внешняя линия скольжения. Начиная с этого момента, можно говорить о стационарных линиях, т. е. линиях, проскальзывание на которых может быть в принципе неограниченным. Это видно также на рис. 7.33 по искажению первоначально прямолинейной маркерной полосы, нанесенной вдоль малого диаметра.

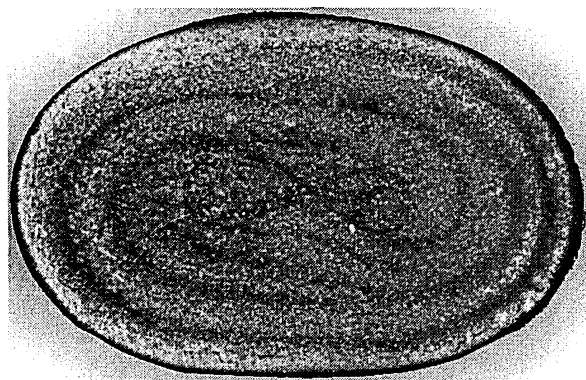


Рис. 7.31

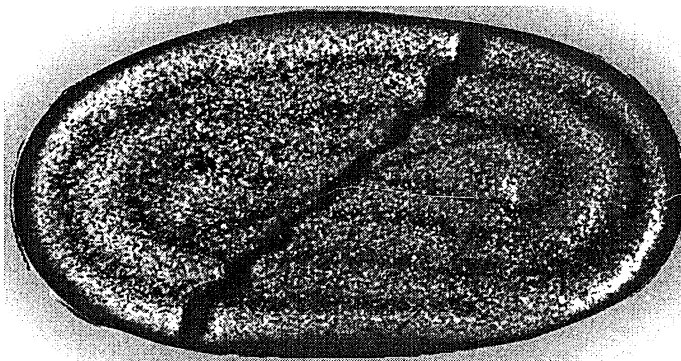


Рис. 7.32

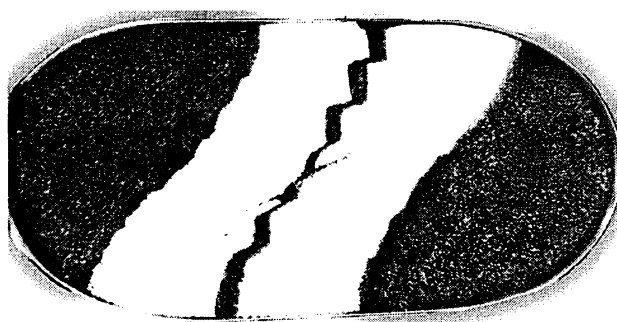


Рис. 7.33

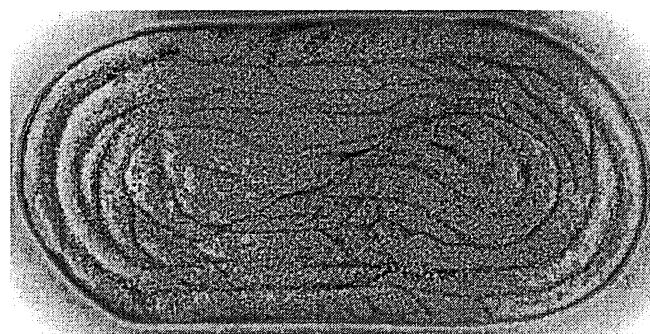


Рис. 7.34

Так как получить большее сжатие на этой оболочке не позволяет конструкция стенда, то в следующем опыте использовали оболочку с другим (большим) периметром поперечного сечения. На рис. 7.34 приведена картина деформирования кварцевого песка крупностью $d < 0,25$ мм ($R = 75$ мм, $H = 95$ мм, $L = 190$ мм). Здесь видны стационарные линии и внутренняя область, ограниченная кривой типа лемнискаты Бернулли, две неподвижные точки типа устойчивых фокусов и средняя неустойчивая точка. Здесь частицы все время смещаются либо в одну, либо в другую область. В целом форма стационарных линий скольжения в этом опыте близка к семейству овалов Кассини.

Таким образом, 1) В общем случае стационарные условия нагружения сыпучей среды порождают процесс деформирования, который является либо стационарным, либо близким к периодическому. 2) Картина линий локализации зависит от формы контура деформируемой области. При малых сжатиях линии близки к логарифмическим спиральям. С увеличением сжатия линии замыкаются и принимают форму, близкую к овалам Кассини. Семейства овалов Кассини встречаются в самых различных областях механики и физики (на фазовых портретах различных физических процессов, картинах линий равных потенциалов в электростатике и т. д.). В настоящей работе это семейство во всем многообразии, включая лемнискату Бернулли, получено непосредственно в опытах с сыпучим материалом. 3) Получены стационарные линии скольжения, на которых проскальзывания могут продолжаться сколь угодно долго. Это обстоятельство может быть использовано для исследования свойств различных геоматериалов в условиях неограниченных сдвигов и, в частности, при моделировании процессов сегрегации на разломах.

7.5.5. Структуры, связанные с локализацией усталостного типа

Линии скольжения, которые наблюдаются в сыпучих материалах, горных породах, металлах, имеют очень много общего с трещинами хрупкого или квазихрупкого разрушения. И в том и в другом случае речь идет о появлении поверхностей сильных разрывов смещений. И в том и другом случае можно говорить о разрушении материала. Специфика линий скольжения состоит в том, что они наблюдаются в условиях достаточно большого сжатия и поэтому взаимодействие на берегах линии (или, иными словами, трещины сдвига) сохраняется и в целом материал свою несущую способность сохраняет. Если говорить о математических моделях этих явлений, то в них также очень много общего. Ниже рассмотрен пример (глава 8), когда задачи в вариационных формулировках и в том и в другом случае ставятся практически одинаково.

Если обратиться теперь к критериям локализации и разрушения, то в них также есть общие черты. В обоих случаях до выполнения критерия материал сохраняет свою сплошность. Затем по достижению критического состояния наблюдается рост магистральной трещины или развитие магистральной линии (поверхности) скольжения. В этом смысле можно сказать, что та локализация, которая была описана выше, представляет собой явление, родственное росту магистральных трещин.

Однако в металлах хорошо известен и другой тип разрушения — это усталостное разрушение. Ему отвечают трещины усталостного типа, которые зарождаются и растут постепенно в результате периодического нагружения в течение многих циклов.

В сыпучих материалах, насколько известно по литературным источникам, ничего подобного не наблюдалось. В опытах [56] на мелкозернистых материалах был обнаружен новый тип локализации, которую можно назвать локализацией усталостного типа. Опыты проводились на стенде сложного нагружения с материалом, средняя крупность частиц которого составляла $D = 0,084$. Вначале никакой локализации не наблюдалось. Затем уже после выхода напряжений и дилатансии материала на стационарный режим в течении большого числа циклов наблюдается постепенное формирование и развитие первой линии скольжения (рис. 7.35, 100 циклов, или 50 оборотов). С увеличением числа циклов постепенно формируется сетка усталостных линий (рис. 7.36 а, б, в — 300, 900 и 2000 циклов). Характерно чертой является постепенная эволюция всей картины течения. Кинематика

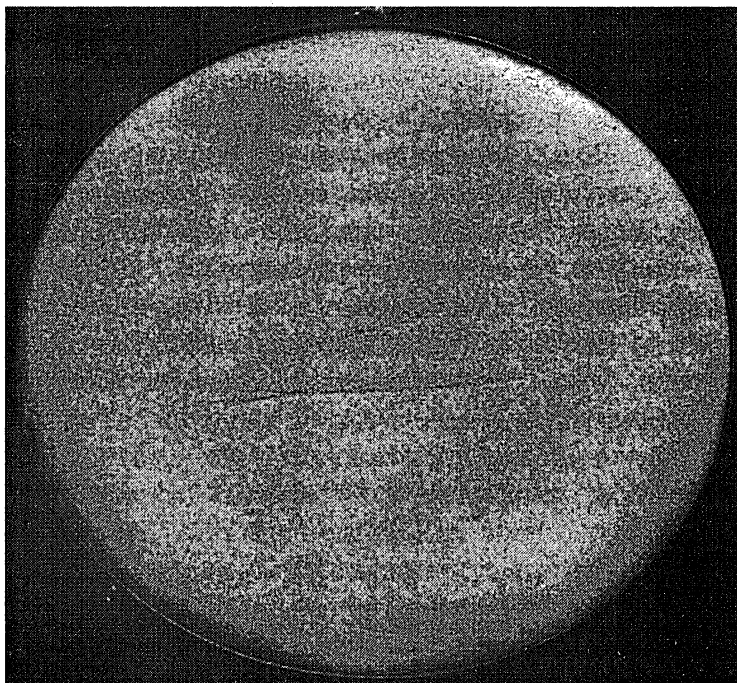


Рис. 7.35

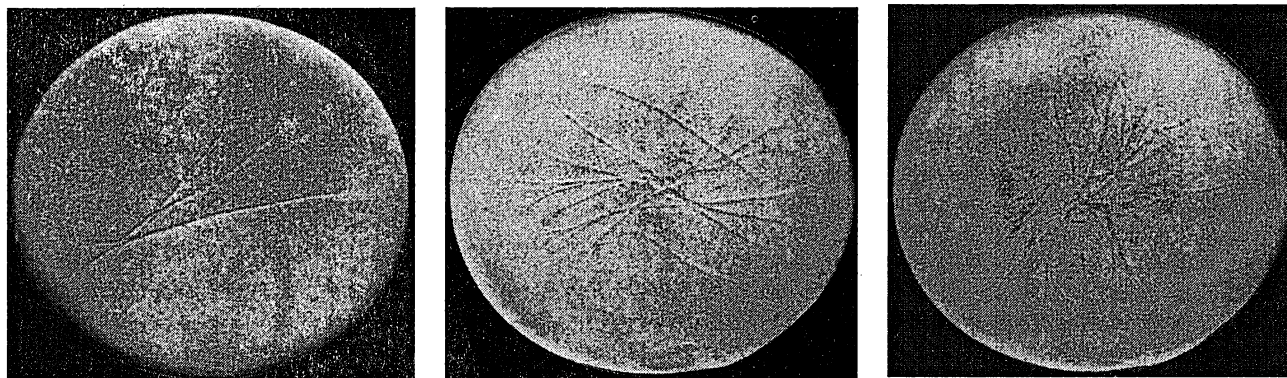


Рис. 7.36 (а, б, в)

деформирования материала на стационарное состояние не выходит (по крайней мере, в проведенных экспериментах, охватывающих 2100 циклов).

§ 7.6. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Для получения нового класса упорядоченных структур снова обратимся к алгоритму п. 7.1.2. Основное требование алгоритма сводится к тому, чтобы базовое течение, т. е. течение, из которого возникает структура, было однородным, либо близким к однородному. При этом трактовка понятия „близости“ допускает достаточно большой произвол. Например, пусть (r, θ, z) — цилиндрическая система координат. В идеально однородных течениях не должно быть зависимости ни от одной из координат (см. главу 1). Однако в течении Куэтта между коаксиальными цилиндрами нет зависимости только от угла θ , есть слабая зависимость от z и довольно существенная зависимость от r . Тем не менее это течение можно считать „близким“ к однородному. Опыты подтверждают последнее: именно такие течения приводят к формированию системы вихрей Тейлора.

По аналогии можно рассмотреть еще одно базовое течение, обладающее осевой симметрией. Возьмем конический радиальный канал с гладкими стенками. Будем продавливать сквозь него материал, имеющий устойчивые характеристики по крайней мере при малых деформациях. Из общих соображений можно заключить, что течение материала должно быть достаточно симметричным. На этом основании будет считать такое течение также „близким“ к однородному.

Указанная задача представляет и самостоятельный интерес для ряда областей техники, связанных с обработкой металлов давлением (прокатка, экструзия, протяжка сквозь матрицы), выпуском и переработкой сыпучих материалов и т. д. Процессы движения в сужающихся каналах происходят и в естественных условиях (движения горной породы в окрестности выработки, формирование мульд проседания, движение вулканических масс к кратеру вулкана и др.). Различные аспекты проблемы такого движения исследовались во многих теоретических и экспериментальных работах [263—268]. В теоретических работах обычно рассматривается случай плоской деформации в радиальном канале. При этом вводятся две основные гипотезы: предполагается, что 1) весь материал целиком находится в пластическом состоянии; 2) течение является радиальным и симметричным относительно оси симметрии канала.

Первая гипотеза носит принципиальный характер и связана с основными предположениями теории пластичности (и упругости) о том, что деформируемая среда является сплошной, и при построении математической модели любой ее элементарный объем наделяется свойствами деформируемого макрообразца. Так, если образец деформируется упруго, то предполагается, что и каждый его элементарный объем деформируется упруго. Последнее позволяет задачу описания упругости свести к описанию упругого поведения элементарного объема. По аналогии правомерность такого перехода предполагается и при исследовании пластического поведения: если образец обнаруживает пластические свойства, то и каждый его элементарный объем деформируется пластически. Поэтому, как и в теории упругости, задача описания пластичности сводится к описанию пластического поведения элементарного объема сплошной среды, т. е. к определению связей напряжений, деформаций (скоростей деформаций) и других параметров, характеризующих состояния элементарного объема. Отсюда и постановка упруго-пластических задач приводит к необходимости определения областей упругого и пластического состояний. Причем под последними понимаются области, каждый элементарный объем которых деформируется пластически.

Можно, однако, указать класс материалов, для которых предположение о тождественности свойств образца и его элементарного объема не выполняется даже приближенно. Действительно, пусть некоторый образец при определенных нагрузках обнаруживает пластические свойства. Возможна ситуация, когда при достаточно больших нагрузках образец разбивается дискретными поверхностями скольжения на отдельные части (блоки). При этом сами блоки деформируются упруго, а пластические свойства образца в целом связаны только с относительным проскальзыванием блоков по поверхностям скольжения. Материалы, для которых расстояния между поверхностями скольжения не являются малыми по сравнению с характерным размером деформируемой области, назовем L -пластическими [61, 62] (подробнее см. главу 8).

Таким образом, если для пластических материалов возможен переход к бесконечно малому объему и задача описания пластичности сводится к определению связей между параметрами деформирования этого объема, то для L -пластических материалов такой переход невозможен и поэтому при описании L -пластичности возникают новые задачи: формулировка критерия появления поверхностей скольжения, определение связи между проскальзыванием размерности длины и соответствующими напряжениями, описание свойств материала, от которых может зависеть расстояние между поверхностями скольжения, выяснение закономерностей функционирования пересекающихся поверхностей скольжения [22] и т. д. Решение краевых задач для L -пластических материалов предполагает определение не упругих и пластических областей, а определение глобальных поверхностей скольжения и их эволюции в процессе деформирования. Естественно, что условие упругого поведения блоков, выделенных поверхностями скольжения, можно обобщить, допуская их дилатансию, неупругость и т. д. Эксперименты в простейших и более сложных ситуациях с металлами, горными породами, различными грунтами показывают, что во многих случаях эти материалы ведут себя как L -пластические, т. е. при достаточно больших напряжениях материалы удовлетворяют накладываемым граничным условиям не путем появления пластических областей, а путем скольжения по отдельным поверхностям (см., например [263, 269, 270]).

Рассмотрим вначале плоское деформирование L -пластического материала в радиальном сходящемся канале [50]. Очевидно, что первая гипотеза о пластическом состоянии всей деформируемой массы в данном случае неприемлема по самому определению L -пластичности. Отсюда следует, что и вторая гипотеза о радиальном и симметричном характере течения также неприемлема, так как даже если и допустить наличие симметричного расположения несовпадающих с радиусами линий скольжения, то условие их функционирования [22] приведет к тому, что течение будет несимметричным и нерадиальным.

Ниже приводятся экспериментальные данные, которые показывают, что течение в симметричном канале существенно отличается от радиального и симметричного. Эксперименты проводились с сухими кварцевыми песками, которые в данном случае ведут себя как L -пластические материалы. Фотографии приведены для песка крупностью 0,5—1 мм с углом внутреннего трения $32\text{—}34^\circ$ и объемным весом $1,58 \text{ г/см}^3$. Опыты проводились на стенде, в котором выполнялись условия плоской деформации (передняя и задняя стенки — из зеркальных стекол, последнее обстоятельство позволило применять засыпку подкрашенного материала и визуализировать течение на всех его этапах).

Стенд представлял собой радиальный канал высотой 440 мм с углом раствора 24° . Стенд был оборудован приспособлением (канал постоянного сечения с поршнем), позволяющим задавать скорость движения материала на выходе из сходящегося канала. Боковые стенки в стенде — металлические, расстояние между передней и задней стенками 100 мм, ширина отверстия 6 мм. Во время опытов проводились фото и киносъемка. Эксперименты показывают, что в начале гравитационного выпуска или при малых смещениях поршня материал деформируется без образования линий скольжения (допредельное деформирование). При достаточно больших смещениях образуются глобальные линии скольжения, разбивающие материал на отдельные блоки. Линии скольжения появляются сначала в нижней части канала и затем распространяются выше. Эксперименты показали, что линии из различных семейств образуют непрерывную кривую с точками излома на границах канала (рис. 7.37).

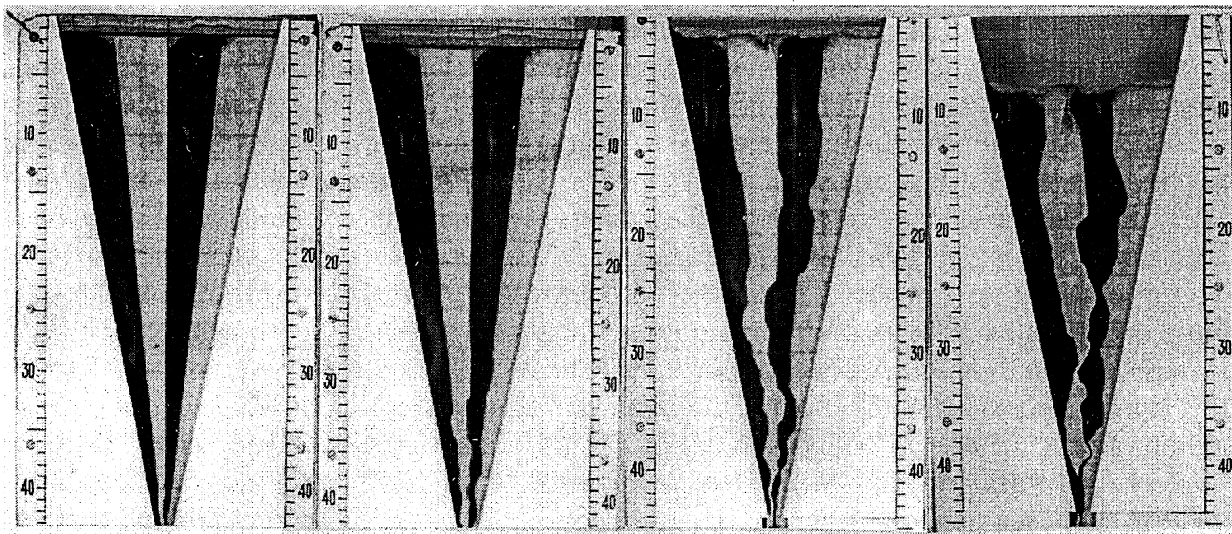


Рис. 7.37

Первоначально в нижней части канала образуются две примерно симметричные линии скольжения, которые выделяют криволинейный треугольник с основанием на поршне [59]. Дальнейшее продолжение обеих линий до стенок канала, как показывают опыты, равновероятно. Очевидно, что размер следующего блока диктуется граничными условиями, размером отверстия и теми же свойствами материала, которые определяют положение каждой из поверхностей скольжения, возникающей в первом блоке.

Большой интерес представляет вопрос о форме линий скольжения [57]. В полярных координатах (r, β) с полюсом в точке пересечения продолжения сторон канала уравнение линий скольжения имеет вид: $r = f(\beta, r^0, h)$, где r^0 — полярный радиус, соответствующий началу линии скольжения на стенке канала, h — ширина выпускного отверстия. Зависимость функции от угла раствора канала, удельного веса и других параметров не рассматривается. Из соображений размерности уравнение линий скольжения можно представить в виде $r = r^0 f\left(\beta, \frac{r^0}{h}\right)$. Если вычислить отношение r/r^0 при фиксированных β , то для

различных линий скольжения оно будет примерно постоянным. Следовательно, функция f от второго аргумента не зависит и уравнение линий скольжения принимает вид $r = r^0 \cdot f(\beta)$. Построение последовательной развертки отрезков линий скольжения приводит к выстиланию ими кривой, близкой к логарифмической спирали, начинающейся на одном из краев отверстия (рис. 7.38).

Таким образом, линии скольжения выделяют отдельные блоки („характеристические“ треугольники), основания которых связаны с одной из боковых поверхностей канала. Боковые поверхности накладывают кинематические ограничения на движение оснований „характеристических“ треугольников: каждое из оснований должно двигаться по соответствующей поверхности. Это обстоятельство приводит к тому, что течение становится нерадиальным и несимметричным. Объем материала, пересекающего ось симметрии канала, зависит от размеров блоков. Скольжение блоков по стенкам канала вызывает интенсивные деформации „сдвига“ (проскальзывания) по линиям скольжения. Направления

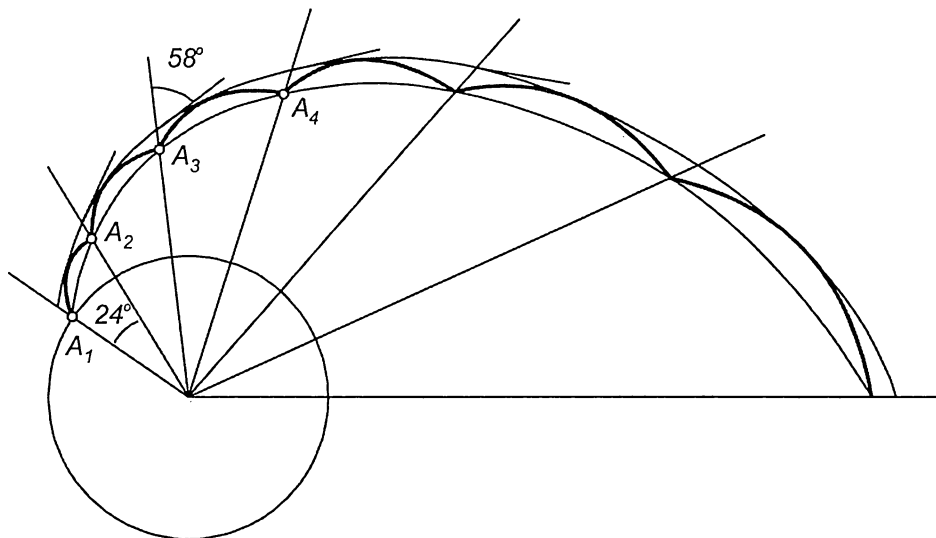


Рис. 7.38

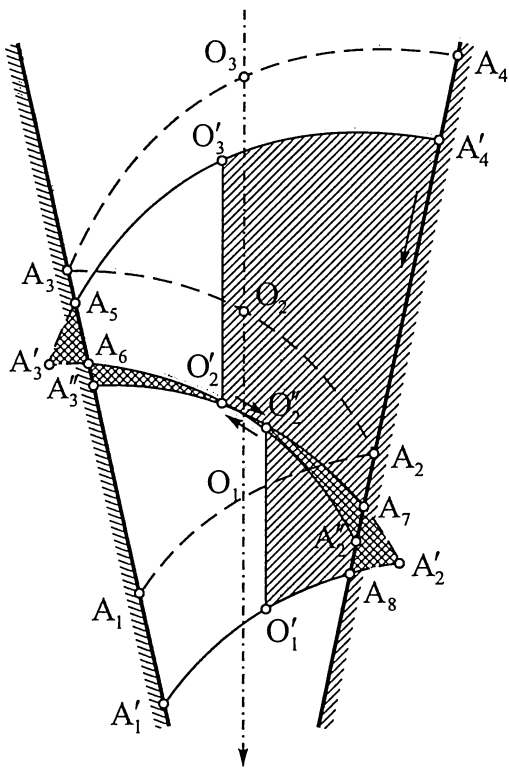


Рис. 7.39

относительных проскальзываний и, следовательно, соответствующих касательных напряжений легко определить по изломам закрашенных вертикальных полос. На рис. 7.39 показаны возможные области „несовместности“ $A_5A_6A'_3$, $A'_3A_6O'_2$ и $A_7A_8A'_2$, $A'_2A_7O'_2$, которые возникли бы при движении блоков $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ как жестких целых. Требования совместности для реальных блоков приведут к тому, что процессе движения эти блоки будут деформироваться, причем с увеличением смещения деформация будет возрастать. Когда она достигнет некоторой критической величины, произойдет локализация сдвигов, блок раздробится на более мелкие новой линией скольжения, и весь процесс повторится снова. Вторичные линии скольжения, вызывающие дробление первоначально сформировавшихся блоков, можно видеть на рис. 7.37.

Выше был рассмотрен механизм деформирования, который приводит к тому, что течение становится нерадиальным и несимметричным. Вид несимметрии зависит от случайных факторов и может меняться от опыта к опыту. Линии скольжения, соответствующие двум различным опытам, либо совпа-

дают, либо симметричны относительно оси симметрии канала. Процессом реализации того или другого вида асимметрии можно управлять, заведомо создавая незначительную асимметрию в условиях деформирования.

В целом процесс деформирования L -пластических материалов носит ярко выраженный „гиперболический“ характер в том смысле, что материал разбивается „характеристиками“ на отдельные блоки, каждый из которых связан только с определенным участком границы. Последнее приводит к тому, что основные перемещения блоков и их проскальзывания определяются непосредственно граничными условиями, а области „несовместности“, возникающие при виртуальных смещениях блоков как жестких целых, определяют их деформации при действительных смещениях. Эти общие обстоятельства играют существенную роль при решении задач полуобратными точными методами и при построении инженерных схем расчета (этот вопрос рассмотрен в главе 8).

Аналогичный механизм деформирования имеет место и в осесимметричных радиальных каналах [51]. Здесь также относительное проскальзывание блоков приводит к тому, что течение существенно отклоняется от симметричного и радиального. При этом появляются тангенциальные составляющие скорости и внешне движение напоминает закручивание жидкости при ее истечении из емкости (рис. 7.40). В описанных экспериментах механизмом деформирования материала можно управлять, меняя шероховатость стенок канала, телесный угол, прикладывая давление на свободной поверхности и т. д.

Следует отметить, что наблюдения подтверждают существование несимметричного режима течения и в натурных условиях. Например, в [271] для расчета бункеров рекоменду-

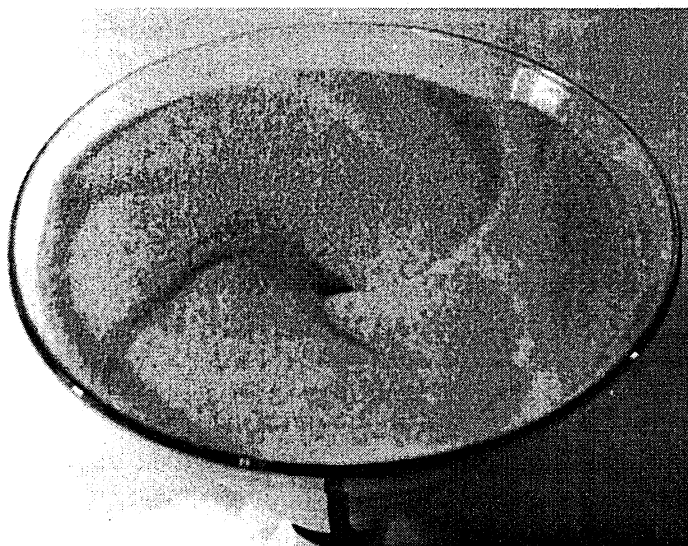


Рис. 7.40

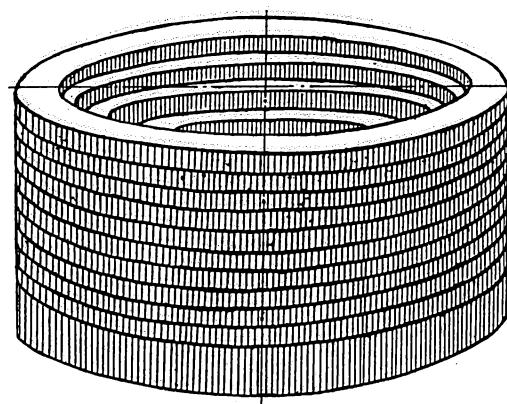


Рис. 7.41

ются формулы, основанные на предположении о том, что материал целиком находится в предельном состоянии и нагрузки симметричны относительно оси симметрии бункера. Вместе с тем отмечается, что возможна значительная асимметрия давления в поперечных сечениях бункера, максимальные величины горизонтального давления могут превосходить теоретические в 2—3 раза.

Можно рассмотреть и ряд других типов осесимметричного базового деформирования. Ограничимся только одним типом чисто сдвиговой осесимметричной деформации. Ее можно реализовать в стенде, показанном на рис. 7.41. Стенд представляет собой набор из 30 тонких пластин толщиной $h = 2$ мм, каждая из которых имеет центральное круговое отверстие с вертикальной боковой поверхностью. Диаметр отверстия в верхней пластине равен 108 мм, в нижней — 5 мм, шаг по диаметру между соседними пластинами — постоянен. Наружная поверхность пластин представляет собой цилиндрическую поверхность с диаметром, равным 133 мм.

Таким образом, вырезы пластин образуют ступенчатую коническую камеру. Камера заполняется порошковым материалом со слабым сцеплением. Нагружение осуществляется путем поворота пластин на определенный угол, который увеличивается на постоянную величину при переходе от одной пластины к другой (реализуется осесимметричная деформация скручивания). Здесь скорости направлены строго вдоль границы, но образец тем не менее деформируется за счет веса и ступенчатой формы границы.

На рис. 7.42 показана картина деформирования свободной поверхности образца (мука). Четко вид-



Рис. 7.42

ны спиральные трещины, которые закручиваются к центру (угол поворота верхней пластины — 120° , нижней — ноль). Есть данные, полученные в результате обработки снимков поверхности Земли из космоса, о том, что подобные структуры формируются и в естественных условиях [272].

В заключение отметим, что во всех рассмотренных ситуациях размеры блоков образуют геометрическую прогрессию (автомодельная структура). Некоторые оценки для нее даны в главе 8.

§ 7.7. НЕКОТОРЫЕ СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАССОВЫХ СИЛ

Выше базовые течения были реализованы путем задания специальных перемещений на границе тела. В принципе их можно создавать и путем задания специальных массовых сил [49, 53]. Рассмотрим один пример. Пусть образец представляет собой горизонтальный слой $0 \leq z \leq h$, расположенный на подложке $z = 0$. Будем подложку смещать в ее плоскости по окружности малого радиуса R . Тогда на каждый элемент слоя станут действовать определенные силы инерции. Если отвлечься от роли боковых стенок, то сразу видно, что напряженно-деформированное состояние слоя может зависеть только от координаты z и от времени t , т. е. зависимости от координат x и y нет. Поэтому такое деформирование можно отнести к базовому.

Масштаб сил инерции определяется величиной $\lambda = R\omega^2$ (ω — угловая скорость вращения диска). В опытах радиус R фиксировался, а скорость вращения ω постепенно увеличивалась. Как и следовало ожидать, при малых λ процесс носит устойчивый характер, а при переходе через критическое значение образуются структурные элементы, показанные на рис. 7.43. Механизм их формирования связан с поверхностной неустойчивостью слоя. Частицы на свободной поверхности вовлекаются в движение в результате сцепления с нижним слоем и бокового воздействия частиц верхнего слоя. При больших силах инерции сцепление преодолевается и частица отстает от движения подложки. В это время она соприкасается с различными частицами подложки и производит их „опрос“ на предмет возможности прилипания. Если материал обладает достаточной слипаемостью, то „опрос“ приводит к образованию комков. На рис. 7.43 показаны комки при испытании каолина

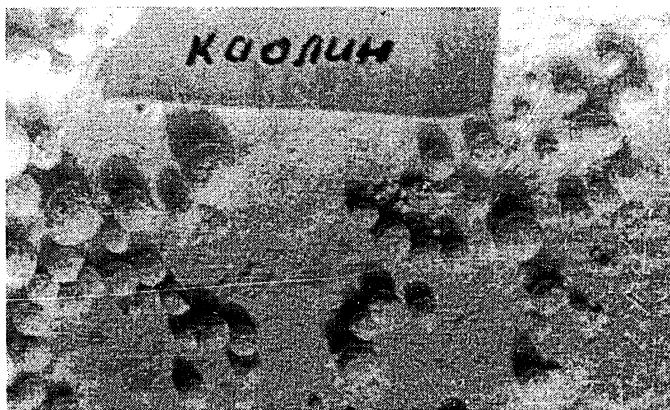


Рис. 7.43

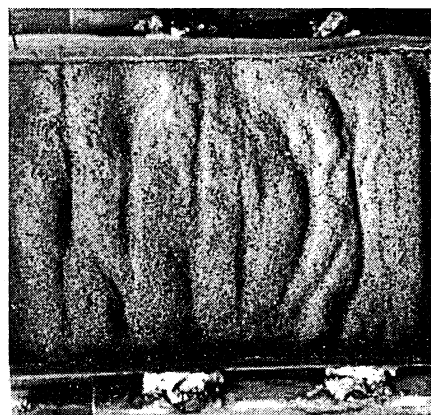


Рис. 7.44

($R = 5$ мм, $\omega = 18,8$ с⁻¹). Видно, что наряду с большими шаровидными образованиями одновременно присутствуют и малые, зародышевые. Время их роста до критических размеров (когда они начинают разрушаться) пропорционально пути качения по подстилающему слою. Сам критический размер определяется силами сцепления частиц, стремящихся удерживать их сферическую форму.

Таким образом, по размерам комков можно судить о склонности материалов к образованию агломератов, а следовательно и к слеживаемости [115]. Все эти показатели зависят от влажности порошка, поэтому ее оценить можно косвенно. В работе [53] приведены данные о средних размерах комков для разных материалов. Обработка результатов несколько осложнялась тем обстоятельством, что процесс формирования комков имеет динамический характер. В процессе формирования они взаимодействуют между собой, разрушаются, затем опять начинают расти и т. д. Поэтому в опытах скорость вращения вначале постепенно увеличивалась до некоторого предела, затем уменьшалась до нуля. После этого проводилась обработка результатов.

В указанном способе направления x , y , так же как и любые другие в этой плоскости, полностью равноправны. Такова специфика нагружения.

Рассмотрим теперь нагружение с выделенным направлением x . Пусть слой материала совершает возвратно-поступательное движение в своей плоскости в направлении x . При определенной частоте здесь также происходит потеря устойчивости и возникает структура с характерным размером вдоль оси x (рис. 7.44, водонасыщенный песок, амплитуда 3 мм, частота 10 Гц).

Еще один пример структуры пространственно-временного типа показан на рис. 7.45. Получена она таким образом. Слой материала постоянной высоты h помещается между двумя параллельными стеклянными стенками 1. Затем слой наклоняется вокруг опоры 2 на угол β так, что его устойчивость сохраняется (от стекания слой удерживается заслонкой 3). После этого заслонка открывается и материал начинает стекать на весоизмерительное устройство 4. Оказывается, что при углах наклона β , меньших критического $\beta^* \approx 33^\circ$, расход материала через сечение 3 близок к постоянному. При $\beta = \beta^*$ процесс приобретает ярко выраженный пульсирующий характер. Материал от слоя отделяется дискретными порциями так, что в целом у процесса появляется характерный масштаб времени. Более подробные данные приведены в [52]. В [52] приведены также данные о циклическом воздействии на слой сыпучего материала за подпорной стенкой. Рассматриваются процессы формирования линий скольжения, их конвективного переноса и как следствие появления длинных периодов на диаграммах напряжений (т. е. формирование временной структуры).

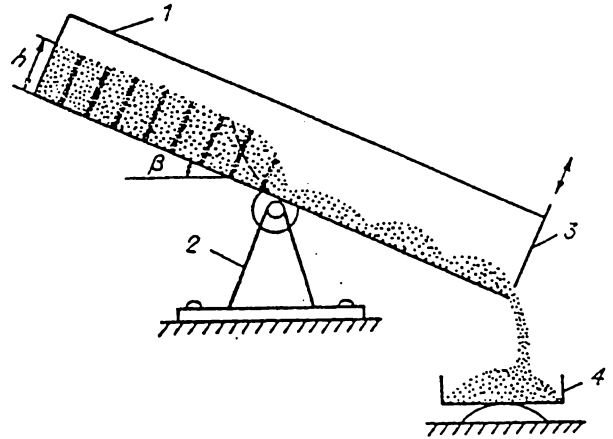


Рис. 7.45

Глава 8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 8.1. НЕЛОКАЛЬНЫЕ МЕРЫ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Пусть имеется некоторое тело. Зададим на его границе перемещения, силы или какие-либо другие условия нагружения. В результате каждая точка тела сместится в новое положение. Здесь есть две принципиально разные возможности: 1) поле перемещений будет таким, что тело испытает только жесткий поворот и перенос; 2) наряду с перемещением тела как жесткого целого произойдет искажение его формы, а в общем случае — изменение объема, т. е. в теле произойдут определенные деформации.

Проблема описания деформаций является одной из основных в механике твердого тела. В настоящее время используются различные определения самого понятия деформаций, их меры и соответствующие механические интерпретации. Все они носят локальный характер. Например, определение нелинейного тензора деформаций Коши—Грина связано с анализом изменения расстояний между парами бесконечно близких точек. Причем эти пары принадлежат окрестности заданной точки. Именно к этой точке и относится соответствующий тензор. Другие определения также носят локальный характер и опираются на исследование кинематики бесконечно малых материальных объемов тела. Если сопоставить теоретические построения с экспериментами, то можно сказать, что в теории все „измерения“ деформаций проводятся на бесконечно малой базе.

В некоторых случаях представляет интерес более общая трактовка этого понятия, а именно: под деформациями будем понимать любые количественные характеристики, которые описывают отличие действительного поля смещений точек тела от множества полей смещений того же тела как жесткого целого. Такой подход допускает нелокальные определения, когда деформации „измеряются“ на конечной базе и их количественные характеристики относятся не к точкам, а ко всему телу в целом [70].

Идея такого подхода появилась при анализе одной конкретной задачи [50] (см. § 7.6). Пусть деформирование тела осуществляется в плоской радиальной матрице. На рис. 8.1 а, б показаны начальная конфигурация тела и конечная. Как оценить деформацию, которую испытало тело в целом при переходе из начальной конфигурации в конечную? Это можно сделать таким образом. Пусть параметр нагружения h — это смещение нижней границы тела. Представим теперь тело абсолютно жестким и дадим ему виртуальное смещение вниз на величину h . Такое смещение приведет к тому что конфигурация тела форме матрицы соответствовать уже не будет. Степень этого несоответствия можно оценить через объем областей несовместимости S_h . В реальном процессе области несовместности существовать не могут. Поэтому реальный процесс можно трактовать как процесс, в котором области несовместности S_h как-то „размазываются“ внутри сходящегося канала.

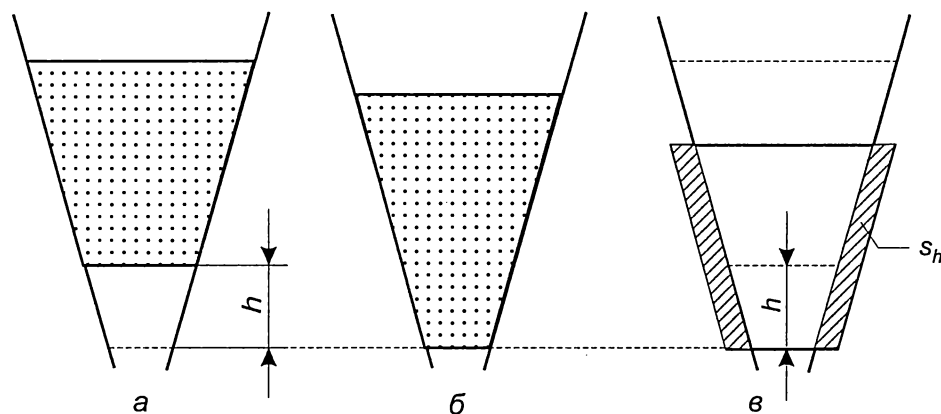


Рис. 8.1

Отсюда следует, что и деформацию тела в целом можно оценить как объем областей несовместности, отнесенный к исходному объему тела, т. е. здесь до решения задачи можно получить интегральные количественные оценки. В [51, 66] этот прием использовался для анализа течения сыпучего материала в условиях локализации сдвигов. Он позволил не только дать качественное описание процесса, но и получить количественные оценки. В главе 3 аналогичный подход используется для описания сложного нагружения.

Попытаемся теперь формализовать этот прием. Обозначим через S исходную конфигурацию тела, через L — его границу. Пусть в результате деформирования область S преобразовалась в S_t , а граница L — в L_t . Введем следующие обозначения: $S^0 = S \cap S_t$, $S^- = S - S^0$, $S^+ = S_t - S^0$ (рис. 8.2). Если не интересоваться внутренним механизмом изменения формы, то с внешней точки зрения можно сказать, что результат процесса деформирования сводится к удалению из области S частей S^- и добавлению частей S^+ . Поэтому по величине объема этих областей, их взаимному расположению и самой форме можно

как-то судить о процессе деформирования тела в целом. Например, в случае, изображенном на рис. 8.2, видно, что в целом тело сжимается вдоль направления AB и растягивается вдоль направления CD .

Здесь возникает одно обстоятельство принципиального характера. Оно связано с тем, что если на новую конфигурацию тела наложить жесткий поворот и перенос, то внутренний процесс деформирования от этого не изменится. Однако области несовместности, их объемы и расположение от этого жесткого смещения зависят и довольно существенно. Поэтому непосредственно способ [66] в общем случае использовать нельзя. Необходимо в указанном множестве ситуаций найти то общее, что не зависит от смещений и поворотов тела как жесткого целого.

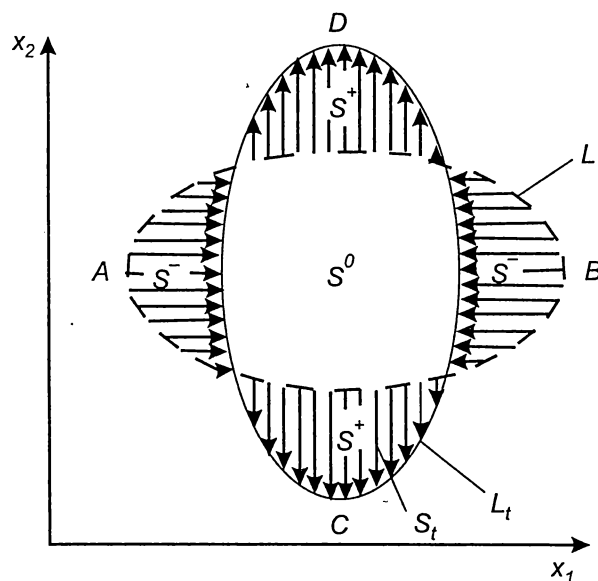


Рис. 8.2

Это можно сделать различными путями. Вначале рассмотрим определения деформаций, которые относятся к точке тела, но могут измеряться на нелокальной базе. Затем перейдем к вариационному определению деформаций. В заключение рассмотрим обобщение вариационного подхода на все тело в целом. Везде для наглядности ограничимся случаем плоской деформации.

1. Интегральные меры деформаций. Итак, пусть есть тело S , ограниченное контуром L . В определенный момент времени в этом теле реализуются перемещения

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad (1.1)$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты материальной точки до деформации, u_1, u_2 — компоненты вектора перемещения \vec{u} . В равенствах (1.1) содержится полная информация о том, что естественно будет назвать деформацией, но есть также и привходящая информация, которая к деформациям никакого отношения не имеет. Ясно, что привходящая информация относится к повороту и смещению тела как единого целого. Задача состоит в том, чтобы выделить ее из равенств (1.1). Поступим следующим образом. Пусть в теле сначала реализуются смещения (1.1). После этого наложим на поле (1.1) жесткий поворот на угол α и сдвиг на вектор $\{C_1, C_2\}$. В результате получим новое поле:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, x_2) &= u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha + x_1(\cos \alpha - 1) - x_2 \sin \alpha + C_1, \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2) &= u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha + x_2(\cos \alpha - 1) + C_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, любое заданное поле перемещений $\{u_1, u_2\}$ порождает бесконечное множество полей перемещений $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$. Элементы множества (1.2) заполняют трехмерное пространство $\{C_1, C_2, \alpha\}$. С точки зрения теории деформаций все они должны быть неразличимыми. Иными словами, требуется найти что-то общее, что присуще каждому из элементов множества (1.2).

Здесь возможны различные подходы. При этом в любом случае необходимо будет дать сравнение с классическими определениями. Поэтому начнем с варианта, который соответствует нелинейному тензору деформации Коши—Грина.

Формулы (1.2) — это формулы векторного проектирования. Длина вектора при повороте остается неизменной. Поэтому, если в (1.2) положить $C_1 = 0, C_2 = 0$, то получим

$$(\tilde{u}_1 + x_1)^2 + (\tilde{u}_2 + x_2)^2 = (u_1 + x_1)^2 + (u_2 + x_2)^2. \quad (1.3)$$

Если квадрат длины обозначить как норму $\|\vec{u} + \vec{r}\|$, где $\vec{r} = \{x_1, x_2\}$ то можно сказать, что все точки множества (1.2), расположенные на оси $C_1 = 0, C_2 = 0$, имеют общий инвариант $\|\vec{u} + \vec{r}\|$.

Теперь задача состоит в том, чтобы из (1.2) исключить постоянные C_1, C_2 , которые входят в равенства аддитивным образом. Для этого можно продифференцировать равенства и таким образом избавиться от постоянных. В результате этой операции вместо двух равенств (1.2) получим четыре равенства ($i, j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tilde{u}_1 + x_1)}{\partial x_i} &= \cos \alpha \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_i} - \sin \alpha \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\tilde{u}_2 + x_2)}{\partial x_j} &= \sin \alpha \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_j} + \cos \alpha \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для равенств (1.4) условие (1.3) дает два инварианта:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_1}\right\|^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_2 + x_2)\right]^2, \\ \left\|\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_2}\right\|^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1 + x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(u_2 + x_2)\right]^2.\end{aligned}$$

В четырех равенствах (1.4) справа фигурирует только один параметр α . Поэтому должен существовать третий инвариант. Так как обе производные $\partial(\bar{u} + \bar{r}) / \partial x_i$ преобразуются по правилам векторного проектирования, то в качестве третьего инварианта можно взять их скалярное произведение

$$\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_2} = \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_2}.$$

Любые другие инварианты, например векторное произведение

$$\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_1} \times \frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_2},$$

будут функциями указанных выше трех инвариантов.

Выбранные выше инварианты сразу приводят к нелинейному тензору деформаций Коши—Грина:

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{11} &= 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 = \left|\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_1}\right|^2 - 1, \\ 2\varepsilon_{22} &= 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 = \left|\frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_2}\right|^2 - 1, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_1} \frac{\partial(\bar{u} + \bar{r})}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Таким образом, тензору деформаций Коши—Грина соответствует процедура исключения аддитивных постоянных с помощью операции дифференцирования. Очевидно, что это не единственный способ исключения постоянных.

Рассмотрим в некотором смысле противоположную процедуру — интегрирование. Поместим начало координат внутрь тела и проинтегрируем первое равенство (1.2) по x_1

$$\int_0^{x_1} (\bar{u} + x_1) dx_1 = \cos \alpha \int_0^{x_1} (u_1 + x_1) dx_1 - \sin \alpha \int_0^{x_1} (u_2 + x_1) dx_1 + C_1 x_1. \quad (1.5)$$

Теперь постоянную C_1 можно исключить очень просто: например, разделить (1.5) на x_1^2 , (1.2) на x_1 и вычесть из одного другое. Поступая так же со вторым равенством (1.2) и интегралами по x_2 , получим четыре соотношения:

$$\tilde{w}_{1i} = \cos \alpha w_{1i} - \sin \alpha w_{2i}, \quad \tilde{w}_{2j} = \sin \alpha w_{1j} + \cos \alpha w_{2j},$$

$$w_{ij} = \frac{2(u_i + x_i)}{x_j} - \frac{2}{x_j^2} \int_0^{x_j} (u_i + x_i) dx_j.$$

Здесь считается, что все отрезки интегрирования принадлежат области определения \bar{u} . Выражения для w_{ij} подобраны так, чтобы аффинному преобразованию

$$u_1 + x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad u_2 + x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

где $a_{ij} = \text{const}$, отвечали условия $w_{ij} = a_{ij}$.

Очевидно, что пары $\{w_{11}, w_{21}\}, \{w_{12}, w_{22}\}$ будут векторами. Значит, в качестве мер деформаций можно использовать объективные характеристики:

$$J_{11} = w_{11}^2 + w_{21}^2, \quad J_{22} = w_{12}^2 + w_{22}^2, \quad J_{12} = w_{11}w_{12} + w_{21}w_{22}.$$

Теперь все готово для обобщения. Пусть L_1, L_2 — линейные операторы, которые любую постоянную C переводят в нуль: $L_i C = 0$. Тогда $L_1(\bar{u} + \bar{r}), L_2(\bar{u} + \bar{r})$ будут векторами и в качестве операторных мер деформаций можно использовать следующие характеристики:

$$\|L_1(\bar{u} + \bar{r})\| = [L_1(u_1 + x_1)]^2 + [L_1(u_2 + x_2)]^2,$$

$$\|L_2(\bar{u} + \bar{r})\| = [L_2(u_1 + x_1)]^2 + [L_2(u_2 + x_2)]^2,$$

$$L_1(\bar{u} + \bar{r})L_2(\bar{u} + \bar{r}) = L_1(u_1 + x_1)L_2(u_1 + x_1) + L_1(u_2 + x_2)L_2(u_2 + x_2).$$

Как отмечалось, нелинейному тензору деформаций Коши—Грина соответствуют операторы $L_i = \partial / \partial x_i$. Для сред с микроструктурой меры деформаций могут строиться на более сложных операторах, например $L_i = \partial / \partial x_i + \lambda \partial^2 / \partial x_i^2$ (λ — параметр размерности длины) и т. д.

2. Вариационное определение деформаций. Итак, любое заданное поле перемещений (1.1) порождает множество полей (1.2). Как отмечалось, для любых мер деформаций все элементы этого множества должны быть неразличимыми. При классическом определении и подходе, рассмотренном в п. 1, вычисляются инвариантные характеристики, свойственные всем элементам множества (1.2). Возможен и совершенно другой подход: не искать инварианты (1.2), а выделить один, в каком-то смысле избранный (базовый), элемент из (1.2). И уже сам этот элемент рассматривать как характеристику процесса деформирования. Требование объективности здесь означает только одно: базовое поле перемещений не должно зависеть от исходного элемента из (1.2). В качестве исходного может выступать как само поле u_1, u_2 , так и любое другое поле из (1.2). Каждый раз базовые смещения должны получаться одними и теми же.

Базовое поле характеризуется тем, что уже не содержит привходящих поворота и смещения тела как жесткого целого. Поэтому для базового поля можно дать объективную процедуру количественных и качественных оценок типа указанных выше (см. рис. 8.2). Таким образом, на этом пути изменение формы тела будут характеризоваться определенным полем перемещений. Такое обстоятельство затрудняет сравнение с известными мерами деформаций, так как последние носят локальный характер. „Мост“ можно перебросить только для случая, когда тело имеет достаточно малые размеры, т. е. представляет собой малую окрестность некоторой точки (x_1^0, x_2^0) .

Итак, пусть для такого тела задано поле смещений (1.1). Смещения характеризуют „склонность точек тела к перемене мест“. Если тело является жестким, то выбором постоянных C_1, C_2 и α можно добиться, чтобы смещения стали равными нулю: $\tilde{u}_i \equiv 0$. Если тело деформируется, то этого сделать невозможно.

Естественно в качестве базовой выбрать такую ситуацию, когда „склонность к перемене мест“ точек тела будет наименьшей.

Возьмем угол α таким, чтобы поле $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2(x_1, x_2)$ было как можно ближе к постоянному. Тогда выбором констант C_i его можно приблизить к нулю. У нас нет никаких оснований отдавать предпочтение ни одной из координат x_1, x_2 . Поэтому примем максимально простую и симметричную норму:

$$\Pi = \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right)^2 \xrightarrow{\alpha} \min. \quad (2.1)$$

Условие $\partial \Pi / \partial \alpha = 0$ приводит к результату

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{u_{21} - u_{12}}{u_{11} + u_{22} + 2}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} &= \frac{(1 + u_{11})(2 + u_{11} + u_{22}) + u_{21}(u_{21} - u_{12})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} - 1, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} &= \frac{u_{12}(2 + u_{11} + u_{22}) + (1 + u_{22})(u_{21} - u_{12})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} = \\ &= \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} = \frac{-(1 + u_{11})(u_{21} - u_{12}) + u_{21}(2 + u_{11} + u_{22})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} &= \frac{-u_{12}(u_{21} - u_{12}) + (1 + u_{22})(2 + u_{11} + u_{22})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} - 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $u_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$. Само базовое поле смещений имеет вид

$$\tilde{u}_i = \frac{\partial \tilde{u}_i(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_j} x_j.$$

Компоненты (2.3) образуют симметричный тензор второго ранга. В обозначениях [273, с. 90] они совпадают с компонентами тензора $(G_{ij}^{x_{1/2}} - \delta_{ij})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Здесь необходимо подчеркнуть одно обстоятельство. Для тензоров конечных деформаций определенную трудность представляет механическая интерпретация их компонент. Причем если для компонент малых деформаций

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

проблем нет, то для нелинейных тензоров больших деформаций все существенно осложняется. Можно поставить вопрос: существует ли тензор конечных деформаций, компоненты которого имеют в точности такой же механический смысл, что и компоненты тензора бесконечно малых деформаций? Равенства (2.3) отвечают на этот вопрос положительно: такой тензор существует и единствен. В этом смысле тензор (2.3) имеет определенное преимущество перед остальными тензорами конечных деформаций. Кроме того, тензор (2.3) удовлетворяет вариационному принципу (2.1). Последнее обстоятельство позволяет перейти к нелокальным обобщениям. Здесь удобно ввести понятие эталонного тела.

3. Метод эталонных полей. Пусть эталонное тело имеет ту же форму, что и исследуемое тело до деформации, но является абсолютно жестким. Поле смещений реального тела имеет вид (1.1), а эталонного

$$u_1^0 = x_1(\cos \beta - 1) - x_2 \sin \beta + B_1, \quad u_2 = x_1 \sin \beta + x_2(\cos \beta - 1) + B_2, \quad (3.1)$$

($\beta, B_1, B_2 = \text{const}$). Поставим вопрос, при каких значениях постоянных β, B_i поле смещений эталонного тела будет наиболее близким к полю действительных смещений (1.1)? Поскольку речь идет о близости двух векторных полей, то необходимо ввести норму для ее оценки. Естественнo взять такую норму, которая при уменьшении размеров тела до окрестности точки (x_1^0, x_2^0) фактически переходит в норму (2.1). Этому требованию удовлетворяет следующая норма (которая, кстати, является самой простой):

$$\int_S \int [(u_i - u_i^0)^2 + (u^2 - u_2^0)^2] dS \rightarrow \min. \quad (3.2)$$

Здесь S — область, занятая телом до деформации, т. е. область определения функций (1.1), (3.1). Ограничимся случаем, когда эта область конечна, так что все интегралы существуют и конечны.

Все выкладки упрощаются, если начало координат поместить в центр тяжести тела, а координатные оси направить вдоль главных осей сечения:

$$\int_S \int x dS = 0, \quad \int_S \int y dS = 0, \quad J_{xy} = \int_S \int xy dS = 0.$$

Подставляя (3.1) в (3.2) и приравнивая нулю производные по B_1, B_2 и β , получим

$$B_1 = \frac{1}{S} \int_S \int u_1(x_1, x_2) dS, \quad B_2 = \frac{1}{S} \int_S \int u_2(x_1, x_2) dS, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\int_S \int (x_1 u_2 - x_2 u_1) dS}{\int_S \int (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_1^2 + x_2^2) dS} = - \frac{\int_S \int \bar{u} \times \bar{r} dS}{\int_S \int (\bar{u} + \bar{r}) \bar{r} dS},$$

где S — площадь сечения. Таким образом, для определения базовых смещений от исходных равенств (1.1) необходимо перейти к (1.2), положив $C_i = -B_i$ и $\alpha = -\beta$. Поле смеще-

ний $\{u_1, u_2\}$ является базовым, если для него все интегралы (3.3) равны нулю. При локальном подходе неважно, оперируем ли значениями смещений во всей окрестности точки (x_1^0, x_2^0) или смещениями только на ее границе (локально гладкое поле смещений всегда является аффинным). При нелокальном подходе это уже не так. Однако все построения легко провести и для случая, когда можно оперировать значениями перемещений только на границе. Здесь норму (3.2) можно заменить на следующую:

$$\int_L [(u_1 - u_1^0)^2 + (u_2 - u_2^0)^2] dl \rightarrow \min, \quad (3.4)$$

(L — граница, l — ее элемент). Если оси координат выбрать так, чтобы

$$\int_L x_1 dl = 0, \quad \int_L x_2 dl = 0, \quad \int_L x_1 x_2 dl = 0, \quad (3.5)$$

то

$$B_1 = \frac{1}{L} \int_L u_1 dl, \quad B_2 = \frac{1}{L} \int_L u_2 dl, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\int_L (x_1 u_2 - x_2 u_1) dl}{\int_L (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_1^2 + x_2^2) dl} = - \frac{\int_L \bar{u} \times \bar{r} dl}{\int_L (\bar{u} + \bar{r}) \bar{r} dl},$$

где $L < \infty$ — длина границы. Сопоставим теперь полученные глобальные формулы с локальными. Для этого предположим, что область S стягивается к точке (x_1^0, x_2^0) . Тогда формулы (3.3), (3.6) дают

$$B_1 = u_1(x_1^0, x_2^0), \quad B_2 = u_2(x_1^0, x_2^0), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{u_{21} - u_{12}}{2 + u_{11} + u_{22}}. \quad (3.7)$$

При выводе (3.7) использовалось ограничение на закон стягивания к точке (x_1^0, x_2^0) : в случае (3.3)

$$\int_S x_1^2 dS \equiv \int_S x_2^2 dS,$$

в случае (3.6)

$$\int_L x_1^2 dl \equiv \int_L x_2^2 dl.$$

Нетрудно показать, что результат (3.7) соответствует принципу

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\{ \frac{\partial(u_i - u_i^0)}{\partial x_j} \right\}^2 \rightarrow \min,$$

т. е. фактически совпадает с (2.1). Таким образом, базовому полю смещений, построенному на основе нелокальных формул (3.3) или (3.6), соответствует нелинейный тензор конечных деформаций (2.3). Введение понятия эталонного тела позволяет сделать еще один

шаг в определении нелокальных мер деформаций. Норма (3.4) использовалась для того, чтобы понять, какой жесткий поворот и перенос содержатся в исходном поле перемещений. Поэтому поле смещений эталонного тела можно рассматривать как аппроксимацию действительного поля в классе (3.1) по норме (3.4), или, иными словами, формулы (3.3), (3.6) позволяют выделить из (1.1) жесткий поворот и перенос. Но ничто не мешает сделать следующий шаг и таким же образом выделить общую аффинную деформацию. Пусть эталонное тело совпадает с исходным телом до деформации и может испытывать произвольную однородную аффинную деформацию

$$u_1^* = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + A_1, \quad u_2^* = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + A_2, \quad (3.8)$$

где u_i^* — компоненты смещений эталонного тела; b_{ij} , A_i — произвольные постоянные. Постоянные в (3.8) подберем так, чтобы поле (3.8) было как можно ближе к заданному полю (1.1). Если принять норму

$$\int_S [(u_1 - u_1^*)^2 + (u_2 - u_2^*)^2] dS \rightarrow \min,$$

то придем к следующему результату: наиболее близким к полю (1.1) в классе аффинных полей (3.8) является поле

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\int_S u_1 x_1 dS}{\int_S x_1^2 dS} x_1 + \frac{\int_S u_1 x_2 dS}{\int_S x_2^2 dS} x_2 + \frac{\int_S u_1 dS}{S}, \\ u_2^* &= \frac{\int_S u_2 x_1 dS}{\int_S x_1^2 dS} x_1 + \frac{\int_S u_2 x_2 dS}{\int_S x_2^2 dS} x_2 + \frac{\int_S u_2 dS}{S}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь, как и прежде, начало координат в центре тяжести сечения; $0x_1, 0x_2$ — главные оси сечения S . Аналогично можно поступить, если задана только информация о смещениях на контуре. Пусть

$$\int_L [(u_1 - u_1^*)^2 + (u_2 - u_2^*)^2] dl \rightarrow \min.$$

Тогда наиболее близким к исходному будет поле

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\int_L u_1 x_1 dl}{\int_L x_1^2 dl} x_1 + \frac{\int_L u_1 x_2 dl}{\int_L x_2^2 dl} x_2 + \frac{\int_L u_1 dl}{L}, \\ u_2^* &= \frac{\int_L u_2 x_1 dl}{\int_L x_1^2 dl} x_1 + \frac{\int_L u_2 x_2 dl}{\int_L x_2^2 dl} x_2 + \frac{\int_L u_2 dl}{L}. \end{aligned}$$

Начало координат и оси выбраны так, чтобы выполнялись равенства (3.5). Отметим, что теперь перенос и поворот тела как жесткого можно определить двумя путями: непосред-

венно по формуле (3.3), (3.6) либо вначале путем выделения общего аффинного преобразования (3.9), (3.10) и затем уже выделением из него поворота и переноса по формулам (3.3), (3.6). Нетрудно показать, что в обоих случаях получим один и тот же результат, т. е. в рамках сделанных построений эти операции перестановочны.

Таким образом, из действительного и в общем случае нелинейного поля смещений можно выделить жесткий поворот, перенос и, кроме того, определенное аффинное преобразование. Последнее обстоятельство позволяет проследить еще одну связь между локальным и нелокальным подходами к понятию деформаций. Действительно, локально любое преобразование можно рассматривать как аффинное. Поэтому если известно, что аффинному преобразованию подвержено все тело, то условие малости элементарного объема для определения компонент деформаций становится излишним. В этом случае тензор можно отнести ко всему телу в целом.

Формулы (3.9), (3.10) позволяют получить такой же результат и в общем случае. Здесь для определения тензора можно использовать любые локальные формулы конечных деформаций. Например формулы (2.3), где необходимо сделать замену

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\int_S u_i x_j dS}{\int_S x_j^2}.$$

При решении ряда задач описанные подходы удобны не только для получения интегральных оценок [2, 66], но и для формулировки определяющих уравнений [29—31].

§ 8.2. ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Свойство локализации играло основополагающую роль на первых этапах развития механики грунтов. В частности, предельное условие сухого трения было введено Кулоном для поверхностей локализации и имело смысл только на этих поверхностях. Затем Кеттер ввел гипотезу о выполнении предельного условия Кулона в каждой точке деформируемой массы. Эта гипотеза дала толчок к новым постановкам и решениям задач в механике грунтов. В настоящее время в механике грунтов развиваются оба направления [189]. Причем результаты, полученные в рамках первого направления, считаются приближенными, инженерными, а результаты, полученные в рамках гипотезы Кеттера, — точными. Следует, однако, отметить, что в данном случае имеется в виду точность не в смысле более адекватного описания реальных процессов, а в смысле методов решения поставлен математической задачи. Приближенность результатов первого направления связана не с его основами, а с тем фактом, что в рамках этого направления обычно не рассматривается деформирование материала вне поверхностей локализации, а сами поверхности с некоторым произволом предполагаются заранее известными. В то же время в рамках моделей, основанных на гипотезе Кеттера, математическая задача решается обычно без введения дополнительных гипотез, и поэтому методы решения и результаты считаются точными. Если же понятию точности придавать смысл степени адекватности описания реальных процессов, то в некоторых случаях приближенные решения первого направления могут оказаться гораздо более точными, чем точные решения второго направления. Кроме того, в рамках

первого направления можно часть дополнительных гипотез снять, и тогда точность результатов обоих направлений будет сравнима и в смысле строгости используемых математических методов.

Основная причина, по которой противопоставление этих направлений в общем случае некорректно, связана с тем, что в их рамках описывая различные стадии деформирования материала: кулоновское направление по существу, представляет собой совокупность инженерных методов решения задач локализации, кеттеровское же направление относится ко второй, пластической стадии деформирования, когда некоторые предельные условия выполняются в каждой точке деформируемой области.

В металлах факты локализации выражены не так отчетливо, как в грунтах, и поэтому направление, аналогичное кулоновскому, в теории пластичности практически не развивалось. Математическая теория пластичности с момента своего возникновения стала развиваться по второму пути, основанному на гипотезе о выполнении некоторого условия пластичности в каждой точке деформируемой среды.

Вместе с тем существует достаточно много экспериментальных фактов по локализации сдвиговых деформаций в металлах. Эти данные показывают, что стадия локализации играет существенную роль для металлов, и поэтому направление, аналогичное кулоновскому направлению в механике грунтов, должно развиваться и в теории пластичности. Ниже рассмотрены постановки задач, частично восстанавливающие указанный пробел [61].

1. Построение математических моделей деформируемой среды сводится обычно к описанию связей тензоров напряжений и (скоростей) деформаций. Такой подход основан на двух гипотезах: 1) среда предполагается сплошной; 2) при построении модели любой бесконечно малый объем среды наделяется свойствами макрообразца, если последний деформируется при некоторых граничных условиях, допускающих однородное распределение напряжений. Так, если образец деформируется упруго, то предполагается что и каждый элементарный объем его деформируется упруго. Это предположение позволяет описание упругости свести к описанию упругого поведения элементарного объема. По аналогии правомерность такого перехода предполагается и при исследовании пластического поведения. Поэтому, как и в теории упругости, задача построения пластической модели сводится к описанию пластического поведения элементарного объема сплошной среды.

Можно, однако, указать класс материалов, для которых гипотеза тождественности свойств образца и его элементарного объема не выполняется даже приближенно. Действительно, пусть некоторый образец при определенных нагрузках обнаруживает пластические свойства. Возможна ситуация, когда при указанных нагрузках образец разбивается дискретными поверхностями скольжения на отдельные части (блоки). В этом случае пластические свойства образца в целом связаны не только с неупругими деформациями блоков, но и с их относительными проскальзываниями друг по другу. Если блоки деформируются упруго, то пластические свойства образца зависят только от их относительных проскальзываний.

Таким образом, в общем случае можно выделить три стадии деформирования материала: 1) упругое деформирование, 2) пластическое деформирование, 3) деформирование в условиях локализации сдвигов. Деформирование материала на третьей стадии будем называть L -пластическим.

Естественно, что для определенных материалов некоторые из указанных стадий могут отсутствовать. Кроме того, реализация той или иной стадии зависит от конкретных условий нагружения.

Методы теоретического анализа упругого и пластического деформирования базируются на двух указанных выше гипотезах и близки в том смысле, что в обоих случаях построение модели сводится к описанию связей напряжений и (скоростей) деформаций, характеризующих состояние элементарного объема. Для L -пластической стадии деформирования переход к элементарному объему невозможен, и поэтому при описании L -пластичности возникают новые задачи: формулировка критерия появления поверхностей скольжения, определение связи между проскальзыванием размерности длины по поверхности скольжения и соответствующими напряжениями, описание свойств материала, от которых может зависеть расстояние между поверхностями скольжения и т. д. Эксперименты с различными грунтами, сыпучими телами, горными породами, металлами и пр. показывают, что во многих случаях эти материалы ведут себя как L -пластические, т. е. при достаточных напряжениях материалы удовлетворяют накладываемым граничным условиям не только путем появления пластических областей, но и скольжением по отдельным поверхностям.

Стадия деформирования в условиях локализации сдвигов тесно связана с разрушением. Разрушение можно условно считать последней, четвертой стадией деформирования материала. Под разрушением понимается процесс разделения материала на части, который вследствие исчерпания взаимодействия по соответствующим поверхностям существенно влияет на функциональные черты материала (конструкции). L -пластическая стадия означает локализацию деформации в условиях, когда на поверхностях локализации существуют достаточные силы взаимодействия и в целом материал (конструкция) не меняет своих функциональных признаков.

Таким образом, существует широкий класс задач, в которых L -пластическая стадия деформирования играет существенную роль и должна учитываться при теоретических расчетах; L -пластические постановки обходимы в задачах об одноосном и многоосном сжатии, вдавливании штампа, внедрении клина, опрокидывании свай и подпорных стен, в задачах о движении материалов в сходящихся каналах (§ 7.6), деформировании горных пород вокруг выработок, задачах обработки металлов и порошков давлением и т. д.

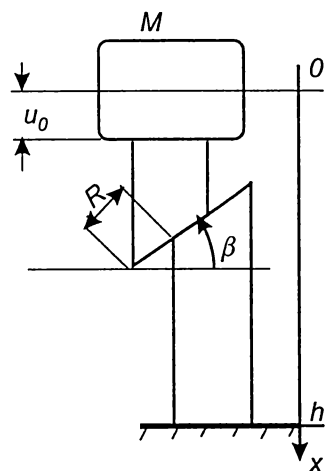


Рис. 8.3

Из определения следует, что модели L -пластичности примыкают к классу моделей разрушения, в которых учитывается взаимодействие между берегами трещины [274—276].

Рассмотрим некоторые постановки краевых задач L -пластичности в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния. Решение краевых задач можно свести к отысканию разрывных функций, доставляющих экстремум определенным функционалам, которые зависят как от поведения функции в областях гладкости, так и от величин из разрывов.

2. Такой подход можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть упругий образец в условиях плоской деформации сжимается тяжелым телом M (рис. 8.3). Высота образца h , ширина равна l , смещение в точке $x = h$ отсутствует, в точке

$x=0$ равно u^0 . Предположим, что при некоторых граничных условиях в образце появляется одна линия скольжения с углом наклона $(\pi/2 - \beta)$ к оси образца. Обозначим через R величину проскальзывания по линии. Тогда общее смещение точки $x=0$ складывается из двух частей: смещения u_e вследствие упругих деформаций образца и смещения $R \sin \beta$ вследствие проскальзывания, т. е.

$$u^0 = u_e + R \sin \beta. \quad (2.1)$$

Предположим, что диссипация энергии U на единице длины линии скольжения зависит только от величины проскальзывания R . При активном нагружении, если пренебречь тепловыми эффектами, диссипацию $U(R)$ можно условно считать „потенциальной“ энергией тела, запасенной на линии разрыва. Тогда общая потенциальная энергия системы образец — тяжелое тело имеет вид

$$W = Mg[h - (u_e + R \sin \beta)] + \frac{lU(R)}{\cos \beta} + \frac{1}{2} \frac{l}{R} \frac{E}{1-\nu^2} (u_e)^2, \quad (2.2)$$

где Mg — вес тела; E, ν — упругие постоянные. Энергия W представляет собой функцию двух переменных: u_e и R . Предположим, что из всевозможных значений u_e, R действительными будут те, которые доставляют энергии W минимум. В дальнейшем на переменные u_e, R будем накладывать условие (2.1), где величина u^0 (параметр нагружения) задана. Требование стационарности выражения (2.2) приводит к конечному уравнению относительно R

$$U_R(R) = -\frac{\lambda}{h} R + \frac{\lambda}{h \sin \beta} u^0, \quad (2.3)$$

где $\lambda = \frac{E}{1-\nu^2} \sin^2 \beta \cos \beta > 0$. Выражение для второй вариации показывает, что равновесие

(2.3) будет устойчивым при $U_{RR} \gg -\lambda/h$ и неустойчивым или безразличным в остальных случаях. Производная U_R имеет смысл касательного напряжения на линии скольжения (рис. 8.5). Условие, связывающее касательное напряжение с проскальзыванием размерности длины, вводилось в работе [275], а при обобщении континуальных моде-

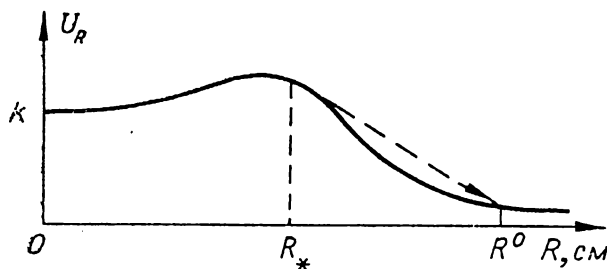


Рис. 8.4

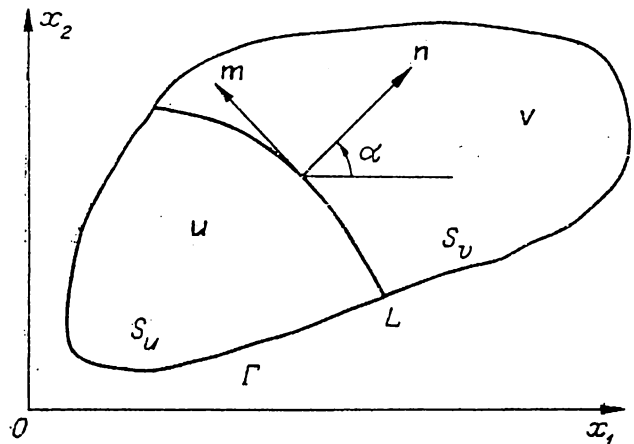


Рис. 8.5

лей [19, 20] — в работе [22]. Решение уравнения (2.3) удобно исследовать графически на плоскости (U_R, R) . Пусть параметр нагружения монотонно увеличивается от нуля. Тогда при $0 \leq u^0 < u_1$ сдвиги по линии скольжения отсутствуют и весь образец деформируется целиком упруго. При дальнейшем нагружении $u_1 \leq u^0 < u_2$ линия скольжения начинают функционировать и проскальзывания монотонно увеличиваются от 0 до R^* (см. рис. 8.4). Деформирование образца на этом этапе устойчиво. В дальнейшем возможно два существенно различных режима деформирования. Если для заданных упругих свойств образца и диаграммы „напряжение-проскальзывание“ длина образца меньше некоторой критической ($h < -\lambda/U_{RR}$), то деформирование на падающей ветви будет устойчивым, т. е. при $u > u_2$ проскальзывание R будет монотонно увеличиваться, причем малому увеличению параметра нагружения будет соответствовать малое увеличение проскальзывания R . Для достаточно длинного образца (или достаточно крутой падающей ветви, если длина образца и его упругие характеристики фиксированы) устойчивость процесса деформирования нарушится и величина проскальзывания изменится скачком от R^* до некоторого значения R^0 . Возможны также ситуации, когда на одних участках падающей ветви деформирование устойчиво, на других — неустойчиво. Все параметры u_1, u_2, R^*, R^0 можно определить из уравнения (2.3).

Рассмотрим механический смысл неустойчивости. На падающей ветви одновременно происходит два процесса: диссипация энергии на линии скольжения и уменьшение потенциальной упругой энергии материала вне линии. Если освобождается энергии меньше, чем диссипируется, то процесс деформирования устойчив и может продолжаться только при подводе энергии извне. Если же освобождается энергии больше, чем диссипируется, то деформирование неустойчиво и проскальзывания увеличиваются за счет внутренних ресурсов материала. При этом часть энергии переходит в кинетическую. Аналогичные эффекты имеют место и в континуальной модели [22] (см. § 4.3). В принципе реализация подобного эксперимента с контролируемыми смещениями на границе позволит определить диаграмму $U(R)$.

Отметим, что все рассмотренные выводы следуют из принятого вариационного принципа и могли быть получены прямыми методами минимизации энергии W . Таким образом применение вариационного принципа позволяет определить момент, при котором по линии скольжения начинаются сдвиги, решить задачу об устойчивом развитии линии скольжения, определить параметры нагружения, при которых начинается неустойчивое развитие, вычислить часть упругой энергии, которая переходит в кинетическую при неустойчивом процессе, и рассмотреть дальнейшее деформирование, когда скольжение опять переходит в устойчивый режим. указанные возможности сохраняются и в общей ситуации плоского и пространственного деформирования.

3. Рассмотрим плоское деформирование L -пластического материала. Пусть L — линия возможного разрыва, \bar{n}, \bar{m} — нормальный и касательный к линии векторы, α — угол между вектором \bar{n} и осью Ox_1 . Обозначим через u_1, u_2, v_1, v_2 компоненты вектора смещений в областях S_u, S_v (рис. 8.5). На линии L нормальная компонента смещений непрерывна

$$(v_1 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - u_2) \sin \alpha = 0, \quad (3.1)$$

а касательная может испытывать разрыв R

$$R = -(v_1 - u_1) \sin \alpha + (v_2 - u_2) \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Величину разрыва будем называть проскальзыванием. Предположим, что диссипация энергии и U на единице длины линии скольжения зависит только от величины проскальзывания (3.2) и координат: $U = U(R, x_1, x_2)$. Обозначим через $F(u_i, p_{ij}, x_i)$, $F(v_i, q_{ij}, x_i)$ потенциальную энергию единицы „объема“ материала вне линий скольжения. Здесь $i, j = 1, 2$; $p_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$; $q_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$, $F_{p_{12}} \equiv F_{p_{21}}$, $F_{q_{12}} \equiv F_{q_{21}}$. Пусть на некоторых участках Γ_u , Γ_v внешнего контура областей S_u , S_v задан вектор напряжений $\{X_i\}$ как функция граничных смещений, причем существует потенциал $\Phi(u_1, u_2)$: $d\Phi = X_1(u_1, u_2) du_1 + X_2(u_1, u_2) du_2$. Аналогичное условие выполняется и на Γ_v . Случай, когда функции $X_i(u_j)$ сводятся к постоянным, соответствует заданным граничным напряжениям. Тогда полная „потенциальная“ энергия системы имеет вид

$$\begin{aligned} W = \int_{S_u} F(u_i, p_{ij}, x_i) ds + \int_{S_v} F(v_i, q_{ij}, x_i) ds + \int_L U(R, x_i) dl - \\ - \int_{\Gamma_u} \Phi(u_i) dl - \int_{\Gamma_v} \Phi(v_i) dl. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если линий возможного скольжения несколько, то в (3.3) должны стоять соответствующие суммы. В общем случае результаты аналогичны. Выражение (3.3) представляет собой функционал относительно линии возможного разрыва L и поля перемещений. Предположим сначала, что линия L известна из дополнительных соображений и не варьируется. Введем следующий вариационный принцип: из всех кинематически возможных полей смещений, удовлетворяющих условию непрерывности (3.1) и граничным условиям относительно перемещений, действительным будет то, которое доставляет минимум функционалу W . Необходимое условие минимальности приводит к следующим уравнениям в областях S_u , S_v :

$$F_{u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \{F_{p_{ij}}\} = 0_i, \quad F_{v_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \{F_{q_{ij}}\} = 0_i, \quad (3.4)$$

граничным условиям на Γ_u , Γ_v

$$\begin{aligned} F_{p_{i1}} \cos \psi + F_{p_{i2}} \sin \psi &= X_i(u_1, u_2), \\ F_{q_{i1}} \cos \psi + F_{q_{i2}} \sin \psi &= X_i(v_1, v_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и условиям на линии возможного разрыва

$$F_{p_{11}} \cos \alpha + F_{p_{12}} \sin \alpha = F_{q_{11}} \cos \alpha + F_{q_{12}} \sin \alpha = \Sigma_i, \quad (3.6)$$

$$-\sin \alpha \Sigma_1 + \cos \alpha \Sigma_2 = U_R, \quad (3.7)$$

где фигурные скобки означают полную производную; индекс в правой части (3.4) показывает, что суммирование проводится только по некому индексу j ; ψ — угол между нормалью к внешнему контуру и осью Ox_1 . Уравнения (3.4) представляют собой уравнения равновесия в перемещениях, (3.5) — граничные условия для напряжений, (3.6) — условия непрерывности касательной и нормальной к линии L компонент тензора напряжений. Слева в условии (3.7) стоит предел касательного напряжения в областях S_u , S_v при под-

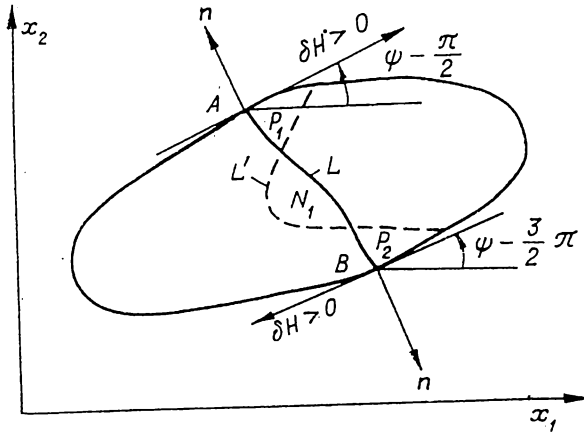


Рис. 8.6

ходе к линии L , справа — касательное напряжение $U_R = T$, которое развивается на линии вследствие проскальзывания R .

Таким образом, минимизация функционала W при условии непрерывности нормального смещения приводит к замкнутой системе уравнений, естественным граничным условиям и естественным условиям непрерывности на линии возможного скольжения. Полученные следствия подтверждают применимость введенного вариационного принципа.

Рассмотренная выше постановка является по существу полуобратной, так как линии возможного скольжения предполагаются известными

либо из экспериментальных данных, либо из условий симметрии, либо из дополнительных соображений. В точной постановке линии должны определяться в процессе решения задачи. Если линия заранее не фиксируется, то полная „потенциальная“ энергия W представляет собой функционал относительно поля перемещений и линии возможного разрыва. Минимум функционала, который достигается на поле перемещений (3, 4), представляет собой функционал относительно линии возможного скольжения. Естественно рассмотреть такие линии, которые доставляют полной потенциальной энергии наиболее глубокий минимум. В этом случае задача сводится к отысканию минимума функционала W в условиях, когда допускаются вариации как поля перемещений, так и положения линии скольжения.

Пусть $x_i = x_i(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ — параметрические уравнения кривой L , $a = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}$. Символом δ обозначим вариации функций при фиксированных аргументах, символом $\bar{\delta}$ — вариации при условии, что аргументы также варьируются. Вариации самих аргументов обозначим через $\bar{\delta}x_i$. Варьированную линию L' будем считать близкой к L в смысле близости первого порядка ($\bar{\delta}x_i < 1$, $\bar{\delta}x'_i < 1$). Через S'_u и S'_v обозначим варьированные области S_u , S_v . Каждое из пересечений $(S'_u \cap S'_v)$, $(S'_v \cap S'_u)$ распадается на ряд односвязных областей P_k , N_k (рис. 8.6). Из вариации δW выделим суммы двойных интегралов по областям P_k , N_k и преобразуем их к виду

$$\sum_k \int_{P_k} [F(u_i \dots) - F(v_i \dots)] ds + \sum_k \int_{N_k} [F(v_i \dots) - F(u_i \dots)] ds = \\ = \int_{t_1}^{t_2} Q(\cos \alpha \bar{\delta}x_1 + \sin \alpha \bar{\delta}x_2) a(t) dt,$$

где $Q = F(u_i \dots) - F(v_i \dots)$. Рассмотрим ограничения на линии возможного скольжения. Условие сплошности (3.1) приводит к одной связи на вариации

$$(\bar{\delta}v_1 - \bar{\delta}u_1) \cos \alpha + (\bar{\delta}v_2 - \bar{\delta}u_2) \sin \alpha + R \bar{\delta}\alpha = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\bar{\delta} \alpha = \frac{x'_1 \bar{\delta} x'_2 - x'_2 \bar{\delta} x'_1}{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}.$$

Причем

$$\bar{\delta} u_i = \delta u_i = p_{ir} \bar{\delta} x_r, \quad \bar{\delta} v_i = \delta v_i + q_{ir} \bar{\delta} x_r, \quad (3.9)$$

где значения всех функций можно брать на L . Уравнения (3.8), (3.9) совместно с уравнением

$$(\bar{\delta} v_1 - \bar{\delta} u_1) \sin \alpha + (\bar{\delta} v_2 - \bar{\delta} u_2) \cos \alpha = \bar{\delta} R$$

образуют замкнутую систему относительно разностей $(\delta v_i - \delta u_i)$. Преобразуем криволинейный интеграл по L в обыкновенный определенный интеграл. Тогда W можно рассматривать как функционал относительно $v_i(x_j)$, $u_i(x_j)$ и $x_i(t)$. Причем вне линии скольжения все вариации δu_i , δv_i независимы, а на линии связаны одним условием (3.8). Следовательно, из шести вариаций δu_i , δv_i , $\bar{\delta} x_i$ независимыми на линии будут только пять. В качестве независимых удобно выбрать следующие вариации: $(\delta u_i + \delta v_i)$, $\bar{\delta} x_i$ и $\bar{\delta} R$. Опуская дальнейшие выкладки, приведем окончательные результаты. Экстремум полной потенциальной энергии достигается, если разрывное поле перемещений удовлетворяет соотношениям (3.4)—(3.7), а линии разрыва — уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{adt} (\Sigma_n R \cos \alpha + U \sin \alpha) + U_{x_1} + Q \cos \alpha + \Lambda_1 &= 0, \\ \frac{d}{adt} (\Sigma_n R \sin \alpha - U \cos \alpha) + U_{x_2} + Q \sin \alpha + \Lambda_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \Sigma_1 \cos \alpha + \Sigma_2 \sin \alpha; \quad \Lambda_1 = (q_{11} - p_{11}) \Sigma_1 + (q_{21} - p_{21}) \Sigma_2, \\ \Lambda_2 &= (q_{12} - p_{12}) \Sigma_1 + (q_{22} - p_{22}) \Sigma_2. \end{aligned}$$

Уравнения (3.10) получены в результате приравнивания нулю коэффициентов при вариациях $\bar{\delta} x_1$, $\bar{\delta} x_2$. Так как обе вариации при $t_1 < t < t_2$ считаются независимыми, то в (3.10) должна содержаться информация и о варьировании линии разрыва вдоль себя. Естественно, что при таком варьировании никаких условий на L получиться не должно. Действительно, систему (3.10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{adt} (R \Sigma_n) + U \frac{d\alpha}{a dt} + U_{x_1} \cos \alpha + U_{x_2} \sin \alpha + Q + \Lambda_1 \cos \alpha + \Lambda_2 \sin \alpha &= 0, \\ -d \frac{U}{a dt} + R \Sigma_n \frac{d\alpha}{a dt} - U_{x_1} \sin \alpha + U_{x_2} \cos \alpha - \Lambda_1 \sin \alpha + \Lambda_2 \cos \alpha &\equiv 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

причем непосредственной проверкой можно показать, что последнее равенство выполняется тождественно.

Рассмотрим естественные граничные условия для линии (3.11). Прежде всего отметим, что концы линии должны лежать на внешнем контуре, т. е. в точках $t = t_1, t_2$

$$\bar{\delta}x_1 = \bar{\delta}H \sin \psi, \quad \bar{\delta}x_2 = -\bar{\delta}H \cos \psi, \quad (3.12)$$

где $\delta H > 0$ соответствует смещению точки t_1 в сторону области S_u , а точки t_2 в сторону области S_v (см. рис. 8.6). Из выражения для вариации полной „потенциальной“ энергии W можно выделить слагаемые, представляющие собой значение некоторых функций в точках t_1, t_2 . Требование минимальности функционала W при ограничениях (3.12) приведет к определенным граничным условиям в точках t_1, t_2 . Рассмотрим условия в точке t_2 . Для точки t_1 результаты аналогичны. Из условия $\delta W = 0$ следует, что при $t = t_2$, $\delta H \neq 0$

$$- [U(R, x_1, x_2) \cos(\psi - \alpha) + \Sigma_n R \sin(\psi - \alpha)] + c = 0, \quad (3.13)$$

где c — отнесенное к δH слагаемое, которое может появиться при вычислении вариации

$$\delta I_0 = - \int_{\Gamma'_u} \Phi(u_i + \delta u_i) dl + \int_{\Gamma_u} \Phi(u_i) dl - \int_{\Gamma'_v} \Phi(v_i + \delta v_i) dl + \int_{\Gamma_v} \Phi(v_i) dl,$$

где Γ'_u, Γ'_v — контуры Γ_u, Γ_v после варьирования линии L . Пусть в двусторонней окрестности точки t_2 заданы непрерывные смещения. Тогда $\Gamma'_u = \Gamma_u$, $\Gamma'_v = \Gamma_v$ и $c = 0$. Если в двусторонней окрестности точки t_2 даны непрерывные напряжения или потенциал Φ , то $c = -\Phi(u_i) + \Phi(v_i)$. Предположим теперь, что положение конца линии скольжения L известно (например, t_2 совпадает либо с точкой разрыва граничных перемещений или напряжений, либо с точкой смены типа граничных условий и т. д.). В этом случае $\delta H \equiv 0$ и условие (3.13) заменяется на следующее: $x_i(t_2) = x_i^0$, где значения x_i^0 заданы.

Таким образом, усиленный вариационный принцип позволяет определять как разрывное поле смещений, так и положение линий разрыва. Однако в общем случае линии, полученные непосредственно из вариационного принципа, не могут рассматриваться как действительные, так как при таком подходе не учитывается история нагружения материала. Так, в случае одноосного сжатия угол наклона линии скольжения равен $\pi/4$ только для $Mg = 2kl$. Если вычислить β непосредственно для $Mg > 2kl$ без учета постепенного увеличения Mg , то окажется, что угол $\beta \neq \pi/4$ и зависит от Mg . Тем не менее линии (3.11) могут служить для оценок реального процесса L -пластического деформирования.

В работе [61] рассмотрен также случай, когда задачу локализации можно свести к задаче сопряжения для аналитических функций. Аналогично можно рассмотреть вариационные постановки задач разрушения, когда допускается также нормальный разрыв на линии [62]. Примеры решения краевых задач рассмотрены в работах [60, 63, 65, 277] (стреляние горных пород, развитие линии скольжения при изгибе бруса, разрушение обрзцов, локализации деформаций в условиях сдвига и др.).

§ 8.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ СТЕСНЕННОГО СДВИГА

1. Рассмотрим задачу о пластическом сдвиге сыпучего материала, следуя [64]. Факты здесь таковы: при сдвигах, меньших критического, деформации однородны и эпюра смещений линейна; затем образуется система линий скольжения, которая разбивает материал на блоки (гл. 2, 7). В дальнейшем структура блоков сохраняется и определяет диссипацию энергии, а также распределение скоростей и напряжений. Какой должна быть модель процесса? В работе [152] эта задача рассматривалась на основе интегрального критерия, который позволил выделить реологический тип неустойчивости и учесть влияние краевых

условий. В [278] локализация связывалась с изменением типа уравнений. Для анализа использовался бифуркационный подход. Последний обладает сравнительной простотой, но в целом довольно ограничен. Адекватнее будет постановка задачи о развитии начальных возмущений. Сошлемся на такое наблюдение. Место возникновения первой линии более-менее случайно. Если материал ослабить (например, ввести и убрать тонкую линейку), то первая линия будет развиваться с места ослабления. Положение остальных линий будет связано с первой. При этом средние размеры блоков сохраняются.

Для истолкования явления необходимо уточнить, что такое вообще локализация и с какого момента можно считать, что локализация сдвигов уже есть. В ответе на эти вопросы всегда есть известная неопределенность. Причем она связана с существом дела — внутренним механизмом деформирования. Пластические свойства сыпучей среды зависят от проскальзываний между ее частицами. Типичный процесс развивается следующим образом. Вначале во всей области проскальзывания много меньше размеров частиц. Затем они увеличиваются, причем вдоль некоторых поверхностей увеличение происходит быстрее, чем в остальных областях. Начиная с некоторого момента, проскальзывания вдоль таких поверхностей удобнее квалифицировать как сильный разрыв. То есть в действительности совершается постепенный переход от гладкого деформирования к разрывному. Очевидно, что и сам момент переквалификации процесса из гладкого в разрывный условен. Все проскальзывания между частицами как вдоль поверхностей локализации, так и вне их имеют одинаковую размерность — размерность длины. Таким образом, в реальной среде нет качественного различия между механизмом деформирования материала на поверхностях скольжения и вне их.

В континуальных моделях ситуация иная. При классических определениях обобщенное решение с любым даже малым разрывом отличается от гладкого качественно. Например, полю смещений в областях гладкости соответствуют конечные деформации, а на поверхностях разрыва — бесконечные. Поэтому соотношения на скачках, вообще говоря, не следуют из определяющих уравнений среды и должны задаваться дополнительно. Таким образом, между физическим механизмом пластичности сыпучих сред и обычными методами ее континуального описания есть несоответствие. Представляется заманчивым построение теории, снимающей это противоречие, теории, в которой фактическое присутствие сильных разрывов было бы типичным явлением, а гладкий и разрывный процессы рассматривались бы с единой точки зрения. В рамках этого направления выполнены работы [23—26] (см. §§ 4.3, 4.6 гл. 12). Здесь в качестве исходных вводились разрывные поля скоростей. Затем проводилось осреднение. Поскольку разрывные поля обладают большим разнообразием свойств, чем гладкие, то для восполнения информации о разрывах вводились дополнительные силовые и кинематические переменные.

Рассмотрим задачу в рамках уравнений § 4.6. Пусть в начальный момент $\alpha = 0$ образец ограничен прямыми $x = 0, L_x$; $y = 0, L$, либо $y = \pm L/2$; x, y — декартовы координаты. До потери устойчивости его состояние образца однородно. Поэтому способ задания краевых условий значения не имеет. Затем ситуация меняется. Если на границе заданы напряжения, то образуется только одна линия (система возможна, если допустить упрочнение материала на самом разрыве). Остальные линии подавляются разгрузкой. Причем разрыв перемещений распространяет по всей области и выходит на границу в форме ступеньки. Если же задать кинематические условия, то выход разрывов на границу станет невозмож-

ным. Поэтому появляются пограничные слои материала, свободные от линии скольжения. Их податливость играет роль демпфера, который смягчает жесткие, кинематические условия на границе (понятие жесткости нагружения уточним ниже). Представляет интерес более общая по сравнению с экспериментом постановка задачи, когда податливость слоев задается независимо.

Одно экспериментальное наблюдение позволяет упростить все выкладки. Если измерить величину проскальзывания вдоль линии скольжения, то она оказывается практически постоянной, исключая малые участки перехода в пограничный слой. При расчетах ими можно пренебречь. Кроме этого, не будем ставить также вопрос об ориентации линий. Нетрудно показать, что на ниспадающей ветви симметрия развития сдвигов по контактам из различных семейств является неустойчивой. Пусть условия нагружения и свойства материала таковы, что сдвиги одинаковы. Предположим, что на одном из семейств контактов переход на ниспадающую ветвь происходит несколько раньше, чем на другом. Тогда прогрессирующие сдвиги будут развиваться только по первому семейству в то время, как по второму начнется разгрузка. Это связано с симметрией тензора напряжений, которая сохраняется всегда. Последнее следует из предположения о точности контактов между частицами. Эксперименты показывают, что действительно локализация идет только по одному из двух возможных направлений (гл. 7).

Ориентируем ось x параллельно потенциальным линиям скольжения. Решение можно искать в классе функций

$$\Delta u = \Delta u(y), \Delta v = \Delta v(y), \quad (1.1)$$

где Δu , Δv — приращения компонент вектора смещений. Из уравнений § 4.6 следует, что нетривиальные решения возможны, если $\vartheta_2 \equiv 0$. При этом дилатансионное уравнение принимает вид

$$\partial \Delta v / \partial y = -\operatorname{ctg}(\vartheta_1 + \chi_1) \partial \Delta u / \partial y.$$

Остановимся на варианте, когда дилатансия отсутствует: $\vartheta_1 \equiv \pi/2$, $\chi_1 \equiv 0$ и, следовательно, $v \equiv 0$. Различие в функционировании контактов приводит к тому, что собственное вращение частиц становится отличным от макровращения. Примем, что на втором семействе контактов проскальзываний нет: $\Delta \Lambda_2 \equiv 0$. Тогда $\Delta \omega = 0$ и

$$G_s \frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \Delta \tau + \Phi \Delta \sigma_{yy}, \quad (1.2)$$

где $\tau = \sigma_{xy}$. Коэффициенты определяются параметрами материала, напряжениями на предыдущем шаге и неравенствами, отделяющими активное нагружение от разгрузки [26]:

$$G_s = (1/\eta_{1s} - Q_1 - \xi_1) \sin \theta_1 / A_{13}, \Phi = A_{12} / A_{13}, \\ A_{12} = \tau / (\tau^2 + \sigma_{yy}^2), A_{13} = -\sigma_{yy} / (\tau^2 + \sigma_{yy}^2).$$

Если учесть уравнения равновесия, то представление (1.1) можно дополнить следующим:

$$\Delta \tau = \Delta \tau(y), \quad \partial \Delta \sigma_{yy} / \partial y = 0, \\ \Delta \sigma_{xx} = -(\partial \Delta \tau / \partial y)x + c(y), \quad (1.3)$$

$c(y)$ — произвольная функция.

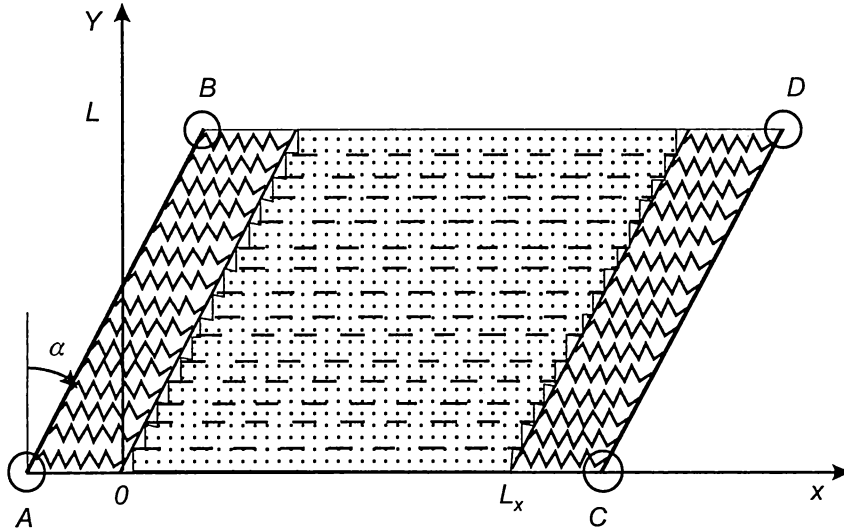


Рис. 8.7

Теперь о краевых условиях. Нижнюю границу закрепим неподвижно, а на верхней будем задавать смещения и постоянное сжатие $\sigma_{yy}(\Delta\sigma_{yy}=0)$:

$$\Delta u(0)=0, \Delta u(L)=L \Delta \alpha > 0. \quad (1.4)$$

Вторую группу условия поставим на боковых границах. Пусть сдвиг контролируется двумя жесткими направляющими AB, CD (рис. 8.7). Закрепление в точках A, C — шарнирное, α — угол поворота. Смещения точек самих направляющих равны $\Delta u = y \Delta \alpha$. Контроль сдвига образца осуществляется через два пограничных слоя. Примем для них винклеровскую модель с коэффициентом постели k_e . Если образец ведет себя „прилично“, т. е. смещениям (1.4) соответствует линейный отклик $\Delta u = y \Delta \alpha$, то пограничные слои в работу не вступают и $\Delta \sigma_{xx}=0$. Если же смещения отклоняются от линейных, то пограничные слои начинают проявлять свое стесняющее действие: при $x=0$ возникают напряжения $\Delta \sigma_{xx} = k_e(\Delta u - y \Delta \alpha)$, а при $x=L_x$ имеем $\Delta \sigma_{xx} = -k_e(\Delta u - y \Delta \alpha)$. Отсюда и из (1.2), (1.3) следует замкнутая система

$$G_s \frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \Delta \tau, \quad \frac{\partial \Delta \tau}{\partial y} = k(\Delta u - y \Delta \alpha), \quad (1.5)$$

где $k=2k_e/L_x$ — жесткость нагружения (по определению). Интересно отметить, что часть краевых условий приобрела форму дифференциального уравнения, которое в замкнутой системе фигурирует на равных с определяющим уравнением. В качестве интерпретации (1.5) можно считать, что образец представляет собой набор жестких пластин толщиной $h \rightarrow 0$ (см. рис. 8.7).

Для большей ясности ограничимся анализом чисто пластического поведения, когда касательное напряжение на контакте зависит только от величины проскальзывания. В континуальной постановке это означает, что модуль G_s зависит от величины du/dy , которая известна с предыдущего шага. В целом, однако, задача (1.4), (1.5) нелинейна, так как необходимо предусмотреть возможность разгрузки, а значит, и зависимость модуля от решения

$$G_p = \begin{cases} G_p & \text{при } \partial \Delta u / \partial y > 0, \text{ нагрузка,} \\ \infty & \text{при } \partial \Delta u / \partial = 0, \Delta \tau < 0, \text{ разгрузка.} \end{cases} \quad (1.6)$$

2. Итак, приходим к задаче (1.4)—(1.6). Эксперименты показывают, что на диаграммах „сдвиг образца — напряжения“ возможны ниспадающие ветви. Предположим вначале, что этот факт можно истолковать как переход пластического модуля G_p в отрицательную область (континуальная интерпретация ниспадающей ветви). Пусть в начальный момент среда однородна. Задача (1.4)—(1.6) всегда имеет решение

$$\Delta u = y \Delta \alpha, \quad \Delta \tau = G_p \Delta \alpha. \quad (2.1)$$

Если (2.1) реализуется, то для следующего шага однородность сохраняется ($\partial u / \partial y = \text{const}$, $G_p = \text{const}$) и равенства (2.1) возможны снова. Рассмотрим устойчивость этого решения. В случае абсолютно жесткого нагружения $k = \infty$ и решение является единственным независимо от знака G_p . Допускаются также любые возмущения однородности: $G_p = G_p(y)$. Иными словами, поле скоростей от возмущений вообще не зависит, а напряжения меняются на величину порядка возмущения. Таким образом, абсолютно жесткое нагружение подавляет все возмущения и образование структуры невозможно. Для второго крайнего случая $k = 0$ устойчивость сохраняется только на возрастающей ветви, $G_p > 0$. Действительно, пусть на некотором шаге $G_p = G^0 + \varepsilon(y)$, G^0 — положительная

постоянная, $\int_0^L \varepsilon dy = 0$. Тогда

$$\Delta u = L J(y) \Delta \alpha / J(L), \quad \Delta \tau = G^0 L \Delta \alpha / J(L),$$

$$J(y) = \int_0^y \frac{G^0}{G^0 + \varepsilon(y)} dy. \quad (2.2)$$

При малых ε решения (2.2) и (2.1) близки. Однако в случае конечных возмущений устойчивости может и не быть. Реальные возмущения определяются локальными неоднородностями и от модуля G_p в общем не зависят. С другой стороны, с увеличением сдвига величина $G_p \rightarrow 0$. Поэтому устойчивость по отношению к конечным возмущениям сохраняется только при небольших сдвигах, когда $G^0 \ll \max |\varepsilon|$. После выхода диаграммы на горизонтальную или ниспадающую ветвь достаточно ограничиться возмущением следующего типа: во всей области, кроме узкой полосы $y^0 \leq y \leq y^0 + \delta$, поведение материала определяется диаграммой 1, а в полосе — диаграммой 2, $G_p = -M = \text{const}$, $M > 0$ (рис. 8.8). Тогда при $\alpha < \alpha_\varepsilon = (\tau^* - \varepsilon) / G_p$ выполняется (2.1), а при $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ $\Delta \tau = -M \Delta \alpha L / \delta$ и

$$\Delta u = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < y^0, \\ \frac{L}{\sigma} (y - y^0) \Delta \alpha & y^0 \leq y \leq y^0 + \delta, \\ L \Delta \alpha & y^0 + \delta < y < L, \end{cases} \quad (2.3)$$

т. е. активное нагружение возможно только в одной узкой полосе. Остальная область захватывается разгрузкой.

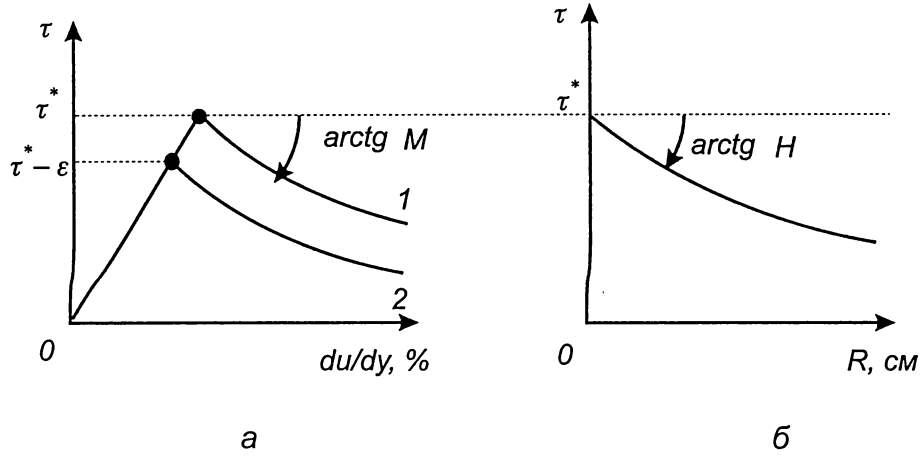


Рис. 8.8

Перейдем теперь к общему случаю. Если $G_p > 0$, $p = \sqrt{k / C_p} = \text{const}$, то

$$\begin{aligned}\Delta u &= y \Delta \alpha + c_1 e^{py} + d_1 e^{-py}, \\ \Delta \tau &= G_p (\Delta \alpha + p c_1 e^{py} - p d_1 e^{-py})\end{aligned}\quad (2.4)$$

при активной нагрузке и

$$\Delta u = c_2, \quad \Delta \tau = k (c_2 y - y^2 \Delta \alpha / 2) + d_2 \quad (2.5)$$

при разгрузке. Если же $G_p = -M$, то действительной будет величина $q = \sqrt{k / M}$ и вместо (2.4) получим

$$\begin{aligned}\Delta u &= y \Delta \alpha + c_3 \sin q y + d_3 \cos q y, \\ \Delta \tau &= -M (\Delta \alpha + q c_3 \cos q y - q d_3 \sin q y).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Здесь c_1, \dots, d_3 — постоянные. Интуитивно ясно, что наличие пограничных слоев должно способствовать повышению устойчивости. Можно показать, что все выводы об устойчивом поведении при $k = 0$ остаются без изменений. Так, в ситуации типа (2.2) вид решения усложнится, во смысл его останется прежний: на возрастающей ветви устойчивость есть. Для однородного образца ситуация проще: формулы (2.4), (1.4) приводят к единственному решению (2.1). Это значит, что краевые условия контролируют поведение образца полностью.

На ниспадающей ветви единственности уже нет. Предположим, что для ответвившегося решения активная нагрузка идет во всей области (равноактивная бифуркация). Тогда при $q = \pi n / L$, или

$$k = M \pi^2 n^2 / L^2 \quad \Delta u = y \Delta \alpha + c \sin q y, \quad \Delta \tau = -M (\Delta \alpha + c q \cos q y), \quad (2.7)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $c = \text{const}$. Условие активного нагружения выполняется при $|c| < L \Delta \alpha / \pi n$. Из (2.7) следует, что бифуркация происходит при любой степени стеснения $0 < k < \infty$. Причем с увеличением k ответвившееся решение стремится к основному путем неограниченного увеличения числа полуволн и уменьшения их амплитуды.

Вопросы о величине постоянной в (2.7), решениях с разгрузкой, а также случаях, когда k , L и M не связаны (2.7) ни при каких целых n , остаются открытыми. Кроме того, здесь возможны и парадоксы. Пусть на границе заданы дестабилизирующие условия: $k < 0$. Такие условия не противоречат законам сохранения, а только означают, что процесс контролируется некоторым механизмом, связанным с источником энергии. На стадии упрочнения решение будет иметь вид (2.6), и это представляется естественным. При разупрочнении получается парадокс: решение имеет вид (2.4) и совместно с (1.4) дает единственно возможный вариант (2.1). Все перечисленные трудности указывают на ограниченность бифуркационного подхода и континуальной интерпретации ниспадающей ветви.

Действительно, поставим вопрос об устойчивости решения (2.3) по отношению к изменению самих параметров ε и δ . Очевидно, что при $\varepsilon = \varepsilon(y)$ локализация начнется в полосе с наибольшим значением ε , т. е. $\delta \rightarrow 0$. При этом сдвиг, пропорциональный L/δ , будет неограниченно расти. Это приводит к необходимости формулировки определяющих уравнений на ниспадающей ветви в терминах напряжения — проскальзывания размерности длины (см. рис. 8.8). Таким образом, приходим к следующей математической модели. При сдвигах, меньших критического γ^* , поведение среды описывается некоторой замкнутой системой дифференциальных уравнений. Учитывается возможная разгрузка и — это основное — активному нагружению соответствует только упрочнение (возможно, бесконечно малое). Однородным напряжениям в элементарном или конечном объеме отвечают однородные же деформации. По достижении критического сдвига материальный объем делится одной линией скольжения на две части. Положение линии — произвольно, ориентация — вдоль направления наибольшего сдвига. Здесь есть только две возможности. Для однородного состояния выбор ориентации значения не имеет, для неоднородного — осуществляется из дополнительных условий. (Например, при исследовании роста линии выбор направления в носике диктуется известной с предыдущего шага траекторией.) В среде не могут осуществляться сдвиги, большие некоторого предельного. Если краевые условия требуют, чтобы область в целом испытала больший сдвиг, то они удовлетворяются путем появления сильных разрывов смещений. Ранее модель с ограниченным сдвигом рассматривалась в работе [279]. В [279] уравнение $\gamma = \gamma^*$ удовлетворялось за счет отказа от условия соосности. Здесь вводится более слабое ограничение $\gamma \leq \gamma^*$, которое удовлетворяется за счет появления разрывов. Вне их все уравнения сохраняются.

Итак, приходим к следующей задаче. При $G_p > 0$ выполняются (1.6) и первое уравнение (1.5). По достижении критического сдвига появляется разрыв перемещений R , на котором $\Delta \tau = -H \Delta R$, где $H > 0$ и для упрощений $H = \text{const}$. Краевые условия включают (1.4) и второе уравнение (1.5).

Рассмотрим некоторые оценки. Предположим, что одновременно образовалась система в точности одинаковых блоков размером l . Достаточно рассмотреть поведение только центрального блока $|y| \leq l/2$ в условиях, когда разгрузка захватывает его полностью (здесь начало координат — в середине образца). При $|x| = l/2$ $\Delta R = l \Delta \alpha$, $\Delta \tau = -H l \Delta \alpha$ и, согласно (2.5),

$$\Delta u = 0, \Delta \tau = -\frac{\Delta \alpha}{2} \left[k \left(y^2 - \frac{l^2}{4} \right) + 2 H l \right].$$

Условие разгрузки $\Delta \tau \leq 0$ дает верхнюю оценку:

$$l \leq 8H/k. \quad (2.8)$$

Блоки больших размеров существовать не могут.

Вторая оценка связана с тем обстоятельством, что линии скольжения развиваются последовательно. Пусть первая линия образуется в середине образца $y=0$. Рассмотрим решение в верхней половине $y>0$. К линии примыкает область разгрузки $0 \leq y < l$, $\Delta \tau(0) = -H \Delta R$

$$\Delta u = R/2, \quad \Delta \tau = -\frac{k\Delta R}{2} \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta R} y^2 - y + \frac{2H}{k} \right).$$

В области активного нагружения $l < y \leq L/2$ решение имеет вид (2.4). Постоянные интегрирования и величина ΔR находятся из условий склейки напряжений и смещений, а также из критерия контакта областей разгрузки и активного нагружения $\Delta \tau(l) = 0$:

$$\Delta R = l\Delta \alpha / \left(1 - \frac{2H}{k} \frac{1}{l} \right),$$

где l определяется из уравнения

$$\left(1 - \frac{2H}{k} \frac{1}{l} \right) \left[1 + \frac{1}{lp} \operatorname{th}(0,5L - l)p \right] = 0,5.$$

Рассмотрим асимптотику решения для двух крайних случаев: $L \rightarrow 2l$ и $L \rightarrow \infty$. В первом $l = 4H/k$, во втором —

$$l = \frac{2H}{k} + \sqrt{\left(2\frac{H}{k} \right)^2 + \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{p}. \quad (2.9)$$

Оценки — нижние, так как новая линия может образоваться только вне полосы разгрузки. В данной задаче есть два параметра размерности длины: H/k и p^{-1} . Можно ожидать, что характерный размер блоков будет определяться первым параметром, а нерегулярность — отклонение фактических размеров от среднего — вторым. При $p^{-1} \rightarrow 0$ оценки сближаются.

Посмотрим теперь, что нового вносят в процесс упругие деформации:

$$\Delta \varepsilon_{xy}^e = \Delta \tau / 2\mu, \quad \Delta \varepsilon_{xx}^e = (\Delta \sigma_{xx} - \nu \Delta \sigma_{yy}) / E, \quad (2.10)$$

$$\Delta \varepsilon_{yy}^e = (\Delta \sigma_{yy} - \nu \Delta \sigma_{xx}) / E,$$

$\mu, E, \nu = \text{const}$. Основную роль играют сдвиги в координатах Oxy . Поэтому деформациями сжатия естественно пренебречь (положить $E = \infty$, а модуль сдвига μ сохранить в качестве нового параметра). Для этого необходимо отказаться от связи между упругими постоянными. Это означает, что модель становится анизотропной и по отношению к упругим деформациям. При этом закон Гука имеет обычный вид (2.10) только в координатах Oxy .

Обратимые сдвиги вносят следующие изменения в (1.6):

$$G_s = \begin{cases} G = \frac{G_p \mu}{G_p + \mu} & \text{— при нагрузке,} \\ \mu & \text{— при разгрузке.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Упруго-пластическая модель дает новые аргументы, указывающие на недостаточность континуальной интерпретации ниспадающей ветви. Пусть осуществляется абсолютно жесткое нагружение и $G_p < -\mu$. Тогда $G > 0$ и (2.11) приводит к противоречию. Действительно, если $\Delta \alpha > 0$, то и $\Delta \gamma > 0$, $\Delta \tau > 0$. Но это не согласуется с фактом разупрочнения. Таким образом, при $G_p < -\mu$ даже абсолютно жесткое нагружение устойчивости не гарантирует.

Рассмотрим процесс в рамках модели с ограниченным сдвигом. Учет упругости приводит к следующей замене оценки (2.8):

$$l \leq 2 \sqrt{\frac{\mu}{k}} \ln \frac{\sqrt{\mu k} + 2H}{\sqrt{\mu k} - 2H}, \quad (2.12)$$

если $2H < \sqrt{\mu k}$. Из сравнения (2.12), (2.8) видно, что наличие упругих деформаций приводит к увеличению размеров блоков. При $\mu \rightarrow \infty$ правая часть (2.12) стремится к $8H/k$. Если $2H = \sqrt{\mu k}$, то ограничений на размеры нет. В случае $2H > \sqrt{\mu k}$

$$l < \frac{\sqrt{\mu}}{k} \ln \frac{2H + \sqrt{\mu k}}{2H - \sqrt{\mu k}}. \quad (2.13)$$

Последняя оценка получена не из условия $\Delta \tau(0) \leq 0$ (оно выполняется всегда), а из требования $\Delta R > 0$. Если (2.13) заменить на равенство, то при $\Delta \alpha = 0$ ΔR станет неопределенным. Это означает, что упругие деформации дают новый тип неустойчивости. Он связан с тем обстоятельством, что разупрочнение вызывает уменьшение упругой потенциальной энергии. Если на линиях диссипируется энергии меньше, чем высвобождается, то состояние системы меняется скачком. При этом процесс условиями на границе уже не контролируется (модель горного удара и землетрясения).

Рассмотрим теперь роль упругости в оценках типа (2.9). Пусть возмущения таковы, что первый разрыв образуется в середине области $|y| \leq L/2$. К линии примыкает полоса разгрузки $0 < y < l$. Из симметрии $\Delta R = 2 \Delta u(+0)$ и $\Delta \tau(0) = -2H \Delta u(+0)$. Кроме того, $\Delta u(L/2) = L \Delta \alpha / 2$. Для упрощения записей остановимся на модели упругого тела с ограниченным сдвигом, т. е. положим в (2.11) $G_p = \infty$. Тогда условия склейки при $y = l$ выполняются автоматически. Уравнения дают

$$\Delta R = \frac{2\mu sh\kappa}{\sqrt{k\mu} ch\kappa - 2Hsh\kappa} \Delta \alpha, \quad \kappa = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \frac{L}{2}.$$

Решение имеет смысл, если $\Delta R > 0$, или

$$2H < \sqrt{k\mu} \operatorname{cth} \kappa. \quad (2.14)$$

В противном случае происходит удар, после которого неравенство (2.14) восстанавливается. Если, кроме (2.14),

$$2H > \sqrt{k\mu} \frac{ch\kappa - 1}{sh\kappa},$$

то разгрузка захватывает всю область. В остальных случаях

$$l = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{\mu}{k}} \ln(\chi + \sqrt{\chi^2 - 1}), \quad (2.15)$$

$$\chi = ch\kappa - \frac{2H}{\sqrt{\mu k}} sh\kappa.$$

Следующая линия образуется вне полосы (2.15) и т. д. Последовательно процесс формирования структуры удобнее исследовать численно.

Это сделано в работе [65]. В [65] рассматривается роль начальных возмущений и показано, что линии скольжения возникают не одновременно, но тем не менее в узком диапазоне изменения параметра нагружения. Каждая из линий скольжения дает определенную область разгрузки, причем с удалением от линий скольжения напряжения внутри блоков возрастают. Исследованы роли жесткости нагружения и крутизны ниспадающих ветвей. Отдельно рассмотрен случай, когда среда обладает внутренним трением (уравнения § 4.6). Рассмотрена также двумерная постановка задачи с использованием вариационных формулировок § 8.2. Здесь величина проскальзывания вдоль линии меняется и достигает максимума в ее середине. Поэтому максимум напряжений смещается от центра и достигается в двух симметричных (относительно центра) точках. Из этих точек стартует новая линия скольжения и затем все повторяется снова.

§ 8.4. ТЕЧЕНИЯ В РАДИАЛЬНЫХ КАНАЛАХ С ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ

Задача о расчете течений в сходящихся каналах относится к одной из классических в механике. В § 7.6 показано, что при определенных условиях симметричный и радиальный режим течения становится неустойчивым. Это приводит к формированию в среде пространственно-временной структуры. Схема течения показана на рис. 8.9. Ограничимся случаем плоской деформации. На рис. 8.9 линии скольжения аппроксимированы прямыми. Пусть блоки, выделенные линиями скольжения, являются жесткими и смещаются вниз вдоль боковых стенок (рис. 8.9 а). Тогда на контактах между ними произойдут проскальзывания R_1, R_2, \dots , а в окрестностях вершин блоков появятся области несовместности S_1, S_2, \dots . При этом вдоль линии величина проскальзывания будет постоянной. Действительный механизм течения отличается от схемы, показанной на рис. 8.9, только тем, что блоки жесткими не являются, а испытывают определенную деформацию, причем такую, которая полностью компенсирует области несовместности. Эту „нелокализованную“ деформацию естественно оценить как отношение областей несовместности $S_1 + S_2 + \dots$ к общей площади блоков S_0 (см. § 8.1).

Если теперь по той же схеме представить себе деформирование без линий разрыва (см. рис. 8.1), то как отмечалось, здесь область несовместности будут гораздо больше, чем при разрывном механизме. Таким образом, можно сказать, что при локализованном режиме те-

чения материалу в каком-то смысле „выгоднее“ допустить на отдельных линиях разрывы перемещений и за счет этого уменьшить общую деформацию материала вне линий. Легко видеть, что общая „нелокализованная“ деформация имеет порядок $\frac{1}{S_0} \sum_i S_i \sim h^2 / S_0$ (см. рис. 8.9),

и поэтому локализованный режим „наиболее выгоден“ только в самом начале, когда смещения h малы. При больших смещениях области несовместности увеличиваются и уже не обеспечивают преимуществ локализованного режима.

„Решение“, которое находит здесь среда, очень интересно. Наблюдения [50, 51] показывают, что при больших смещениях h система линий скольжения (рис. 8.9 а) исчерпывает свои возможности и перестает функционировать. В материале формируется новая система линий, которой соответствует геометрия, показанная на рис. 8.9 б, и весь процесс повторяется снова. Таким образом, наряду с пространственной здесь появляется также и временная структура с некоторым характерным масштабом времени. Поэтому при установившихся краевых условиях процесс приобретает более-менее периодический характер.

Анализ литературы показал, что к идее несимметрии течения в канале очень близко подошли и другие авторы. Так, в работе [267] экспериментально обнаружено, что при небольших деформациях в рассматриваемом процессе есть тенденция к локализации. Затем, после работ [50, 51], была выполнена работа [280], в которой исследуется близкая задача.

Ясно, что существования описанного выше течения можно ожидать для любых сходящихся каналов и материалов, которые склонны к локализации деформаций.

Расчет локализованных течений в строгой постановке наталкивается на значительные математические трудности. Прежде всего это связано с исследованием переходного режима, когда линии разрыва только формируются и ориентация их заранее не известна. Если этот переходный режим исключить, то можно использовать упрощенный подход. В приложениях подобные постановки играют большую роль, поскольку они не требуют ни привлечения сложного математического аппарата, ни больших вычислительных ресурсов.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Предположим, что все линии скольжения прямолинейны и ориентация их заранее известна либо из опытов, либо из вариационных соображений. Предположим, далее, что величина проскальзывания на линии связана с напряжениями, как показано на диаграмме сплошной линией (рис. 8.10), где R_i — относительные смещения, $\operatorname{tg} \varphi_i$ — коэффициент мобилизованного контактного трения. Его смысл следующий. При увеличении проскальзывания от нуля „прочность“ материала постепенно мобилизуется: доля касательного напряжения по отношению к нормальному

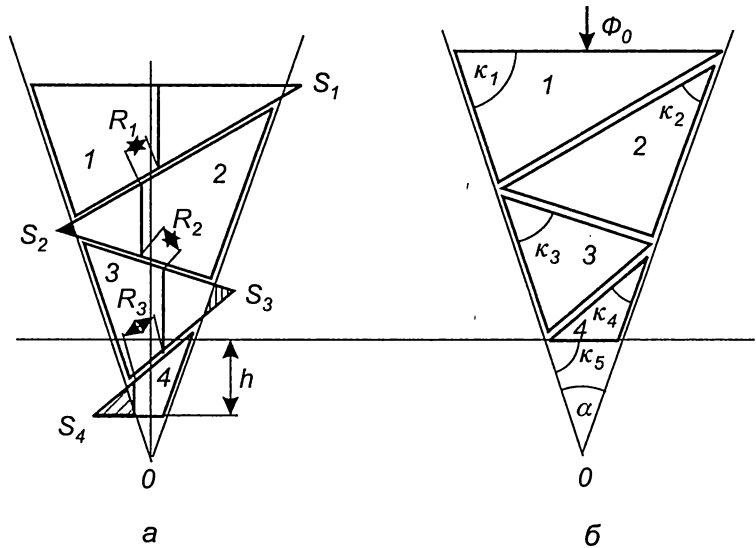


Рис. 8.9

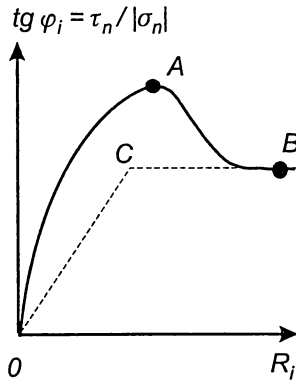


Рис. 8.10

возрастает. Затем наступает либо разупрочнение, либо переход к предельному состоянию (горизонтальная ветвь). Деформирование на участке OA соответствует допредельному состоянию. Его учет в определенной степени позволяет рассмотреть процесс развития пространственной структуры.

Дальнейший план решения такой. Для жестких блоков величина проскальзывания вдоль линий скольжения постоянна. Будем считать ее постоянной и для деформируемых блоков. Тогда углы φ_i будут также постоянными вдоль линии и равенство $\tau_n = -\operatorname{tg} \varphi_i \sigma_n$ можно проинтегрировать, т. е., проще говоря, от напряжений можно перейти к рассмотрению сил.

Система уравнений равновесия имеет вид

$$P_i = \frac{Q_i \cos\left(\psi_i + \frac{\alpha}{2}\right) + P_{i-1} \sin(\kappa_i - \varphi_{i-1} - \psi_i)}{\sin(\alpha + \kappa_{i+1} - \varphi_i + \psi_i)},$$

$$T_i = \frac{Q_i \cos\left(\kappa_{i+1} - \varphi_i + \frac{\alpha}{2}\right) + P_{i-1} \sin(\alpha + \kappa_i + \kappa_{i+1} - \varphi_{i-1} - \varphi_i)}{\sin(\alpha + \kappa_{i+1} - \varphi_i + \psi_i)},$$

$$i = 1, 2, \dots, n..$$

Здесь P_i, T_i — силы, φ_i, ψ_i — углы трения, действующие соответственно на нижней и боковой границах i -го блока, Q_i — вес блока, α — угол раствора канала, κ_i — ориентация линий скольжения (см. рис. 8.9 б). В качестве краевого условия возьмем

$$\varphi_0 = 0, P_0 = \Phi_0 = \text{const},$$

где P_0 — сила на свободной поверхности, φ_0 — ее наклон к вертикали.

Перейдем теперь к реализации схемы. Рассмотрим кинематику. Если интересоваться только смещениями центров блоков и проскальзываниями между ними, то приходим к кинематически определяемой задаче. Иными словами, если величина вертикального смещения нижнего блока h задана, то все перемещения и проскальзывания известны. Здесь сразу возникает вопрос, как поступить с областями несовместности S_1, S_2, \dots Предположим вначале, что ими можно пренебречь. Тогда все вертикальные смещения блоков найдутся из рекуррентного соотношений

$$h_{i-1} = h_i \frac{\sin \kappa_i}{\sin(\alpha + \kappa_i)}, \quad i = n, n-1, \dots, 2, \quad h_n = h,$$

где h — известное смещение нижней грани, а относительное проскальзывание на границе i -го и $i+1$ -го блоков будет

$$R_i = h_i \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \kappa_{i+1}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,$$

т. е. $R_i \sim h$. Сопоставим результат (3), (4) с континуальным решением для деформируемой среды. Если есть несжимаемость, то для радиального течения имеем

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad v_r \sim \frac{1}{r}, \quad \gamma \sim \frac{1}{r^2}, \quad (5)$$

т. е. скорость сдвига γ увеличивается при приближении к центру (при $r \rightarrow 0$). Это подтверждается и экспериментами (§ 7.6, линии скольжения развиваются снизу вверх). Формулы (3), (4) показывают, что, если пренебречь областями несовместности S_1, S_2, \dots , результат по кинематике приводит к парадоксу. Здесь относительные смещения блоков R_i являются величинами одного порядка и не зависят от r . Таким образом, приходим к выводу о необходимости учета областей S_1, S_2, \dots . Примем, что линии скольжения при смещении вниз по-прежнему (как и в жестком случае) остаются параллельными себе, но при этом площади блоков не изменяются (т. е. не уменьшаются, а остаются постоянными). Нетрудно показать, что в этом случае проскальзывания между блоками R_i и по стенкам канала D_i будут

$$R_i \sim h^2 / r, \quad D_i \sim h^2 / r. \quad (6)$$

Видно, что здесь уже парадокса нет, сдвиговые деформации будут $\sim R_i / r \sim 1/r^2$ и в этом отношении схема течения будет сопоставимой с континуальной схемой (5).

Итак, сформулируем окончательную постановку задачи. Пусть вертикальное смещение нижней грани h задано, тогда из кинематики однозначно определяются величины R_i, D_i — проскальзывания между блоками и по стенкам канала (6) (строгая зависимость R_i, D_i от h из-за ее громоздкости не приводится). Определяющие уравнения для коэффициентов трения и проскальзываний, как следует из диаграммы (рис. 8.10), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_i &= f_1(R_i), \\ \operatorname{tg} \psi_i &= f_2(D_i), \quad i = n, n-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где f_1, f_2 — некоторые заданные функции. Таким образом, уравнения (1), (2), (6), (7) при заданных величинах h и Φ_0 (пригрузка на свободной границе) образуют замкнутую систему уравнений для сил R_i, T_i углов трения φ_i, ψ_i и проскальзываний R_i, D_i .

Перейдем к решению системы (1), (2), (6), (7). Для этого необходимо задать конкретный вид зависимостей f_1, f_2 . Возьмем кусочно-линейное приближение функций f_1, f_2 (рис. 8.10, пунктирная линия), т. е. будем считать, что вначале материал линейно упрочняется (участок OC), а затем сразу начинается стадия предельного состояния. Примем следующие значения параметров: число блоков $n = 16$, угол раствора канала $\alpha = 45^\circ$, ориентация линий скольжения $\kappa_i = 50^\circ$, сила $\Phi_0 = 0$ (см. рис. 8.9 б), $\varphi_{\text{пред}} = 30^\circ$, $\psi_{\text{пред}} = 15^\circ$, т. е. в предельном состоянии (участок CB на рис. 8.10) коэффициенты трения будут $\operatorname{tg} \varphi_{\text{пред}} \approx 0,577$, $\operatorname{tg} \psi_{\text{пред}} \approx 0,268$. Отметим, что уравнения (1) записаны относительно сил, действующих на блок. По-видимому, результаты будут более наглядными, если выводить не силы, а средние нормальные напряжения на дно и стенки канала (сила, отнесенная к длине соответствующего участка границы блока). Для напряжений примем следующий масштаб:

$$\sigma = \rho g H \bar{\sigma},$$

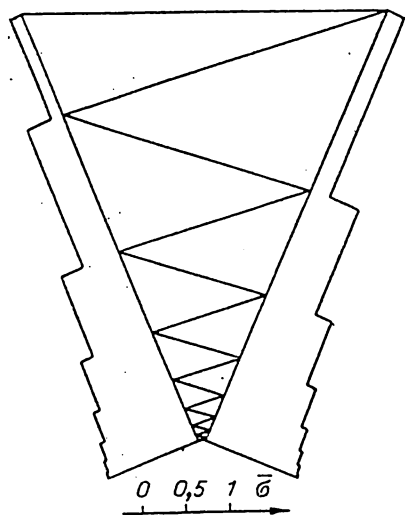


Рис. 8.11

где σ — размерное напряжение, ρ — плотность среды, g — ускорение свободного падения, H — высота материала в канале, $\bar{\sigma}$ — безразмерное напряжение (рис. 8.11).

Исходным состоянием материала в канале будем считать состояние, соответствующее точке 0 на рис. 8.10. Здесь параметр $h = 0$ (проскальзываний нет) и следовательно, все $\varphi_i = \psi_i = 0$. В этом случае распределение напряжений на дно и стенки канала совпадает с гидростатическим. Ясно, что оно будет таким же и в среде при отсутствии внутреннего и внешнего трения (т. е. рассмотренная схема допускает предельный переход к гидростатике). Дадим теперь смещение нижней грани h_1 . Тогда на всех контактах в соответствии с принятой кинематической схемой произойдут некоторые проскальзывания и, следовательно, возникнут касательные напряжения. Пусть h_1 таково, что соответствующее трение мобилизуется полностью на границах

только четырех нижних блоков (здесь диаграмма выходит на горизонтальную ветвь), а на остальных контактах принимает промежуточные значения (участок OC диаграммы). В этом случае картина распределения напряжений существенно отличается от гидростатической (рис. 8.12 а, область развитого трения — выделена). Пусть теперь нижняя грань смещается на величину $h_2 > h_1$, причем h_2 таково, что область развитого трения в соответствии с диаграммой захватывает уже восемь нижних блоков. Полученное при этом распределение напряжений представлено на рис. 8.12 б. На рис. 8.12 в показана ситуация, когда смещение $h = h_3 > h_2$, а область развитого трения захватывает 11 нижних блоков. Таким образом, из рис. 8.11, 8.12 видно, что по мере развития трения на контактах нормальное давление на нижние части стенок ослабевает и перераспределяется вверх по стенкам. Можно сказать, что здесь наблюдается такой же эффект, как и в задаче Янсена, когда при увеличении высоты засыпки за счет внутреннего трения материала нагрузка на дно практически не увеличивается. К моменту, когда трение мобилизуется полностью во

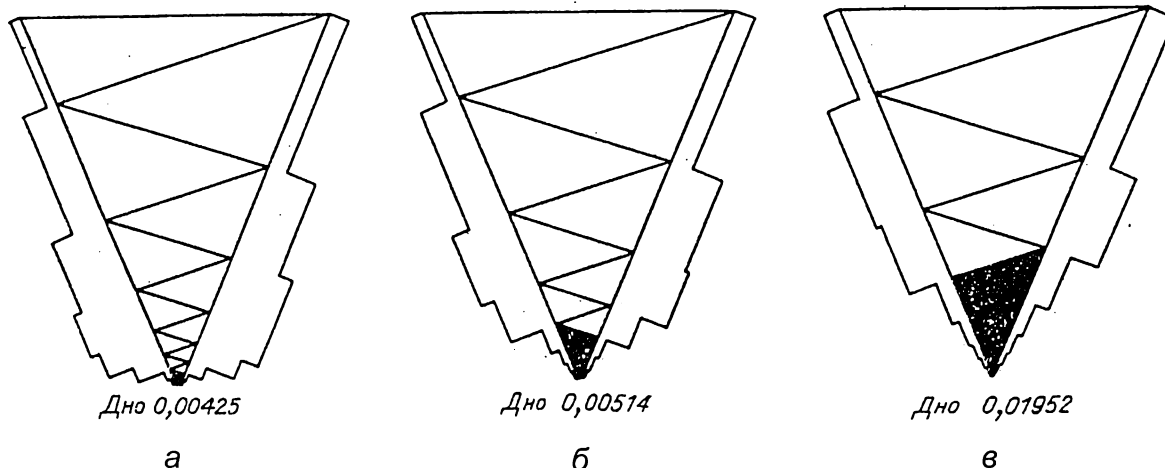
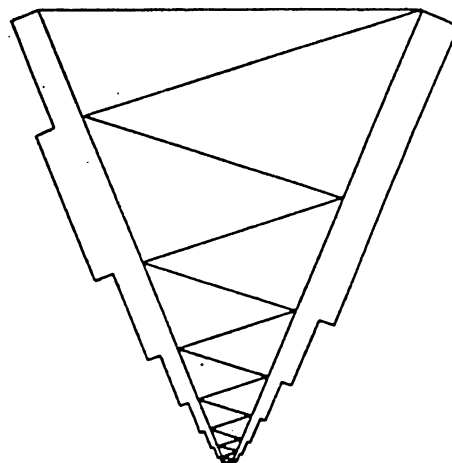


Рис. 8.12

всем материале (стадия установившегося течения), получим распределение, показанное на рис. 8.13.

По результатам расчетов можно сказать следующее. Как и ожидалось, решение не является симметричным относительно оси симметрии канала (хотя трение на разных стенках одно и то же). Симметрия выполняется только в интегральном смысле, т. е. равны между собой равнодействующие сил и давлений на всю стенку в целом. Более того, здесь можно указать участки стенок, где напряжения достигают максимума, причем заранее можно утверждать, что этот максимум будет выше среднего интегрального давления на стенку. Так, при выбранных выше параметрах задачи максимальное давление на стенку (см. рис. 8.13) достигается в районе третьего блока и составляет $\sigma = 0,494$. В размерных величинах при $\rho = 2 \text{ г / см}^3$, $H = 6 \text{ м}$ это будет 58,15 кПа. Среднее интегральное давление на стенку, в свою очередь, составит лишь 37,77 кПа, т. е. в этом примере максимальное давление выше среднего интегрального в 1,54 раза.



Дно 0,00390

Рис. 8.13

Отметим также, что фактически не усложняя схему, можно рассмотреть задачу с наклоном бункера к вертикали, моделировать дефекты и неровности стенок путем выбора различных параметров трения на разных участках границы канала (углы ψ_i). При рассмотрении кинематики легко учесть дилатансионные изменения объемов блоков. На стадии допредельного деформирования есть возможность выбирать различные диаграммы поведения на контактах (учет нелинейности среды, ниспадающие ветви и т. д.).

В заключение рассмотрим описание процесса деформирования в целом. Он обладает одной замечательной особенностью. Как уже отмечалось, в канале есть пространственная структура. Но формально здесь может и не быть характерного масштаба длины. Это объясняется автомодельностью структуры. Если рассмотреть предельный случай, когда канал сходится полностью, а с противоположной стороны бесконечно расходится, то здесь будут присутствовать блоки всех масштабов. Причем эти масштабы образуют дискретную последовательность

$$..., L / k^2, L / k, L, Lk, Lk^2, Lk^3, ...,$$

где через L обозначен размер произвольно выбранного отсчетного нулевого блока, k — постоянная величина. Блоки промежуточных размеров существовать не могут. Коэффициент перехода k зависит от свойств среды и условий нагружения (например, в опытах [50, 51] $k \approx 1,4$).

Рассмотрим теперь вопрос о временной структуре. Выше отмечалось, что каждый блок испытывает деформацию, которую, интегрально можно оценить как $\varepsilon_i = S_i / G_i$ (S_i — область несовместности i -го блока, G_i — его площадь). Эксперименты показывают, что без локализации материал может продеформироваться до некоторого сдвига γ^* . Распределение деформаций внутри блока, конечно, неоднородно. Его дробление начинается в точке с наибольшим сдвигом, и линия разрыва развивается из этой точки. Для оценки естественно

принять, что i -й блок может существовать как целый только до деформации $\varepsilon_i < \gamma^*$. Как только величина ε_i достигает γ^* , блок дробится. Средняя деформация i -го блока равна

$$\varepsilon_i = S_i / G_i \sim h_i^2 / (Lk^i)^2, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где h_i — его смещение вниз. Пусть теперь отсчетный блок смещается вниз с постоянной скоростью v_0 , так что величина его перемещения равна $h = v_0 t$, где t — время. Тогда, согласно (6), получим, что перемещение i -го блока пропорционально $h_i \sim (v_0 t)^2 / k^i$, т. е.

зависимость деформации i -го блока от времени имеет вид $\varepsilon_i \sim \frac{1}{L^2} \left(\frac{v_0 t}{k^i} \right)^4$. Видно, что для

любого момента времени t существуют как блоки, деформация которых меньше величины γ^* , так и такие, которые уже претерпели дробление. Если за масштаб времени принять время существования некоторого фиксированного блока, то видно, что здесь также есть автомодельность: время существования блока номер i пропорционально $t_i \sim \sqrt[4]{\gamma^* \cdot L^2 k^i} / v_0$. Из последнего соотношения следует оценка скорости волны локализации в канале, т. е. критическое значение γ^* с ростом времени перемещается вверх по закону $r \sim \sqrt{L v_0 t} / \sqrt[4]{\gamma^*}$.

§ 8.5. ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ

Задача о деформировании массива вокруг выработки является одной из наиболее важных в горной механике. В различных постановках она исследовалась во многих работах. Большой интерес представляет ситуация, когда массив образует неоднородную блочную структуру. Есть данные, которые показывают, что на больших глубинах в ряде случаев блочность структуры ярко выражена, и именно она играет основную роль в процессах деформирования массива [например, 234—239].

В строгой постановке исследование задач о деформировании блочной среды наталкивается на значительные трудности. Однако если с самого начала отказаться от анализа детального распределения напряжений внутри блоков и ограничиться только интегральными оценками, то подобные задачи удастся значительно упростить. Классический пример — исследование задачи о давлении грунта на подпорную стенку. Здесь формируется одна линия скольжения и, если не интересоваться распределением напряжений внутри блока (призмы сползания), то формула для расчета давления на стенку получается сравнительно просто. Причем это можно сделать для довольно общего случая, когда учитывается шероховатость стенки, действующая сверху пригрузка и т. д. Хорошо известно, что ценность подобных решений часто не меньше, чем „точных“ решений, полученных методами механики сплошных сред. Иными словами, подобный инженерный подход вполне оправдан, и там, где есть возможность, его использование всегда имеет смысл.

Вместе с тем, насколько известно из литературы, задачи о выработке исследуются только в рамках континуального подхода, а указанный выше инженерный, альтернативный подход не применяется. В настоящей работе сделана попытка несколько восполнить этот пробел, т. е. найти постановку задачи и схему расчета, подобную статически определенной постановке в задаче о подпорной стенке.

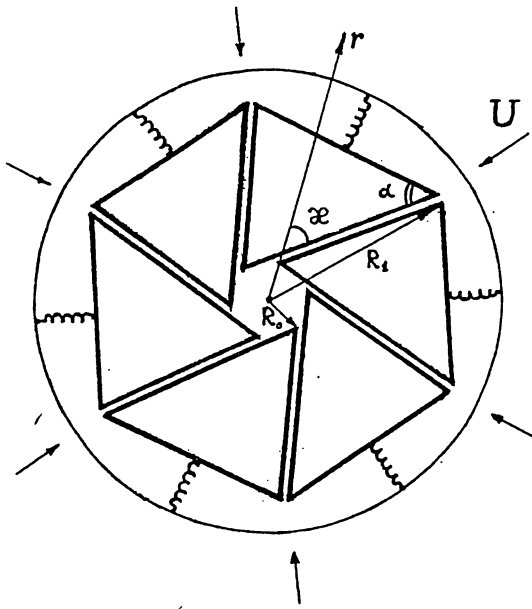


Рис. 8.14

Идея этой постановки возникла из анализа течения сыпучей среды в сходящемся радиальном канале (см. § 8.4). В [50, 51] был обнаружен режим течения с локализацией сдвигов. Факт локализации, или, что то же самое, появления блочной структуры, позволил сформулировать приближенную схему расчета § 8.4. В определенном смысле перемещения массива в сторону выработки можно уподобить движению материала в сходящемся радиальном канале, угол раствора которого равен 360° . Исходя из такой интерпретации, можно построить кинематическую схему, аналогичную § 8.4, но уже для блочной среды вокруг выработки.

1. Перейдем к формулировке задачи. Пусть имеется бесконечный горный массив с выработкой радиуса R_0 . Задачу будем рассматривать в плоской постановке. Выделим в массиве ближнюю зону, непосредственно прилегающую к вы-

работке $R_0 < r < R_1$. Пусть она имеет блочную структуру. В рамках упрощенного подхода откажемся от анализа распределения напряжений внутри блоков и примем их абсолютно жесткими. Иными словами, вся информация о деформировании структуры содержится в условиях на контактах между блоками. Границы блоков аппроксимируем прямыми. Примем, что между блоками возможны только касательные разрывы перемещений, т. е. эти границы являются линиями скольжения. Возможная кинематическая схема деформирования показана на рис. 8.14.

Если сопоставить данную схему с континуальной, например, в пластической задаче Ламе [233], то видно, что здесь из двух потенциальных семейств линий присутствует только одно семейство. Есть данные [281], что этот факт играет немаловажную роль именно при неустойчивом деформировании и разрушении (преобладание одного семейства линий над другим) (см. также гл. 7).

В рассматриваемой ближней зоне есть два свободных параметра: R_1 / R_0 — толщина зоны, κ — угол наклона линий скольжения к радиусам, которые регулируют конфигурацию и размеры блоков. Материал вне ближней зоны $r > R_1$ примем сплошным и упругим. Легко показать, что его влияние на блочную структуру можно моделировать упругими элементами (пружинами). Так, из классического решения упругой задачи Ламе [233] следует, что приращение радиального напряжения $\Delta\sigma_r$ зависит от приращения смещения в этом же направлении по закону $\Delta\sigma_r = -\frac{2\mu}{r} \cdot \Delta u_r$ (μ — упругий модуль сдвига среды).

Знак минус появился потому, что сжимающие напряжения приняты отрицательными. Таким образом, для внешнего упругого массива примем винклеровскую модель с коэффи-

циентом постели $k_m = \frac{2\mu}{R_1}$.

В работе [67] приведены осесимметричные решения для различных условий взаимодействия блоков по контактам. Получены оценки несущей способности в случаях жестко-

пластических контактов между блоками, а также при условии сухого трения. Показано, что данная схема допускает предельный переход к точным решениям задачи Ламе в континуальной постановке.

Рассмотрены случаи, когда увеличение относительного проскальзывания между блоками приводит к уменьшению силы взаимодействия между ними (разупрочнение). При малом разупрочнении процесс деформирования происходит устойчиво. Если разупрочнение больше критического — решение становится неустойчивым, что указывает на неконтролируемое высвобождение накопленной упругой энергии массива.

Как известно, построение решения поставленной задачи — это только часть дела. Необходимо еще понять, насколько построенное решение чувствительно к возмущениям,

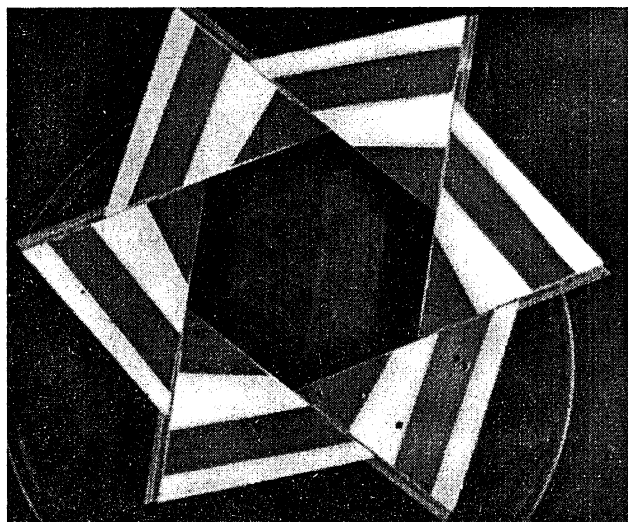


Рис. 8.15 а

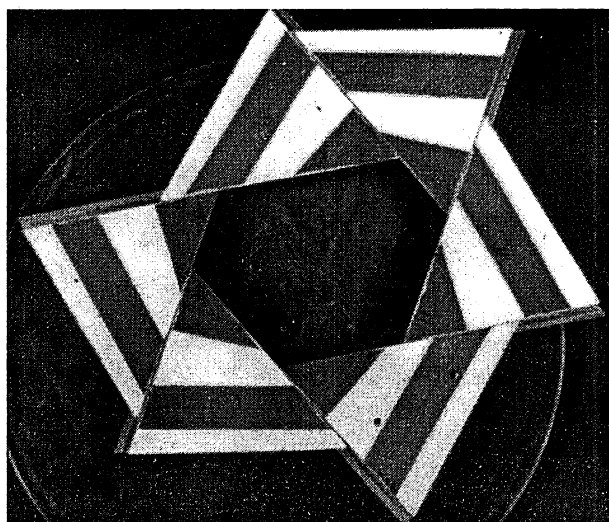


Рис. 8.15 б

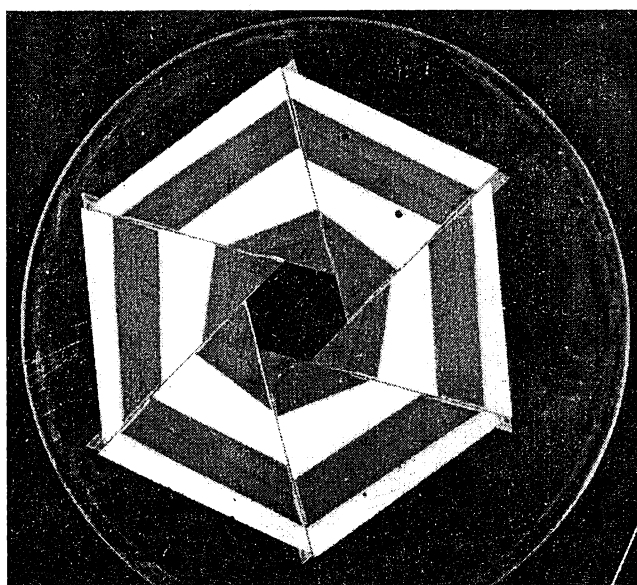


Рис. 8.15 в

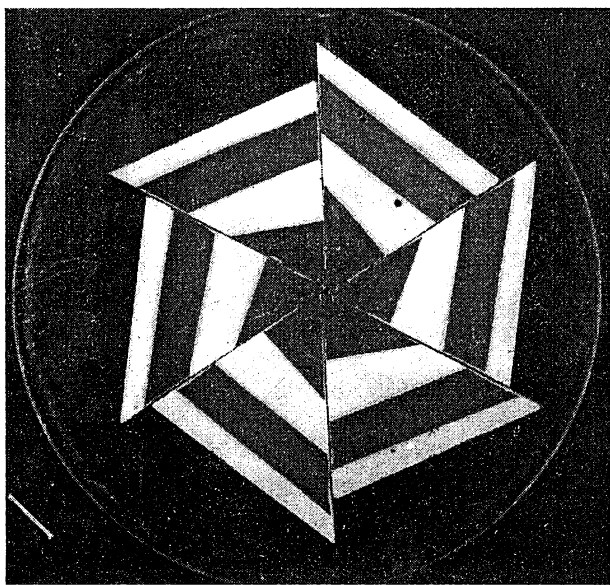


Рис. 8.15 г

т. е. оценить его устойчивость. В большинстве случаев этот вопрос решается интуитивно и особых затруднений не вызывает. Однако, есть ситуации, когда он становится весьма проблематичным.

Пусть, например, построено решение задачи о деформировании разупрочняющегося горного массива вокруг выработки. Эта задача допускает одномерную, осесимметричную постановку и может быть использована в качестве пробной при анализе различных моделей, описывающих разупрочнение массива. Однако, ценность таких осесимметричных решений уменьшается в связи с тем, что вопрос об их устойчивости становится неочевидным.

Здесь понятие устойчивости употребляется в обычном смысле: если малые возмущения в условиях нагружения или свойствах среды приводят к малым последствиям, то решение устойчиво, если нет — то неустойчиво. Можно иметь ввиду и бифуркационную трактовку. Устремим возмущения к нулю. Тогда нас будут интересовать такие сочетания параметров нагружения и массива, когда одним и тем же краевым условиям будут отвечать два существенно различных решения.

Следует отметить, что проверка устойчивости в классе осесимметричных решений больших трудностей не представляет. Основная проблема связана с анализом устойчивости самой осесимметричности решения. Трудность связана с тем, что для анализа такой устойчивости необходимо рассматривать уже неосесимметричные решения. В рассматриваемой постановке это усложнение принципиальным не является. На рис. 8.15 показаны фотографии модели, иллюстрирующей как симметричную, так несимметричную кинематику вплоть до полного схлапывания выработки. Анализ [68] показал, что:

1. Выработку и блочный горный массив вокруг нее можно характеризовать одним безразмерным параметром $\lambda \geq 0$. Этот параметр предопределяет поведение массива при любых изменениях горного давления и отпора крепи.

2. При $0 \leq \lambda < 1$ прогноз поведения однозначный: реакция массива на любые изменения горного давления и отпора крепи будет носить устойчивый характер.

3. Если $\lambda > 1$, то устойчивость реакции сохраняется только до определенного критического состояния. Параметры критического состояния зависят от горного давления, степени разупрочнения на контактах между блоками, геометрических размеров и упругих модулей. При переходе через критическое состояние происходит неконтролируемое динамическое высвобождение упругой потенциальной энергии массива.

Глава 9. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Элементы случайности присутствуют во многих процессах деформирования твердых тел. Так, случайная компонента содержится в характеристиках твердых тел, параметрах их нагружения и, как следствие, в самом процессе деформирования и разрушения. Решение вопроса о том, необходимо ли явно учитывать случайность или можно пользоваться детерминистскими методами зависит исключительно от конкретной ситуации. Выше рассматривались модели и задачи, в которых вполне было достаточно анализа усредненных и поэтому вполне детерминированных параметров. Существуют, однако, классы задач, где такого подхода уже недостаточно. Для их исследования необходимо привлечение стохастических методов (см., например, [282], где содержится дальнейшая библиография).

В настоящей главе рассмотрим задачи, где использование стохастических методов становится необходимым по существу. Первая задача связана с исследованием несущей способности сыпучей среды. Обычно подобные задачи ставятся как детерминированные и решаются в рамках теории предельного состояния. В [72, 73], однако, был обнаружен эффект, когда несущая способность основания может быть исчерпана при нагрузках, гораздо меньших предельных.

Существо дела проще всего пояснить на следующем примере. Установим на основание из сыпучего материала модель колонны. Приложим к ней постоянный статический момент, гораздо меньший предельного (то есть опрокидывающего). Вся система будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Причем в таком состоянии она может находиться сколь угодно долго. Будем теперь наносить по конструкции (вдали от колонны) слабые удары. Оказывается, что возможны случаи, когда в течение длительного времени система сохраняет устойчивость, а затем наступает внезапная катастрофа. При этом время до катастрофы от опыта к опыту может значительно меняться. Последнее связано с влиянием случайных факторов, которые в этой задаче необходимо учитывать явно.

Представляют интерес также различные смешанные постановки задач, когда задача в целом ставится как стохастическая, но основные ее вероятностные характеристики выбираются либо на основе экспериментальных данных, либо на основе решения задач в детерминированной постановке. В § 9.2 этот подход использован для построения компьютерной модели процесса формирования полигональной системы трещин, описанной в § 7.3.

Далее, как известно, в механике принято различать прямые задачи, когда заранее заданы деформируемая область, ее свойства и способ нагружения, и обратные задачи, когда свойства материала или условия его нагружения заранее неизвестны (например, задачи

оптимизации). Отмеченные выше стохастические задачи можно отнести к прямым. Однако в рамках стохастического подхода возможно решение и обратных задач. Более того, такие решения могут подсказать и основные конструктивные черты реальных устройств для реализации оптимальных процессов. В § 9.3 это показано на примере решения задачи создания смесителей порошковых материалов, близких к теоретически идеальным.

В § 9.4 рассмотрена стохастическая модель для исследования кинематики движения сыпучих материалов в сходящихся каналах.

§ 9.1. КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДСТВИЯ ДЛИТЕЛЬНЫХ СЛАБЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СЫПУЧУЮ СРЕДУ

Все процессы деформирования геосреды можно разделить на два класса: устойчивые процессы и неустойчивые. Устойчивые процессы, как известно, характеризуются тем, что в них малые возмущения вызывают малые последствия. В неустойчивых процессах, напротив, малые возмущения приводят к несоизмеримо большим последствиям. В определенной степени такое разделение условно. Это связано с тем, что в реальных условиях можно наблюдать только устойчивые процессы и состояния. Вопрос о том, что считать возмущением, а что следует отнести к основному невозмущенному процессу может решаться по-разному. С другой стороны, если построить математическую модель, то появляется принципиально новая возможность, а именно: в теории можно реализовать (численно или аналитически) неустойчивые состояния. Следовательно, в этом смысле их можно и наблюдать. Последующий бифуркационный анализ или расчет скорости роста возмущений позволяет дать уже однозначные формулировки.

Как правило, большинство процессов развиваются вначале устойчиво. Затем в силу разных причин в системе „созревает“ критическое состояние и происходит катастрофический переход в новое устойчивое состояние.

Здесь возникает много проблем. Одна из первых — это выяснение того, что именно служит причиной перехода системы в критическое состояние, какие скрытые условия и параметры управляют таким переходом? Иногда причина перехода, по крайней мере, в первом приближении лежит на поверхности. Например, когда нагружение осуществляется в пространстве одного измерения. В простейшем варианте — тонкий упругий стержень или образец горной породы сжимаются силой, которая монотонно увеличивается. В первом случае переход через критическое состояние (катастрофа) приводит к потере устойчивости, во втором — к разрушению образца. Можно сказать, что здесь причина катастрофы — сжимающая сила. Следующее приближение требует исследования начальных несовершенств стержня, исходных трещин в образце и т. д. Таким образом, в указанном примере катастрофа происходит вследствие однократного приложения достаточно большой сжимающей силы. Часто можно наблюдать противоположную ситуацию, когда „подталкивание“ системы к катастрофе вызывается совершенно незначительными на первый взгляд причинами. Если такие причины действуют на фоне каких-то других факторов, которые сами по себе кризиса не вызывают, но действуют систематически в течение длительного времени, то система также может подойти к катастрофе.

Здесь основным становится свойство системы в той или иной форме „запоминать“ свою историю. Действительно, пусть тело является, например, идеально упругим. Такое тело „помнит“ только свою начальную конфигурацию. Поэтому любые длительные сла-

бые воздействия к накоплению необратимых изменений не приведут, а значит, и не могут повлиять на „подталкивание“ упругой системы к катастрофе.

Для неупругих тел ситуация иная. Здесь каждый цикл нагружения приводит к необратимому рассеянию энергии. Однако и в этом случае может произойти выход на стационарное состояние так, что эволюция системы прекратится.

Таким образом, для поиска новых нетривиальных ситуаций необходимо обратиться к неупругим средам и нестационарным процессам их деформирования. Ограничимся процессами деформирования геосреды и, более узко, процессами деформирования сыпучей среды. Сыпучий материал удовлетворяет всем исходным требованиям.

Во-первых, для сыпучих материалов ярко выражены допредельное и предельное состояния. Кроме того, даже если внешняя деформация носит допредельный характер, на микроуровне всегда находятся предельные контакты между частицами. Скольжение по ним и приводит к необратимым изменениям. И главное — сыпучий материал является простейшим представителем геоматериалов и отражает многие их свойства. Рассмотрим конкретные примеры.

1. Потеря устойчивости тяжелой колонны. Возьмем цилиндрическую емкость из тонкой стали диаметром 260 мм высотой 180 мм. Наполним ее кварцевым песком крупностью 0,3—0,5 мм. Засыпку уплотним ударами резинового молотка. На поверхность сформированного основания вертикально поставим металлический цилиндр. Вес цилиндра — 57 Н, диаметр 70 мм. Система „колонна — сыпучий материал“ находится в устойчивом равновесии. Возникает вопрос, как долго можно сохраняться такое равновесие, если в систему вносить слабые возмущения?

Поступим таким образом. Приложим к колонне опрокидывающий момент M . При достижении величиной M критического значения $M^* = 1,06$ Нм колонна опрокинется. Выберем теперь устойчивое состояние равновесия при некотором постоянном $M < M^*$ ($M = 0,45M^*$) и будем воздействовать на слой сыпучего материала слабыми ударами с частотой 2 Гц и энергией каждого удара $8 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Эксперименты показывают, что после приложения ударных воздействий начинается медленная эволюция системы к новому состоянию. Слой сыпучего материала, воспринимающий нагрузку, постепенно накапливает пластические деформации и колонна постепенно наклоняется. Когда наклон достигает критической величины, несущая способность основания исчерпывается, и колонна опрокидывается (происходит катастрофа).

Следует отметить, что число ударов до катастрофы характеризуется большим разбросом. Для описанных условий число ударов по данным пяти экспериментов изменялось от $6 \cdot 10^3$ до $158 \cdot 10^3$.

2. Неустойчивость прямого среза. Один из важных видов деформаций геоматериалов связан с их срезом. В настоящее время для исследования среза разработана серия различных приборов. В них в том или ином варианте реализуется нагружение, которое приводит к срезу и движению одной части образца относительно другой. Результаты, полученные на различных приборах, показывают, что вначале процесс среза носит устойчивый характер. Затем наблюдается переход в предельное состояние, когда деформация неограниченно растет при постоянных или уменьшающихся силах. В работе [72] показано, что подобный эффект можно получить и за счет длительных слабых воздействий.

3. Неустойчивость при длительных слабых перегрузках. Далее рассмотрим результаты экспериментов на сыпучем материале, находящемся под действием постоянной срезающей нагрузки и слабой вибрации. Опыты проводились на стенде, схема которого показана на рис. 9.1. Цилиндрическая емкость 1 диаметром 160 мм и высотой 50 мм жестко закреплялась на вибраторе (на рисунке не показан). На оси емкости находился ротор 2 с лопастями, выполненный как показано на схеме. Его наружный диаметр 42, а высота 40 мм. Он мог легко вращаться, но не имел свободы перемещений в вертикальном направлении.

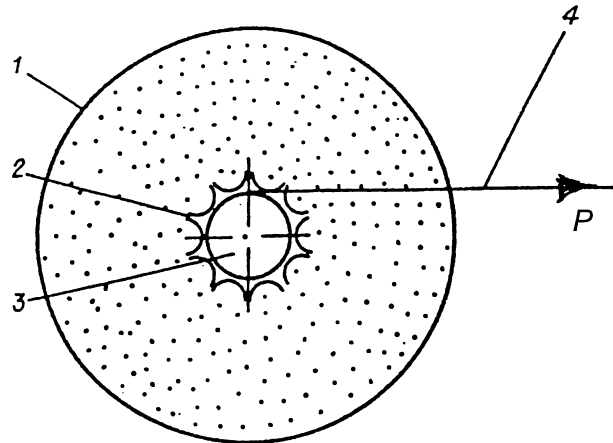


Рис. 9.1

В верхней части ротора располагался шкив 3, на который наматывалось 10—15 витков нихромового провода 4 диаметром 0,3 мм. На расстоянии 1,5 м от емкости провод обматывался на один оборот вокруг шкива, вращение которого передавалось на десятиоборотный потенциометр, предназначенный для измерения угла поворота ротора. К свободному концу провода через блок (на рисунке не показан) прикладывалась постоянная сила P . Для этого силы использовался груз заданного веса.

Эксперименты проводились в следующем порядке. Емкость через воронку заполнялась кварцевым песком с размером частиц 0,5—1 мм. Затем включался вибратор и материал уплотнялся в течение 40 мин. Амплитуда колебаний при этом составляла 0,53 мм, а ускорение $a = 0,6g$ (g — ускорение свободного падения). Этот режим уплотнения был выбран на основе предварительных экспериментов, в которых было установлено, что для исследуемого материала он является наиболее оптимальным. Вибрации с большими ускорениями приводили к возникновению в материале различных течений, а с меньшими — давали менее плотную упаковку. После уплотнения материала вибратор выключался и к ротору прикладывался монотонно возрастающий крутящий момент. Записывалась диаграмма зависимости угла поворота ротора от величины момента. Для моментов M , меньших критического M^* , нагружение носит устойчивый характер. При достижении моментом критического значения материал разуплотнялся, происходили срез и потеря устойчивости.

После определения критического значения M^* весь опыт повторялся, проводилась новая засыпка; материал уплотнялся снова и затем нагружался постоянным моментом, составляющим определенную часть от критического. Под действием этого момента ротор вначале поворачивался на малый угол, а затем устанавливалось устойчивое равновесие. После этого к емкости прикладывалась слабая вибрация. Вначале никаких видимых последствий не наблюдалось. Однако, если вибрация продолжалась в течение длительного времени (в некоторых опытах ~ 10 ч), последствия становились значительными. В качестве примера на рис. 9.2 а приведена экспериментальная зависимость угла поворота ротора от времени вибрации с ускорением $a = 0,3g$ для момента $M = 0,7M^*$, а на рис. 9.2 б зависимость скорости вращения ротора от времени.

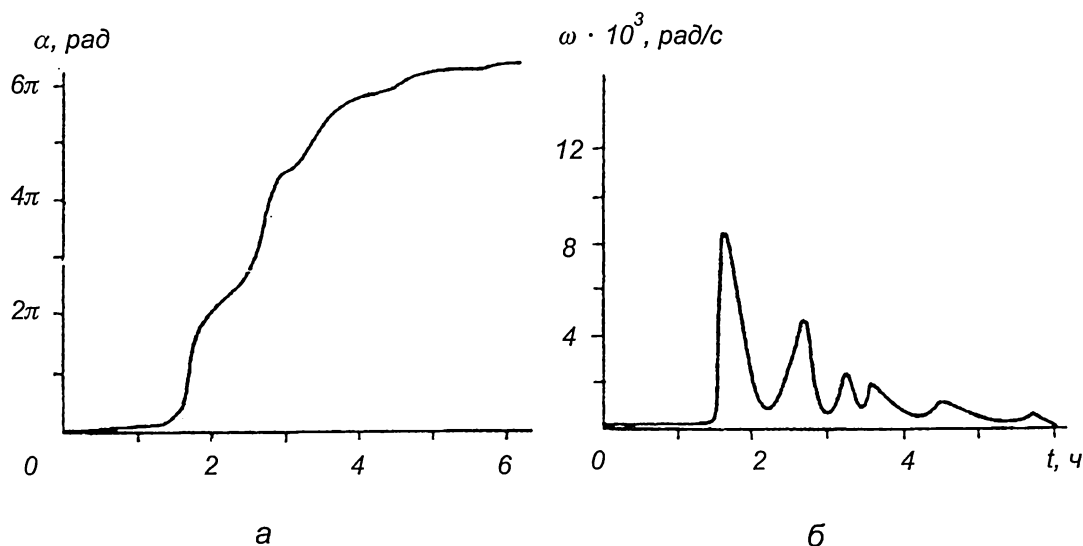


Рис. 9.2

Видно, что в течение 1,5 ч с момента приложения вибраций происходит очень медленный поворот ротора со средней скоростью $\omega \approx 10^{-4}$ рад/с. Когда угол поворота приближается к 30° , скорость вращения возрастает на два порядка и, проходя через максимум, уменьшается, затем вновь возрастает, снова падает и т. д. Постепенно система „успокаивается“ и наступает стационарная стадия процесса, которая характеризуется установившимся режимом вращения ротора. Для этого режима наблюдаются небольшие пульсации мгновенной скорости.

Таким образом, сыпучий материал, находящийся в допредельном состоянии, под действием статической срезающей нагрузки и слабых вибраций со временем переходит в другое состояние, для которого характерно непрерывное увеличение деформаций. Переход из одного состояния в другое происходит скачкообразно, а для процесса в целом характерны две стадии. На первой стадии происходит эволюционное накопление деформации образца. На второй стадии система скачком переходит в новое состояние, которое является стационарным.

Дальнейшее развитие полученных результатов изложено в [73]. В [73] рассмотрена структура кривых, описывающая кинематику процесса в зависимости от числа ударов. Показано, что кривые имеют несколько масштабных уровней. В „целом“ кривые имеют гладкий характер. Однако при изображении их в большем масштабе видны последовательности микроскачков, так как процесс деформирования сопровождается последовательностью микрокатастроф. (Некоторые вопросы описания подобного рода кривых с различными масштабными уровнями рассмотрены в главе 12).

Как отмечалось, все системы, которые подходят к критическому состоянию, становятся чувствительными к слабым возмущениям. Рассмотренные выше случаи подтверждают это. Например, после длительных ударных воздействий катастрофы иногда вызывались громким звуком или стуком двери, хотя вначале эти причины на процесс никакого влияния не оказывали. Поэтому во всех опытах наблюдался большой разброс числа слабых ударов и времени вибрации до катастрофы.

Таким образом, основной параметр процесса — время эволюции системы до катастрофы — является величиной случайной. Поэтому определение её в рамках детерминированных моделей невозможно. В [73] приведены некоторые вероятностные характеристики для одного из подобных процессов. Для получения общих вероятностных закономерностей нужны систематические исследования в более широком диапазоне параметров.

§ 9.2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Трещины в горных породах составляют сложные пространственные сети. Строение сетей трещин определяет деформационные, прочностные, фильтрационные свойства массивов горных пород. Сведения о трещиноватости являются необходимыми при разработке полезных ископаемых, проектировании строительных объектов, изучении деформирования земной коры.

В настоящее время имеется ряд монографий, посвященных изучению трещиноватости горной породы и ее инженерной оценке. В этих работах заключен обширный фактический материал, полученный из опытов и наблюдений. Но на практике обычно невозможно задокументировать все трещины исследуемой среды. В такой ситуации необходимо привлечь статистические методы исследования, основанные на изучении конечных выборок из практически неограниченного множества трещин. Поэтому строятся различные модели трещиноватости, отражающие ту или иную особенность в строении и поведении материала, из которого состоит массив горной среды. Известны различные модели, позволяющие вычислять их проницаемость, деформируемость, параметры блочности и др. Как известно, универсальной модели не существует. Поэтому каждая из них предназначена для описания только определенного круга задач.

Ниже ставится задача теоретического описания плоской полигональной системы трещин [71]. Результаты натурных наблюдений за такими трещинами приведены в [283], данные по моделированию подобных систем в лабораторных условиях приведены в § 7.3 и [284, 285]. Можно выделить два подхода к теоретическому исследованию указанной задачи. Первый состоит в разработке математической модели процесса в рамках той или иной модели материала, выбора критерия разрушения и решения последовательности краевых задач. Здесь, однако, есть одно существенное обстоятельство, которое затрудняет использование обычного детерменистского подхода. Оно связано с тем, что в данном случае реализуется множество трещин и существенным становится элемент случайности. Потому необходимо использование стохастических моделей.

Рассмотрим плоскую модель. Это означает, что трещины развиваются в некотором слое материала постоянной толщины h . Предположим, что слой подвержен двухосному растяжению. Если слой является достаточно протяженным в направлениях x и y , то ситуация для каждой точки (x, y) будет симметричной, т. е. формируется напряженно-деформированное состояние, которое не зависит от координат точек x и y . Влияние границы слоя может простираться только на расстояния порядка h в глубину области, то есть толщины слоя. Следовательно, вдали от границ все точки области будут равноправными. Поэтому координаты точки, из которой стартует трещина, являются случайными. Для выбора координат точек, из которых стартуют трещины, можно использовать датчик случайных чисел.

Точно так же в определенных пределах и ориентацию трещины можно считать случайной. Более того, можно допустить, что само число трещин, стартующих из точки, является случайным. Таким образом, речь идет о компьютерной имитационной модели процесса. При таком подходе данные о критерии разрушения и других механических свойствах материала, а также характер нагружения учитываются через плотности вероятностей соответствующих параметров. Построенная ниже модель учитывает основные экспериментальные факты. Так, если в процессе нагружения образуется магистральная трещина, то следующая трещина может развиваться только до пересечения с ней.

Данная модель имеет достаточное число степеней свободы. Можно предположить, что трещины стартуют одновременно из разных точек, причем каждая из трещин развивается либо до границы, либо до пересечения с предыдущей трещиной. Можно также старт трещин задавать последовательно: вначале реализовать первую трещину, затем — вторую и т. д.

Предположим, что материал является идеально хрупким и критерий разрушения сводится к наибольшему растягивающему напряжению. Рассмотрим вначале случай, когда растяжение происходит только в направлении оси x , а затем, после формирования системы трещин — вдоль оси y . Ясно, что согласно выбранному критерию разрушения, трещины должны ориентироваться ортогонально направлениям растяжения. Все точки здесь симметричны и напряженное состояние вначале близко к однородному. Поэтому распределение вероятностей, описывающее координаты точек, из которых стартует трещина, берем однородным. В алгоритме трещина идет либо до пересечения с границей, либо до пересечения с другой трещиной. На рис. 9.3 показана типичная картина, которая получается в результате последовательного нагружения вдоль оси Ox и затем — оси Oy (структура типа „кирпичной кладки“).

Рассмотрим другой крайний случай. Предположим, что слой растягивается равномерно вдоль направлений Ox и Oy (рис. 9.4). В качестве первого шага берется координата первой

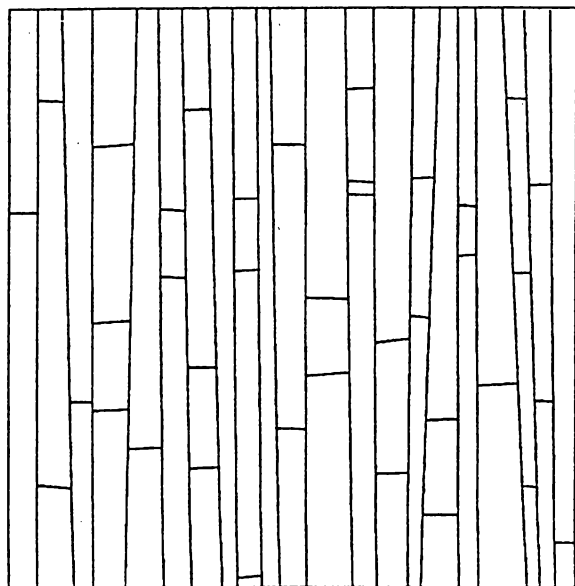


Рис. 9.3

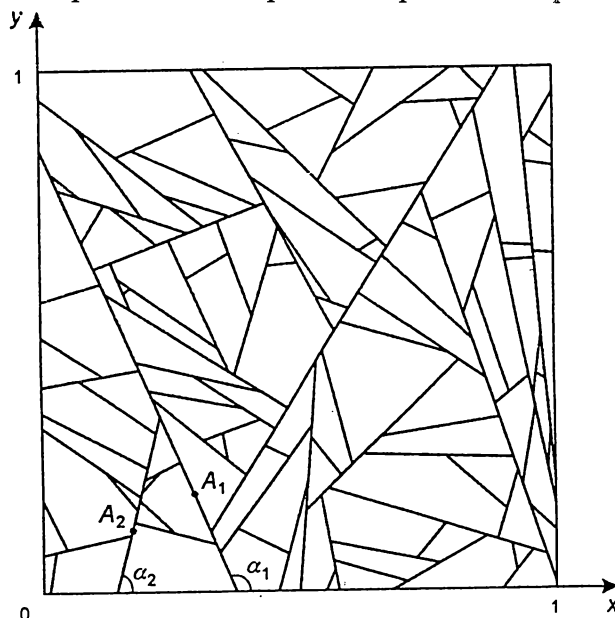


Рис. 9.4

точки $A_1 = (x_1, y_1)$. Так как растяжение по осям Ox и Oy является равномерным, то это означает, что оно будет равномерным и по всем остальным направлениям. Поэтому ориентация линии разрыва также будет случайной. Следовательно, в качестве второго шага выбирается угол α — наклона линии. Выбранная линия продолжается из точки A_1 в направлении α до выхода линии на границу области. Факт равномерности распределения означает, что все направления для α выбираются равновероятными. Итак, теперь получено две области, разделенные первой трещиной. Применяя те же самые построения для последующих линий, приходим к модели плоской полигональной системы.

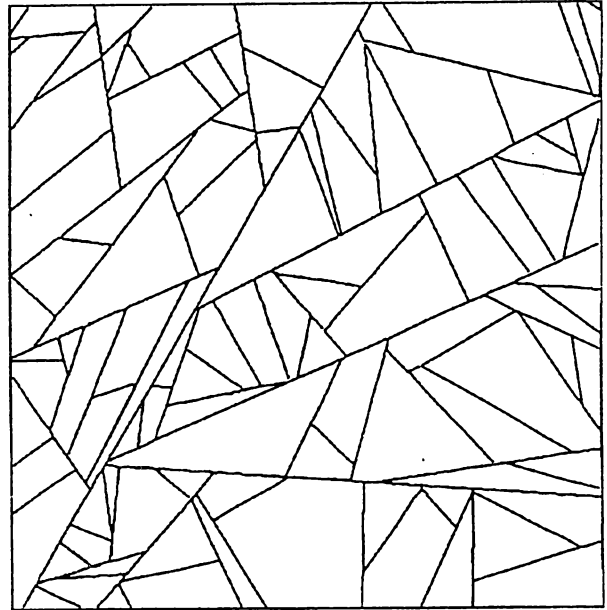


Рис. 9.5

Перейдем к численной реализации. Пусть в декартовой системе координат (x, y) задана область в форме единичного квадрата: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Обозначим через N число трещин в одном эксперименте. Рассмотрим точку A_1 с координатами (x_1, y_1) так, что $x_1, y_1 \in E[0, 1]$ (запись $\xi \in E[a, b]$ обозначает равномерное распределение случайной величины ξ на отрезке $[a, b]$). На втором этапе выбираем угол $\alpha_1 \in E[0, \pi]$. Так как любую прямую на плоскости можно характеризовать точкой (x_0, y_0) , принадлежащей этой прямой и углом наклона α к оси Ox , то через точку A_1 можно однозначно провести прямую с углом наклона к оси Ox , равным α_1 . Таким образом, на первом шаге получается отрезок, принадлежащий заданной области. На втором шаге определяем точку $A_2 = (x_2, y_2)$, угол α_2 ($x_2, y_2 \in E[0, 1]$, $\alpha_1 \in E[0, \pi]$) и проводим следующий отрезок до пересечения с первым отрезком и с границей области. Продолжая этот процесс N шагов, получаем модель плоской полигональной сети трещин с равномерным распределением углов наклона трещин α_i : $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ ($i = 1, \dots, N$). На рис. 9.4 представлена система трещин для значения $N = 100$.

Теперь введем дополнительный параметр. Известно, что вокруг трещины образуется определенная область разгрузки. Обозначим ширину этой области через ρ и будем считать, что $\rho = \text{const}$. Параметр ρ вводился следующим образом. Первая точка сети трещин $A_1 = (x_1, y_1)$ выбиралась произвольно, а на выбор остальных $A_i = (x_i, y_i)$ накладывалось следующее условие, а именно: вероятность попадания точки A_i в области шириной 2ρ , ограничивающие каждую из i -х предыдущих трещин, равна нулю. Результат построения представлен на рис. 9.5.

Из определения нового параметра можно видеть, что его введение накладывает ограничения на процесс появления трещин. Так, уже нельзя произвольно задавать значение N — количество линий. На рис. 9.6 представлена зависимость $N = N(\rho)$, где верхний график означает максимально возможное количество линий для фиксированного значения ρ , а нижний — минимальное. Заметим, что при значениях $\rho \geq 1/8$ вплоть до $\rho = 1$ функция

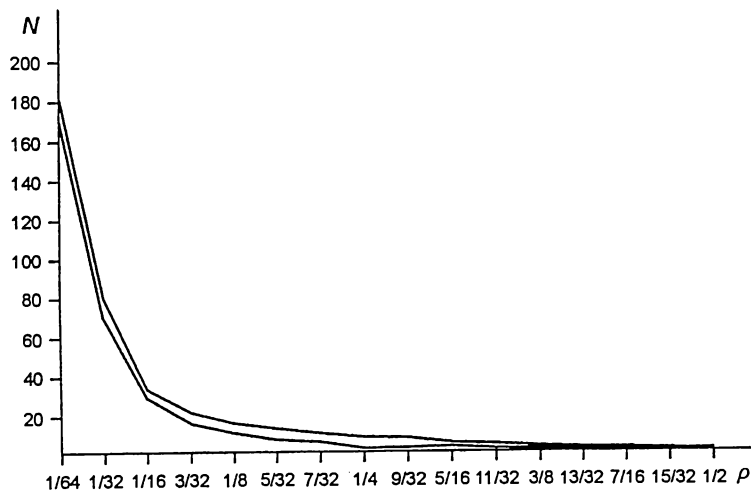


Рис. 9.6

узлов M , в которых смыкаются трещины, получаем значение общего числа трещин N , зависящее от числа узлов.

Далее рассмотрим общую модель, включающую в себя все указанные выше предположения. Основой этой модели служит тот факт, что трещины возникают в слое не последовательно, а одновременно. Задавая число узлов M , для каждого узла на основе [286] задаем также количество линий, выходящих из этого узла. Затем процесс роста реализуем одновременно для всех трещин. Предположение о том, что рост каждой трещины продолжается либо до пересечения с границей, либо до пересечения с ранее прошедшей трещиной, сохраняется, как и в ранее рассмотренных моделях. Результат построения для $M = 100$ представлен на рисунке 9.8.

$N(\rho)$ изменяется незначительно, в то время как при $\rho \leq 1/8$ наблюдается весьма резкое возрастание значений $N(\rho)$. Естественно, что при $\rho = 0$ выполняется переход к рассмотренной ранее модели.

Рассмотрим еще один случай образования трещин. Своеобразие сетей трещин проявляется также и в способе пересечения трещин. По подсчетам, приведенным в [286], для рассматриваемых сетей трещин характерно смыкание трех лучей.

Результат построения с учетом указанного фактора показан на рисунке 9.7. Здесь, задавая число

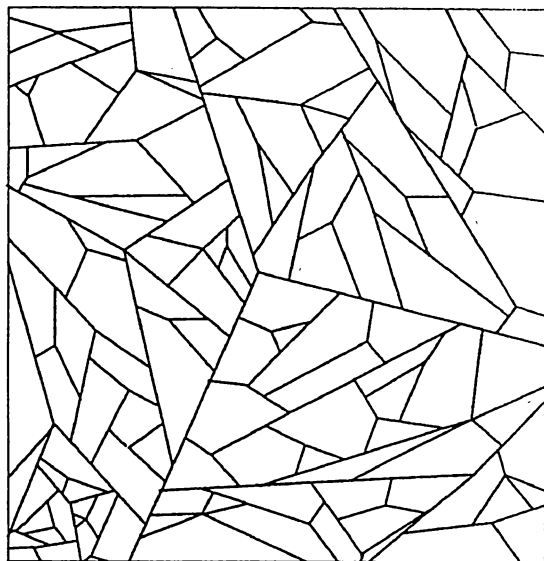


Рис. 9.7

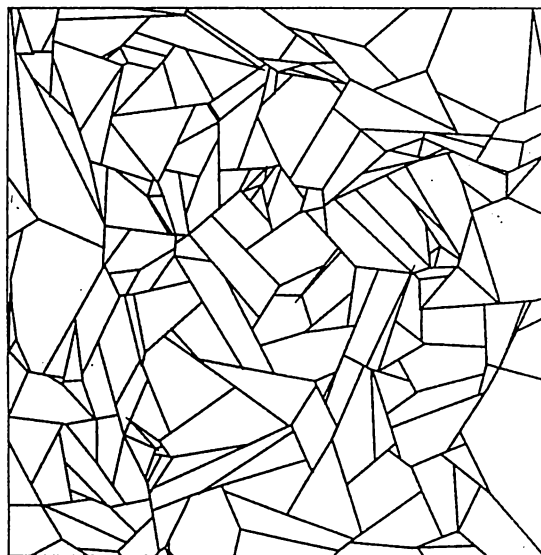


Рис. 9.8

Приступим к исследованию статистических свойств полученных систем. Вопрос о форме полигонов, образуемыми трещинами, является весьма интересным. По наблюдениям [284] в базальтах и на такырах преобладают пяти- и шестигранные отдельности. Он соответствует всестороннему растяжению пластины, когда все направления для распространения трещины первоначально равноправны. (см. § 7.3). В этом случае наблюдается преобладание пятиугольных полигонов.

Построенные на рисунках 9.4, 9.5 и 9.7 сети трещин не отражают данной закономерности. В них преобладают трех- и четырехсторонние, реже — пяти и шестисторонние отдельности. Минимальное и максимальное количество полигонов с числом граней, равным 3, 4, 5 и 6 находятся в пределах 25–30%, 40–50%, 15–25% и 1–5% соответственно для различных значений N , которые выбирались равными 10, 20, ..., 100. То есть на долю пяти- и шестисторонних полигонов приходится в сумме от 16 до 30% от общего числа трещин. В модели с введенной шириной области разгрузки распределение числа сторон полигонов, образуемых трещинами, уже более приближено к практическим опытам. Так, для рис. 9.5, число получившихся полигонов равно 117, из них: трехсторонних — 16, четырехсторонних — 59, пятисторонних — 34. То есть видно, что получающаяся картина растрескивания в данной модели уже ближе к реально существующим системам трещин.

Эти две модели построены на основе равномерного распределения углов наклона α_i , а также на основе того, что трещины возникают последовательно. Задавая α_i по более сложному вероятностному закону, можно получить картину растрескивания, приближенную к реальным наблюдениям. Один такой пример („кирпичная кладка“) показан на рис. 9.3, где вначале выбирались $\alpha_i = \pi/2 \pm \delta$, а затем $\alpha_i = 0 + \delta$ и $\alpha_i = \pi - \delta$ ($\delta > 0$ — малая величина). Выбирая значения α_i по каким-либо другим законам, можно получать самые различные картины растрескивания. Однако, на форму полигонов оказывает влияние не только выбор углов наклона, но и предположение об одновременном росте трещин. Проводя анализ формы полигонов сети трещин, представленной на рисунке 9.7, получаем следующее распределение для 3-, 4-, 5- и 6-сторонних отдельностей: 18%, 35%, 33%, 13% соответственно.

Важные закономерности строения сетей трещин были выявлены при анализе трещин усыхания и трещин коры деревьев [142] (которые были подтверждены впоследствии при исследовании растрескивания стекла при резком охлаждении), а также при гранулометрическом анализе грунтов [160, 287]. В итоге было установлено „правило одинаковых площадей“ [283], согласно которому для площадей всех полигонов существует некоторый преобладающий размер, такой что число полигонов с этим размером является наиболее часто встречающейся. Величина площадей при этом подчиняется нормальному распределению. Объяснить это можно тем, что существует некоторый критический размер в растягиваемом слое S^* , такой что если $S < S^*$, то трещины не образуются и наоборот, при $S > S^*$ площадка рвется трещиной. Это правило выражает равномерность растрескивания однородного слоя по площади. Правило одинаковых площадей проявляется и в построенных моделях, в частности, для равномерного распределения углов наклона трещин $\alpha_i \in E[0, \pi]$. На рис. 9.9 показана плотность ρ_s распределения площадей S полигонов, полученных в одном эксперименте с равномерным распределением углов α_i . Из приведенного графика зависимости видно, что принятая модель также дает преобладающий размер полигона (для каждого фиксированного N).

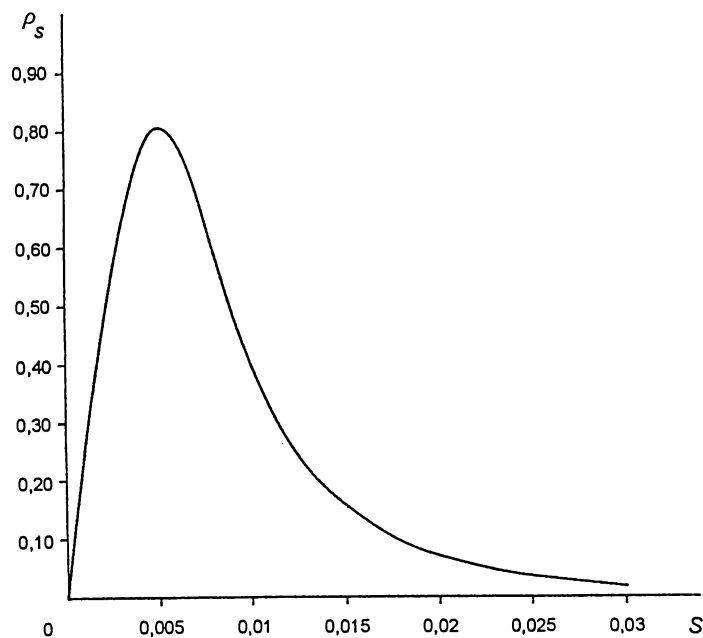


Рис. 9.9

Каждому N соответствует своя реализация эксперимента, своя картина растрескивания. Ясно, что для одного и того же N будут в зависимости от реализации получаться разные длины. Общая длина, следовательно, будет также различной для различных экспериментов. От одной реализации к другой общая длина будет меняться при фиксированном N . С другой стороны, численный эксперимент показывает, что все эти характеристики становятся достаточно устойчивыми. А именно, брались следующие величины: число линий $N = 10, 20, \dots, 90; 100, 200, \dots, 1000$; количество экспериментов для каждого N бралось равным двадцати. Из полученных графиков видно, что общая длина трещин (для фиксированного N) содержится в довольно малом интервале. Такой результат является

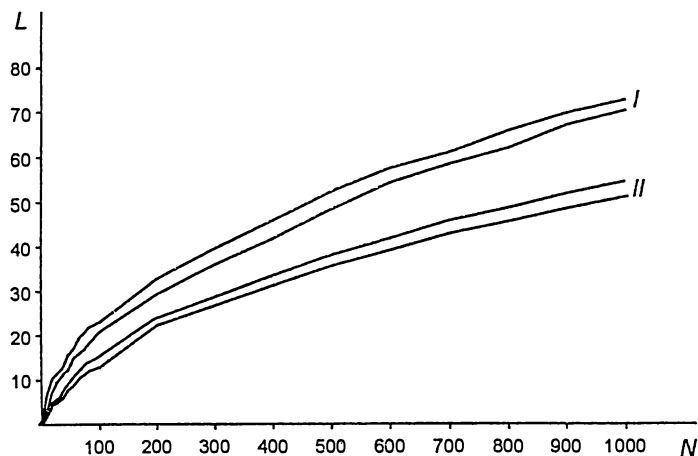


Рис. 9.10

В горном деле и строительстве весьма важной характеристикой является проницаемость породы. Для оценки проницаемости используются такие параметры как длина трещины и раскрытие ее на единицу площади. В представленных выше моделях нет необходимости во введении параметра, характеризующего раскрытие трещины, так как трещина моделируется математическим разрезом. Но можно легко найти общую длину трещин. Полученная зависимость общей длины линий от их числа показана на рисунке 9.10, где цифрой *I* обозначен график зависимости $L(N)$ для первых трех моделей, цифрой *II* — для последней модели. В этом случае численный эксперимент делается следующим образом. Выбирается определенное число линий N .

весьма интересным, тем более, что заранее он не предполагался. Если теперь ввести некоторую величину a — ширину трещины, то зная число трещин на единицу площади, можно легко получить величину раскрытия данной сети трещин. Значение a можно выбирать не постоянной, а зависящей от времени ($a = a(t)$, где время t — возраст трещины), либо, что то же, от числа поколений: $a = a(T)$, где T — номер поколения (так как в одной сети трещин предыдущие поколения имеют ширину больше, а каждое последующее — меньшую; трещины, возникшие

раньше — более широкие, а позже — более узкие). Номер поколения можно оценивать по длинам трещин: первые трещины (магистральные) — длинные, они (в большинстве) проходят через всю область, а последующие — более короткие, так как их развитию препятствуют предыдущие поколения. Данная посылка неприменима к последней модели, так как в ней все трещины растут одновременно.

В заключение отметим следующее. Если считать, что свойства материала от масштаба не зависят, то на основе построенной модели можно получить иерархию структурных уровней. Причем нетрудно доказать, что структуры на всех уровнях будут самоподобными (формально можно допустить бесконечное их множество и получить структуру типа фрактальной). Действительно, пусть задана определенная область разгрузки ρ . Как отмечалось, это приведет к тому, что число возможных трещин в области будет ограничено. При заданном ρ мы получаем вполне определенный средний размер куса и дальше растрескивания на этом этапе происходить уже не будет. Предположим, что нагружение продолжается и каждый из полученных блоков может начать дробиться дальше (естественно, с уже меньшей областью ρ_1). Численные эксперименты показывают, что картины трещин и их статистические характеристики от конфигурации границы практически не зависят. Это означает, что границы блока на статистические свойства не влияют и это приведет к тому, что блоки следующих поколений будут обладать теми же самыми статистическими свойствами, что и предыдущие.

Таким образом, предположения физического характера позволяют построить модель плоской полигональной сети трещин. Распределение площадей, полученных при растрескивании полигонов, подчиняется нормальному закону (как и в натурных исследованиях). Полученная в результате численных опытов зависимость $L(N)$, где L — общая длина трещин, N — их число (рис. 9.10), имеет малый диапазон разброса для большого числа экспериментов. Это означает, что основные характеристики случайного процесса являются вполне детерминированными и устойчивыми.

§ 9.3. СМЕШЕНИЕ СЫПУЧИХ (ПОРОШКОВЫХ) МАТЕРИАЛОВ

Очень редко сыпучие материалы представлены частицами одной фракции и формы. Чаще всего их грансостав имеет широкий спектр и поэтому для получения достоверных экспериментальных данных необходимо проводить операцию усреднения. В более общем случае можно говорить о смешении различных сыпучих или порошковых материалов. Операция смешения является составной частью многих технологических процессов и ее изучение представляет большой интерес.

В главе 7 рассматривались процессы самоорганизации в нелинейных средах. Процесс смешения в определенном смысле носит противоположный характер. Действительно, эволюция всех систем, которые наблюдаются в природе, имеет две тенденции: 1) увеличение в системе хаоса, беспорядка; 2) возникновение порядка, самоорганизация. В самом обычном проявлении увеличение хаоса приводит к тому, что система „забывает“ свою историю и в конце концов приходит к такому состоянию, которое от начальных данных и истории развития (а точнее, истории деградации) вообще не зависит. Это состояние является стационарным. На нем эволюция прекращается. Один из примеров всем хорошо известен по собственному опыту: если не принимать специальные меры, то беспорядок в квартире

будет только нарастать. Специальные же меры по восстановлению порядка всегда связаны с затратами энергии и определенными интеллектуальными усилиями.

В некоторых случаях ставится противоположная задача: осуществить меры, которые ускорили бы эволюцию системы и перевели ее в стационарное состояние как можно быстрее. Такое вмешательство также требует затрат усилий и энергии, хотя цель здесь не „наведение порядка“, а напротив — быстрое достижение максимального беспорядка. Иногда подобные задачи имеют практический смысл. Задача о смешении порошковых материалов является одной из них [288].

9.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть имеются два порошковых материала (компонента) A и B . Они заранее отдозированы в нужном рецептурном отношении. Через A обозначен ключевой компонент. По определению его объем не больше, чем компонента B . Оба компонента представляют собой сухие порошковые материалы, состоящие из отдельных твердых частиц. Частицы A и B могут отличаться между собой формой, размерами и, главное, могут иметь существенно различные удельные веса. Предположим, однако, что если смесь A и B создана, то самопроизвольно она уже не разделяется. Исходная задача состоит в том, чтобы поместить материалы A и B в заданную емкость V так, чтобы они были равномерно распределены один в другом. Таким образом, речь идет о дискретном процессе смешивания.

Возможны два пути решения поставленной задачи. Первый состоит в следующем. В емкость V укладывается необходимое число частиц компонента B . Затем между ними помещается частица A и т. д. В результате получается однородная упаковка. Как правило, непосредственное осуществление этого способа нереально ввиду громадного числа частиц и малости их размеров. Можно искать технически приемлемые способы „укладчика“ частиц. Этот путь является детерминистским.

Второй путь отличается от первого принципиально. Он связан с тем, что реализуются определенные случайные перемещения частиц, которые и приводят к перемешиванию. Для случайного процесса исходную постановку задачу необходимо уточнить. Во-первых, необходимо уточнить конечную цель — получение однородной смеси. Предположим, что существует некоторый минимальный объем ω , в пределах которого распределение компонентов значения не имеет. Тогда требование однородности означает, что в любой области ω , выделенной из V соотношение компонентов A и B должно быть таким же, как и во всем объеме V . Или, точнее, для любой выделенной из материала области, объем которой равен величине ω , вероятность отклонения от рецептурного соотношения на величину, большую допустимой ε , должна быть меньше определенного наперед заданного значения Δ .

Последнее требование ставит теоретический предел для возможностей стохастических способов перемешивания. Этот предел можно рассчитать точно. Например, найти нижнюю оценку величины ω как функции объема V , отклонения ε и вероятности Δ при заданном числе и относительных размерах частиц компонентов A и B . С другой стороны, величина ω определяется технологическими требованиями. Фактически объем ω равен объему пробы, который берется для контроля качества смеси. Если по рецептурному требованию количество частиц A и B в объеме ω достаточно велико, то вероятность недопустимых

флуктуации становится пренебрежимо малой. В большинстве случаев имеет место именно такая ситуация. Ниже ограничимся только этим вариантом. Последнее означает, что для приготовления однородной смеси использование стохастических процессов допустимо. В противном случае, например, когда концентрация ключевого компонента очень низка, возможен только детерминистский путь.

Таким образом, препятствием для реализации детерминистского способа смешения является большое количество частиц. В то же время именно это обстоятельство делает реальным стохастический путь. На этом пути можно реализовать множество различных процессов, которые друг от друга будут отличаться эффективностью, качеством, заложенными принципами и т. д.

Поставим следующий вопрос. Существует ли среди всех мыслимых процессов смешения такой, который является самым лучшим по качеству и эффективности? Одним словом, существует ли здесь некий идеальный процесс, который нельзя улучшить в принципе? Попробуем описать этот процесс [94—102].

9.3.2. Идеальный процесс смешивания

Вначале обратимся к следующему факту. Хорошо известно, что если в закрытой комнате разлить духи, то через определенное время их запах распространится по всей комнате. Причем, если весом можно пренебречь, то это распределение будет равномерным. Как известно, причина явления состоит в том, что газы состоят из отдельных молекул, которые совершают беспорядочные случайные пробеги. Их многократная реализация и приводит к равномерному перемешиванию. Таким образом, в природе есть процесс, который приводит к идеальному качеству смеси. Попробуем использовать его для решения поставленной задачи.

Ясно, что конечный результат от размеров молекул не зависит. Поэтому если случайные свободные пробеги реализовать и для частиц порошков, то точно так же, как и для газов, в результате получим однородную смесь.

Однако в поведении порошков и газов есть существенное различие. Молекулы газа получают импульсы от колеблющихся атомов стенок емкости. Для того, чтобы дать сопоставимые импульсы частицам порошков, необходимо сообщить вибрацию стенкам емкости. Однако такое непосредственное использование аналогии наталкивается на ряд технических и принципиальных трудностей. Во-первых, требуется значительная энергия колебаний, во-вторых, возникает проблема взаимодействия частиц при столкновениях. Кинетика процесса будет зависеть от свойств частиц, и в общем случае гарантировать качество смеси здесь нельзя. В исходной же постановке требуется найти идеальный процесс, где гарантируется качество независимо от любых физических свойств частиц. Далее, для порошков несравнимо большую роль, чем для газов, играет сила тяжести. Так, при отсутствии вибраций частицы порошков контактируют друг с другом и образуют определенную упаковку. Эта упаковка плотна, так что пространство для свободных пробегов частиц отсутствует.

Поэтому поступим следующим образом. Пересыплем компоненты A и B в емкость V произвольным способом. Начальное их распределение будет неоднородным. Обозначим через t время. Пусть начальному состоянию отвечает $t = t_0$. Идентифицируем каждую

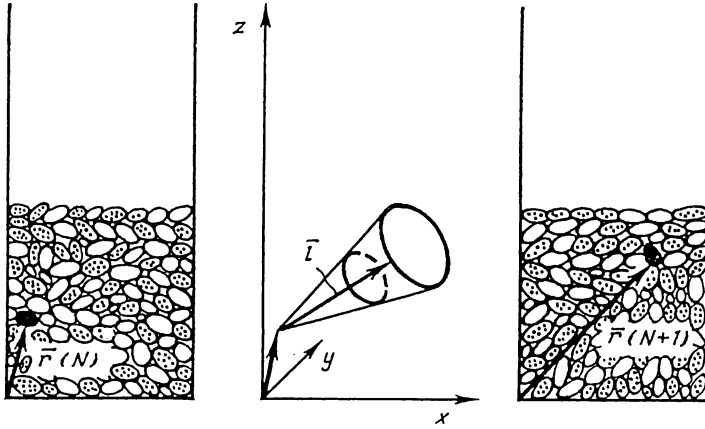


Рис. 9.11

частицу параметром ρ , введем декартову систему координат x, y, z и отметим радиусом-вектором \mathbf{r} положение каждой частицы: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, t)$. Затем проведем некоторые операции перемешивания. Например, отправим всю массу из емкости V в отдельный смеситель. Обработаем ее там в течение времени τ и затем опять вернем в V . Таким образом, после указанных манипуляций все частицы окажутся в емкости V , будут покоиться и снова образуют определенную упаковку. При этом

каждая частица ρ займет некоторое новое положение. Собственно, в этом и выражается весь результат обработки смеси за время от t_0 до $t_0 + \tau$. Поэтому, если не интересоваться преобразованиями смеси внутри промежутка времени $(t_0, t_0 + \tau)$, то можно сказать, что за время τ все частицы, оставаясь внутри объема V , сместились на вектор (рис. 9.11)

$$\mathbf{l}(\rho, t_0) = \mathbf{r}(\rho, t_0 + \tau) - \mathbf{r}(\rho, t_0), \quad (2.1)$$

который можно назвать пробегом частицы ρ . Он вполне может играть роль свободного пробега молекулы газа.

Дальше опять проведем обработку смеси в течение времени от $t_0 + \tau$ до $t_0 + 2\tau$. Снова вернем образец в емкость V и в состоянии покоя зафиксируем положение частицы ρ в новой упаковке: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, t_0 + 2\tau)$. Этому положению соответствует новый пробег частицы и т. д. Таким образом, можно говорить о последовательности преобразований области V в себя. Здесь удобно ввести безразмерное время $N = (t - t_0) / \tau$ и целые значения N называть номером цикла. За N циклов каждая частица получает результирующее смещение

$$\mathbf{L}(\rho, N) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{l}(\rho, i) = \mathbf{r}(\rho, N) - \mathbf{r}(\rho, 0). \quad (2.2)$$

Качество будет обеспечено, если хотя бы при $N \rightarrow \infty$ смесь станет стремиться к однородному состоянию. Однако одного только факта, что \mathbf{l} является величиной случайной, для этого недостаточно. Например, если тяжелые частицы имеют большую вероятность смещаться вниз, чем легкие, то в пределе будет достигнуто неоднородное состояние. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Вначале введем характеристики стохастического процесса. Пусть F — плотность вероятности случайной величины \mathbf{l} . По определению вероятность того, что вектор \mathbf{l} имеет длину от s до $s + ds$ и лежит внутри конуса с телесным углом $2d\Omega$ и осью, направленной вдоль заданного единичного вектора \mathbf{e} равна произведению F на соответствующий элемент объема: $\pi s^2 F ds (d\Omega)^2$.

Одной функции F для характеристики процесса недостаточно. Это связано с тем, что пробеги частиц являются не просто случайными величинами, но образуют случайное

векторное поле. Например, если известно, что некоторая частица сместилась в определенную точку пространства, то условная вероятность смещения в эту точку любой другой частицы должна равняться нулю. В то же время вероятность того, что найдутся частицы, которые сместятся в близкую окрестность любой данной точки, должна равняться единице. Иными словами, после любой реализации случайного поля I у каждой частицы должно оказаться достаточное число контактов с соседними частицами. При этом для частиц, которые находятся на свободной поверхности материала, упаковка должна быть такой, чтобы максимальный угол ската α не превышал предельного значения φ (φ — угол естественного откоса материала). Следовательно, область V преобразуется в себя с точностью до очертания свободной поверхности, которая от цикла к циклу может меняться. Это обстоятельство, а также полевые свойства смещений существенно осложняют все теоретические построения.

Для описания I как случайного поля необходимо введение многомерных плотностей вероятностей [289]. Указанные выше требования к случайному полю будем называть условием совместности. Для функции F и многомерных плотностей вероятности условие совместности означает, что любая конкретная реализация случайного поля „пробегов“ I должна быть такой, чтобы упаковка частиц снова переходила в упаковку. Дать аналитическую формулировку этого условия, по-видимому, сложно (ниже эта трудность будет преодолена по-другому). Сейчас достаточно ограничиться только констатацией его существования.

Коллективное поведение частиц может выражаться не только в выполнении условия совместности. Возможны и более тесные связи. Основная из них выражается в том, что близкие частицы имеют тенденцию оставаться близкими и после реализации случайных смещений. Например, пусть операция перемешивания сводится к однократному встряхиванию емкости V . Ясно, что здесь частицы хотя и займут новые положения, но близкие частицы, как правило, останутся близкими. При этом условие совместности будет выполнено.

Теперь исходную задачу можно сформулировать более определенно и свести ее к решению трех вопросов. 1. Каким условиям должны удовлетворять функция F и многомерные плотности вероятности, чтобы с увеличением времени смесь стремилась к однородному состоянию? 2. При каких условиях переход в однородное состояние совершается за меньшее время? 3. Каким образом можно реализовать процесс, которому отвечали бы плотности вероятности с нужными свойствами? Строгое исследование этих вопросов связано с рядом математических трудностей. Поэтому вначале рассмотрим интуитивные соображения.

Прежде всего выясним, от каких аргументов может зависеть плотность распределения F . Во-первых, в общем случае F может зависеть от типа частиц (их удельного веса и других физических свойств), затем от координат частиц $\mathbf{r}(\rho, N)$. Естественна зависимость также от случайного смещения s и его направления \mathbf{e} . В принципе не исключена и явная зависимость от времени N (это будет в случае, если способ обработки смеси от цикла к циклу меняется). Возможна зависимость F и от каких-то иных факторов. Таким образом, в общем случае можно записать, что

$$F = F(\rho, \mathbf{r}, s, \mathbf{e}, N, \dots).$$

Кажется очевидным, что если функция F будет зависеть от типа частиц, то в пределе смесь будет получаться не однородной, а разделенной по тому признаку, который влияет на плотность вероятности. Поэтому в качестве первого условия примем, что в идеальном процессе смешивания все плотности вероятности от типа частиц зависеть не должны.

Теперь обратимся к понятию результирующего смещения (2.2). Пусть N^* — момент времени, при котором смесь достигает однородного состояния. Тогда $L(\rho, N^*)$ — это итоговое смещение частицы из начального положения в конечное. В качестве идентификатора частицы ρ можно использовать ее начальный радиус-вектор \mathbf{r}^0 . Нетрудно понять, что L как функция аргумента \mathbf{r}^0 , никакими априорными условиями гладкости не обладает. Более того, в общем случае она будет всюду разрывной. Например, пусть в начальный момент все частицы ключевого компонента собраны вместе в какой-то части емкости V , т. е. в начальный момент времени каждая частица A (кроме граничных) контактирует только с частицами типа A . В конечном же состоянии, если концентрация A незначительна, каждая частица A должна быть окружена только частицами типа B . Это означает, что первоначально близким частицам должны соответствовать неблизкие значения L . Или, иными словами, в процессе перемешивания близкие частицы рано или поздно должны расстаться. Однако если в поведении различных частиц ансамбля есть тесные связи, то для такого расставания потребуется значительное время. С другой стороны, определенная коллективность поведения, связанная с совместностью, должна быть всегда. Отсюда можно заключить, что в идеальном процессе поле случайных смещений должно удовлетворять только условиям совместности, а во всех остальных отношениях поведение различных частиц должно быть независимым друг от друга.

Вернемся к аналогии с газами. Если в емкости V заключен газ нормальной плотности, то величина свободных пробегов молекул весьма ограничена. Например, пробеги, сравнимые с размером всей емкости, практически невероятны. И это обстоятельство является главным ограничением эффективности перемешивания. Для порошков ситуация противоположная. Здесь частицы заполняют объем полностью, и свободного пространства для пробегов вообще нет. Однако равенством (2.1) понятие пробега l определено так, что он может быть практически любым. Например, если частица была у одной стенки емкости, то после одного цикла смещения она вполне может оказаться около другой стенки.

Далее, однородность смеси означает, что ее свойства во всех точках и по всем направлениям одинаковы. Иными словами, есть инвариантность свойств по отношению к переносу и повороту системы координат. Можно предположить, что функции, управляющие эффективным переходом к такому состоянию, должны быть также инвариантными. Для функции F это означает независимость ее от аргументов s и e . Однако в связи с тем, что смешивание ведется в ограниченном объеме, для всех частиц должно выполняться условие непроникания сквозь стенки. Отсюда следует, что функция F от аргументов e и s зависеть все же должна. Поэтому требование инвариантности необходимо уточнить: в идеальном процессе смешивания плотность вероятности случайного смещения l должна зависеть от положения частицы \mathbf{r} , значения s и направления случайного смещения e только в той мере, в какой этого требует условие непроникания сквозь стенки, а также ограничение на конфигурацию свободной поверхности материала. Это условие допускает простую аналитическую формулировку

$$F(\rho, \mathbf{r}, s, e, \dots) \equiv \text{const при } \mathbf{r} + s\mathbf{e} \in V, \quad (2.3)$$

$$F(\rho, \mathbf{r}, s, \mathbf{e}, \dots) \equiv 0 \text{ при } \mathbf{r} + s\mathbf{e} \notin V.$$

Условия (2.3) равносильны следующей мысленной процедуре, которую можно представить реализованной для сплошной среды. Пусть объем V заполнен произвольной смесью двух сред плотности γ . Разобьем его на V/ω частей и каждую из них равномерно растянем до величины V . Плотность будет равна $\gamma\omega/V$. Затем все эти части вложим друг в друга. Плотность вернется к прежнему значению γ . Ясно, что при $\omega \rightarrow 0$ такая процедура даст гомогенное распределение для любых начальных состояний. Равенства (2.3) как раз представляют собой вероятностный аналог такой процедуры для среды, состоящей из дискретных частиц.

Итак, для того чтобы процесс смешивания был предельно эффективным по качеству и скорости, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий: *a* — все плотности вероятностей случайных смещений частиц от их свойств зависеть не должны; *b* — многомерные плотности вероятностей должны быть такими, чтобы выполнялось только условие совместности смещений, в остальных отношениях поведение различных частиц, включая соседние, должно быть независимым друг от друга; *в* — одномерная плотность вероятностей должна зависеть от положения частицы, величины и направления ее случайного пробега только в той мере, в какой этого требует условие непроникания частиц сквозь стенки и ограничение на конфигурацию свободной поверхности.

Условия *a—в* дают описание идеального процесса на формальном языке плотностей вероятностей. Попытаемся на их основе найти конструктивные признаки идеального процесса.

9.3.3. Принципы реализации идеального процесса смешивания

Выше рассматривались положения частиц в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$, т. е. фактически анализировались только результаты обработки материала после каждого цикла перемешивания. Для конструктивного описания необходимо исследовать поведение материала и внутри каждого цикла. Обозначим через \mathbf{l} величину смещения частицы, идентифицированной параметром ρ :

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}(\rho, 0) - \mathbf{r}(\rho, t). \quad (3.1)$$

Для $0 < t < 1$ это будет смещение внутри первого цикла. Аналогично определяем смещения для второго цикла и т.д. При $t \neq 0, 1, \dots$ материал может находиться вне емкости V , так что в общем случае $\mathbf{r}(\rho, t) \notin V$. Теперь задачу можно поставить таким образом: какими должны быть смещения (3.1), чтобы результат каждого цикла удовлетворял условиям *a—в*?

Здесь вступает в силу одно очевидное соображение. Предположим, что смещения (3.1) внутри цикла удовлетворяют каким-то ограничениям. Ясно, что и результат цикла также будет удовлетворять этим ограничениям. Будем использовать только указанное достаточное условие. Иными словами, наложим ограничения *a—в* не только на смещения (2.1), но и на смещения (3.1). Это позволяет выделить некоторые конструктивные признаки процесса.

Согласно условию *a*, смещения частиц не должны зависеть от их типа. В природе есть единственный нетривиальный процесс, при котором кинематика движения не зависит ни

от веса, ни от размеров, ни от каких-либо других свойств частиц — это свободное падение в поле тяжести. Отсюда следует, что частицам смеси необходимо дать возможность свободно падать вниз. Из условия *a* также вытекает, что для легких частиц или больших скоростей процесс смешения должен осуществляться в вакууме.

Рассмотрим теперь коллективное поведение частиц. Условие *b* требует, чтобы в пределах условия совместности смещения любых частиц были независимыми друг от друга. Практически связанность осуществляется только через непосредственные контакты между частицами (связанность в поведении далеких частиц — это экзотика). Поэтому речь должна идти о процессе, в котором осуществлялись бы независимые смещения соседних частиц. Однако если между ними есть контакт, то поведение будет обязательно зависимым. Поэтому в идеальном процессе смесь необходимо разредить в пространстве так, чтобы контакты исчезли и появилась возможность независимых относительных смещений между частицами.

Таким образом, теоретическое описание идеального случая предопределяет следующие основные черты реального процесса: 1) частицам смеси необходимо дать возможность свободно падать вниз; 2) смесь необходимо разредить в пространстве так, чтобы контакты между соседними частицами исчезли; 3) в процессе падения частицам необходимо придавать случайные компоненты скорости; 4) любое транспортирование материала вверх, если в нем есть необходимость, должно сводиться только к смещению образца как жесткого целого (это тривиальный случай, когда кинематика от свойств частиц также не зависит).

Теперь возникает следующий естественный вопрос — как реализовать подобный процесс? В принципе возможно множество технических решений, которые в той или иной степени приближаются к идеальному. Рассмотрим один из них.

9.3.4. Пример технической реализации

Хорошо известно, что любое пересыпание смеси порошков приводит к их разделению вследствие сегрегации. Поэтому операцию пересыпания лучше исключить. Это означает, что емкость *V* (накопитель), в которой необходимо расположить однородную смесь, является частью смесителя. Выше показано, что собственно смешивание должно осуществляться в условиях свободного падения частиц. Это накладывает ограничение на форму накопителя, а именно: его боковая поверхность должна быть получена движением вертикальной образующей. Предположим для определенности, что *V* представляет собой прямой круговой цилиндр. Для того чтобы иметь возможность разредить смесь в пространстве, дополним накопитель до цилиндрического контейнера (рис. 9.12 *a*). Будем считать, что вертикальный размер контейнера ограничен, так что времени однократного падения частиц по его высоте недостаточно для полного смешивания. В этом случае необходимо организовать периодический процесс, включающий в себя транспортирование материала вверх. Так как условию *a* можно удовлетворить только при движении смеси вниз, то во время транспортирования ее вверх необходимо вообще отказаться от создания каких-либо относительных смещений частиц. Такое транспортирование можно осуществить путем резкого поворота контейнера вокруг горизонтальной оси. Скорость поворота должна быть такой, чтобы центробежная сила удерживала смесь от преждевременного пересыпания. Эту скорость легко рассчитать. Труднее дать строгий расчет режима торможения в

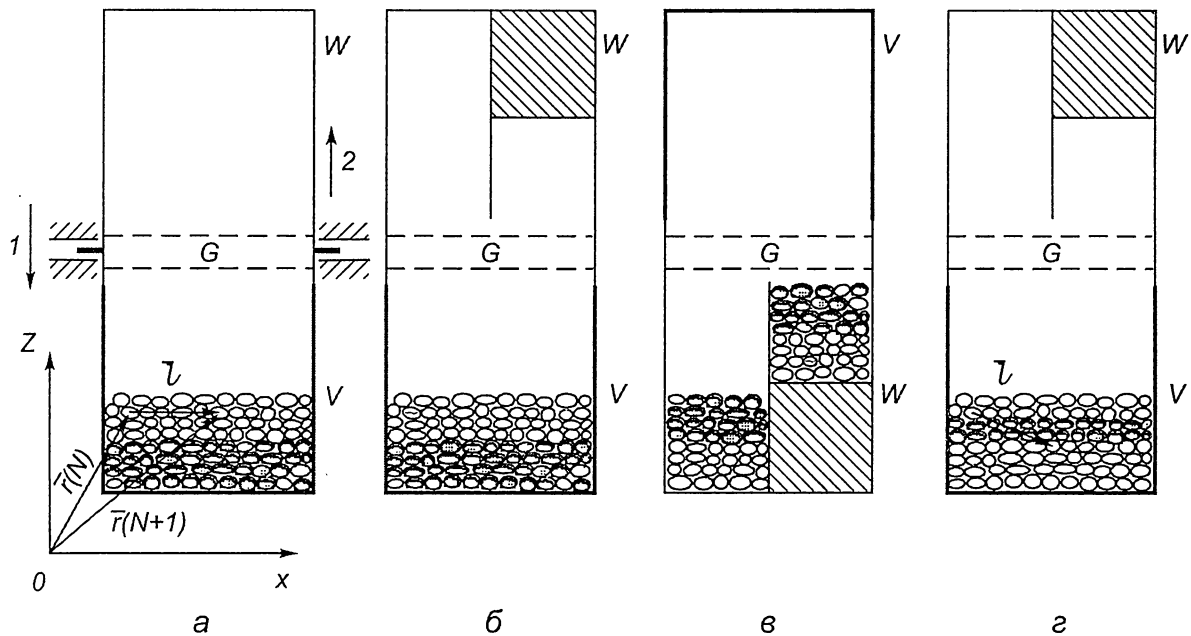


Рис. 9.12

верхней точке. При торможении появляются силы инерции, которые могут привести к потере устойчивости материала. Поэтому торможение не должно быть очень резким (указанное ограничение можно снять, если материал сверху закрывать заслонкой).

Итак, после поворота контейнера смесь находится в его верхней точке и затем свободно падает вниз. На рис. 9.12 *а* стрелками отмечено направление силы тяжести (1 — исходное состояние, 2 — состояние после поворота). Ясно, что само по себе свободное падение к перемешиванию еще не приведет. Если из положения 2 образец предоставить самому себе, то он будет смещаться вниз как жесткое целое. Конечно, практически за счет взаимодействия со стенками и, может быть, каких-то привходящих факторов относительные смещения частиц все же будут. Но рассчитывать на них было бы принципиально неверно. Подобные смещения должны рассматриваться только как возмущения идеального процесса. Поэтому смещения частицам должны задаваться некоторым принудительным образом, чтобы была определенная гарантия их случайности.

Остановимся на варианте, когда горизонтальная компонента задается одним устройством, а вертикальная — другим. Причем во время падения задается только горизонтальная компонента скорости. Соответствующее устройство обозначим символически буквой *G* (см. рис. 9.12). Пусть оно занимает слой $z_1 < z < z_2$. Если частица поступает в устройство *G* в точке с горизонтальными координатами (x, y) , то покидает *G*, имея другие координаты ξ, η , где ξ, η — величины случайные. В пространстве это соответствует переходу частицы из точки (x, y, z_1) в точку (ξ, η, z_2) , причем порядок следования частиц по вертикали при этом не меняется: если на *G* приходят последовательно две частицы с определенным расстоянием между ними по вертикали, то покидают они устройство *G* с новыми горизонтальными координатами и прежним расстоянием по вертикали.

Результат работы такого смесителя очевиден. При первом повороте контейнера частицы пройдут через устройство *G* и попадут в часть контейнера *W*. Затем при втором

повороте частицы пройдут еще раз через G и снова окажутся в емкости V . В итоге каждая частица получит только горизонтальное смещение. Поэтому любые неоднородности смеси по вертикали таким смесителем сглаживаться не будут. Причина здесь ясна и заложена в самой конструкции устройства G . Однако если на нее посмотреть немного по-другому, то можно предположить способ осреднения смеси и по вертикали.

Действительно, причину отсутствия вертикальной компоненты можно интерпретировать таким образом: частицы, которые приходят в часть контейнера W раньше, после его переворота возвращаются на устройство G позже. Причем этот порядок является строгим и от факта случайности смещений в горизонтальной плоскости не зависит. Отсюда следует, что для получения вертикальной случайной компоненты указанный порядок необходимо искусственно изменить. В такой постановке естественно следующее решение. Разобьем емкость W вертикальными стенками на ячейки различной глубины (рис. 9.12 б, в, г). Тогда частицы, поступившие в набор ячеек первыми, при последующем перевороте возвратятся на устройство G не обязательно последними. Все будет зависеть от глубины ячейки, в которую они попадут. Но поскольку глубина ячейки, в свою очередь, зависит от положения в горизонтальном сечении, которое для частицы является случайным, то появится и вертикальная случайная компонента смещения.

Введение разнोगлубинных ячеек позволяет решить и проблему разрежения смеси в пространстве. При повороте контейнера в положение, показанное на рис. 9.12 б, вначале на устройство G придет материал из самой мелкой ячейки, затем из более глубокой и т. д.

Таким образом, принципиальная схема технического решения ясна. Рассмотрим теперь его подробнее. Выше было показано, что частицам независимо от их типа должны задаваться именно скорости, а не импульсы или энергии. Поэтому рабочие органы устройства G должны выполняться так, чтобы кинематика их движения не зависела от количества и свойств частиц, с которыми они взаимодействуют. Можно рассмотреть ряд вариантов, предусматривающих введение привода внутрь контейнера, например колеблющихся или вращающихся в различных направлениях вертикальных пластин, в качестве привода использовать также корпус самого смесителя. Действительно, во время падения частица не связана с корпусом. Поэтому ее относительное смещение получается, если дать ускоренное движение не частице, а корпусу (например, дать крутильные колебания средней части смесителя). Таких колебаний вполне достаточно, чтобы привести в движение рабочие органы устройства G . Их можно выполнить в виде упругих элементов, закрепленных на обоих концах. Тогда они будут колебаться так же, как и корпус. Если элементы закрепить на одном конце, то получим большую амплитуду и частоту. При этом параметры колебаний будут зависеть от упругих характеристик элементов, односторонних ограничителей амплитуды и др.

В одном из вариантов устройство G выполнялось в виде пакета хаотически уложенной проволоки или металлических стружек. В этом случае колебания корпуса служили стимулом для прохождения порошков сквозь лабиринт. Следует отметить, что вибрационное воздействие на частицы допускается только во время их движения вниз. В момент, когда частицы ложатся друг на друга, воздействия должны прекращаться, так как вибрация упаковки приведет к ухудшению однородности смеси. Поэтому части контейнера V и W , в которых материал накапливается, подвергаться колебаниям не должны.

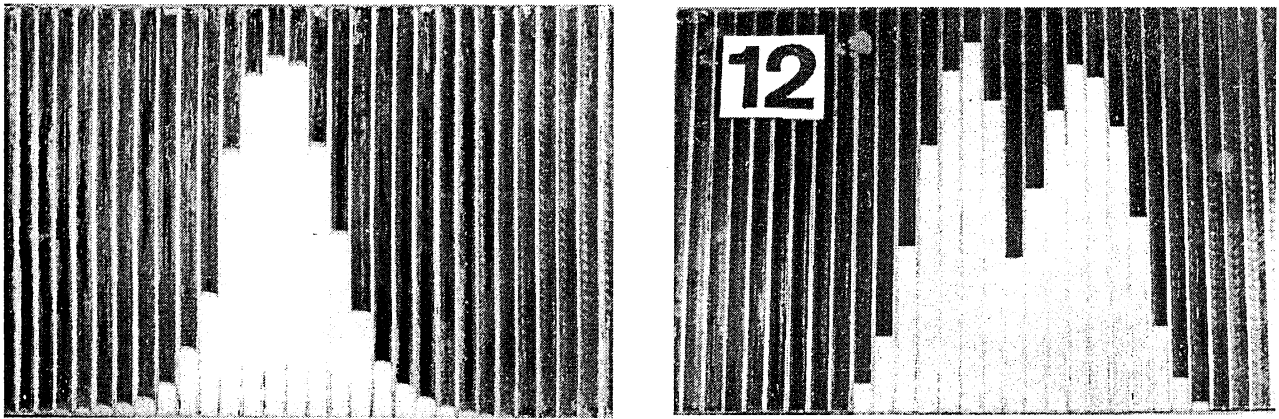


Рис. 9.13 (а, б)

Итак, узел горизонтального перемешивания характеризуется большим числом параметров. Каким образом их оптимизировать? Прямое экспериментальное исследование весьма трудоемко в связи со сложностью анализа качества смеси и зависимостью конечного результата от множества факторов. Поэтому необходимо найти отдельную для узла G оценку эффективности его работы и проводить оптимизацию, исходя из нее.

Это можно сделать таким образом. Обозначим через P плотность вероятности координат ξ, η : вероятность того, что частица, поступившая на устройство G в точке с горизонтальными координатами x, y покинет его в окрестности $d\xi \times d\eta$ точки ξ, η равна $P(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta$.

Функцию P можно определить экспериментально. Для этого поместим под устройство G плоский набор ячеек, разделенных вертикальными стенками (индикатор) (рис. 9.13 а). В точку (x, y) подадим тонкую струю исследуемого материала (δ -функцию). Тогда частицы, перемещенные устройством G в окрестность точки (ξ, η) , попадут в соответствующую ячейку индикатора и будут накапливаться в ней. Кривую распределения уровней материала по различным ячейкам можно наблюдать визуально (передняя стенка индикатора стеклянная). Эта кривая будет сечением поверхности $P(x, y, \xi, \eta)$ при фиксированных x, y . Здесь следует отметить простой факт. Крутизна графика пропорциональна времени подачи струи материала. Поэтому время подачи всегда можно выбрать так, чтобы функция P определялась достаточно точно. Для того, чтобы экспериментальную кривую считать сечением поверхности P , масштаб по вертикальной оси необходимо нормировать. Располагая информацией о плотности распределения P , можно оперативно проследить, как меняется эффективность работы устройства при варьировании его различных параметров, конструктивных элементов и т. д. Зависимость от координат x, y позволяет оценить влияние боковых стенок. Из сравнения плотностей P для различных материалов видно, насколько работа устройства чувствительна к типу частиц.

Для теории большое значение имеет вопрос о взаимодействии частиц внутри устройства G (вопрос о линейности). Проведем следующие опыты. Подадим поочередно струю материала в точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Получим соответствующие графики P_1, P_2 . Затем осуществим одновременную подачу материала в эти же точки. Результат обозначим через P_{12} . Если $P_{12} = P_1 + P_2$ (для кривых без нормировки), то взаимодействием можно пренебречь

(линейность, рис. 9.13 б). Если же равенство нарушается, то взаимодействие между частицами внутри устройства G есть и процесс становится нелинейным. Прodelывая аналогичные опыты для трех и более точек, можно полностью выяснить характер нелинейности.

Каким критерием руководствоваться при оценке работы устройства G ? Из условий $a, б$ следует, что идеальное устройство работает так, что плотность вероятности P не зависит от типа частиц и их координат, т. е. $P \equiv \text{const}$. Это значит, что во всех опытах ячейки индикатора должны заполняться равномерно и независимо от того, каким образом подается материал на вход устройства G (струей, дождем и т.д.). Поэтому эффективность реального устройства необходимо оценить по отклонению функции P от постоянной.

Можно поставить задачу теоретического определения всех плотностей вероятности по известной конструкции устройства и его параметрам. Например, если устройство представляет собой пакет хаотически уложенной проволоки, то плотности определяются методами теории случайных блужданий [290].

Рассмотрим теперь работу устройства горизонтального смешивания с несколько иной точки зрения. Предположим, что на вход подается распределение частиц, которое характеризуется функцией $\varphi_0(x, y)$. На выходе получится новое распределение частиц $\varphi_1(\xi, \eta)$. Работу устройства можно рассмотреть как действие оператора G на функцию φ_0 : $G\varphi_0 = \varphi_1$. Задание оператора G равносильно полному описанию всех плотностей вероятностей P_1, P_2, \dots . Из закона сохранения массы следует

$$\int_S G\varphi dS = \int_S \varphi dS, \quad (4.1)$$

где S — горизонтальное сечение. Идеальному устройству соответствует оператор, который любую функцию переводит в постоянную: $G\varphi \equiv C$. Значение постоянной определяется равенством (4.1). Для неидеального устройства $G\varphi \neq C$. Однако если сделать последовательность преобразований $G \dots G = G^n$, то с увеличением n распределение должно стремиться к равномерному $G^n\varphi \rightarrow C$. Этот факт можно использовать для оценки эффективности устройства G . Например, принять за норму эффективности величину $0 < 1/n \leq 1$, где n — наименьшее из чисел, при которых $G^n\varphi$ можно считать постоянной. Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n\varphi = C$ вытекает, что равномерный поток частиц после прохождения через устройство G должен переходить в равномерный же (условие однородности):

$$GC = C. \quad (4.2)$$

Определенный интерес представляют смешанные постановки, когда оператор G известен для некоторой высоты устройства ($z_2 - z_1$) (например, высоты пакета хаотически уложенной проволоки) и требуется определить высоту (не обязательно кратную $(z_2 - z_1)$), обеспечивающую выполнение условия $G\varphi \approx \text{const}$.

Отметим, что эффективной работы устройства G можно добиться всегда. Если оно работает неэффективно, то необходимо последовательно по вертикали расположить n устройств. Таким образом, вопрос об эффективности работы устройства случайных горизонтальных смещений эквивалентен вопросу о его высоте. В дальнейшем предположим, что все характеристики устройства G заранее известны из опытов с индикаторными ячейками.

Остановимся на некоторых экспериментальных результатах. На рис. 9.13 показано распределение частиц при подаче струи сухого кварцевого песка. В качестве устройства G использовался пакет хаотически уложенной медной проволоки $\varnothing 0,5$ мм, высотой 30 мм и относительной плотностью 6%. Распределение является практически нормальным. Интересно отметить, что крутизна нормированного профиля зависит от скорости подлета частиц: большие скорости приводят к несколько более пологой кривой. Эксперименты показывают, что взаимодействие частиц большой роли не играет даже при подаче не слишком разреженного потока. Это означает, что соответствующий оператор G является практически линейным.

Рассмотрим теперь подробнее блок W , который обеспечивает вертикальное перемешивание. Все его параметры имеют геометрический характер. К ним относятся форма и поперечные размеры ячеек, их глубина и порядок размещения. Блок W работает вполне детерминировано. Случайность вертикальной компоненты пробега частицы целиком определяется тем фактом, что случайной является его горизонтальная компонента. В связи с этим можно ожидать, что оптимальные параметры W связаны с вероятностными характеристиками устройства горизонтального смешения. Например, почти очевидно, что если устройство G работает идеально ($G\varphi = \text{const } \forall \varphi$), то порядок размещения ячеек в пространстве значения не имеет. Подобные обстоятельства затрудняют строгое исследование задачи оптимизации W . Поэтому ограничимся только приближенными критериями.

Одно из назначений узла вертикального перемешивания состоит в том, чтобы „разносить“ первоначально близкие частицы. Всегда есть шанс, что частицы, которые были близкими после выхода из устройства горизонтального смешения, попадут в соседние ячейки с различной глубиной. Это приведет к тому, что их дальнейшие пути существенно разойдутся. Поэтому чем длиннее граница раздела между ячейками различной глубины (а значит, и меньше размеры самих ячеек), тем устройство работает эффективнее. С другой стороны, поперечные размеры ячеек ограничены условием свободного высыпания материала из них. Эти два обстоятельства позволяют легко определить оптимальные поперечные размеры ячеек.

Далее, выбор формы ячеек сводится к задаче разбиения данной области (круга) на подобласти. Имея в виду технологические трудности при реализации экзотических разбиений, остановимся на частных случаях, когда некоторые простые разбиения заранее заданы (квадратные, треугольные и шестиугольные). Обозначим через k общее число ячеек и перенумеруем их в порядке возрастания глубины: $1 = h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \dots \leq h_k = h_{\max}$. Здесь глубина самой мелкой ячейки принята за единицу (ее абсолютное значение должно быть таким, чтобы не было переполнения).

Спектр глубин ячеек можно выбирать, исходя из условия наиболее равномерного разрежения смеси в пространстве. Если некоторые ячейки имеют одинаковые глубины, то материал из них на устройство G придет одновременно. Следовательно, большое разрежение будет в случае равномерного спектра: $h_{i+1} - h_i = \text{const}$. Ограничимся только этим вариантом.

Теперь основной вопрос: каким образом необходимо разместить ячейки в пространстве, т. е. куда следует поместить самую глубокую ячейку, какой глубины ячейку необходимо поставить рядом с ней и т. д.? Очевидно, что у близких частиц гораздо больше шансов попасть в разные ячейки, соприкасающиеся по грани, чем в ячейки, соприкасающиеся по

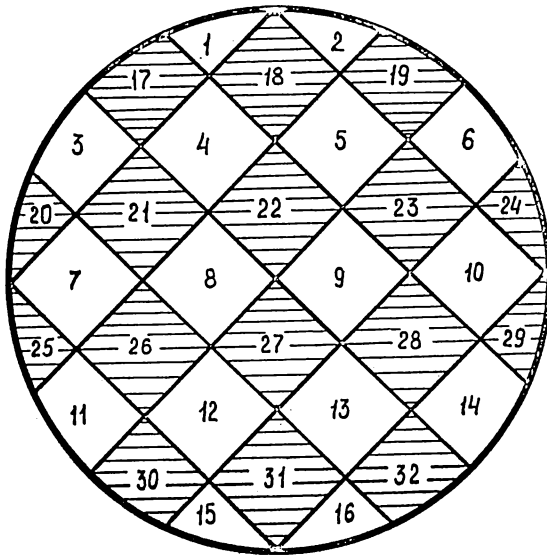


Рис. 9.14

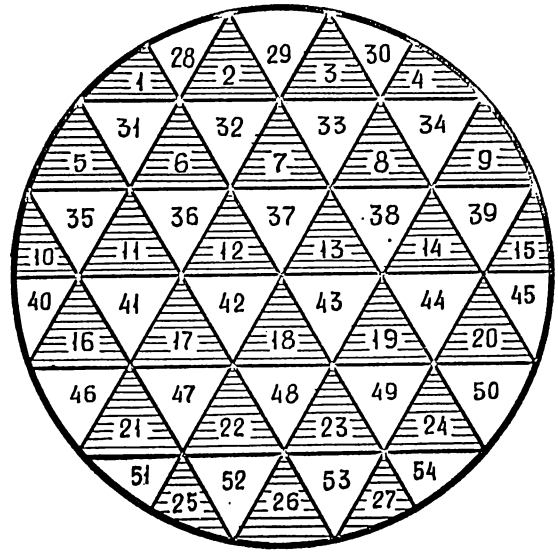


Рис. 9.15

ребру. Поэтому естественно предположить, что размещение ячеек должно быть таким, чтобы средняя величина ступеньки между ячейками была наибольшей:

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |h_i^+ - h_i^-| \rightarrow \max. \quad (4.3.)$$

Здесь M — общее число внутренних граней; h_i^+, h_i^- — глубины ячеек, имеющих общую грань с номером i . Анализ показывает, что невозможно добиться существенного различия в глубинах всех ячеек, окружающих некоторую фиксированную ячейку. Поэтому (не располагая общим доказательством) примем, что большего значения R можно добиться за счет уменьшения разницы в глубинах ячеек, контактирующих по ребру. Оставшийся произвол уменьшим следующим образом. Выясним, каким наименьшим числом красок

можно раскрасить разбиение, чтобы соседние ячейки были разных цветов. Для разбиений, показанных на рис. 9.14, 9.15, достаточно, очевидно, двух цветов. Разобьем спектр глубин ячеек на две части. Ячейки белого цвета будем относить к первой части спектра (группа мелких ячеек), а черного цвета — ко второй части спектра (группа глубоких ячеек). Указанных выше условий достаточно для выбора конкретных размещений.

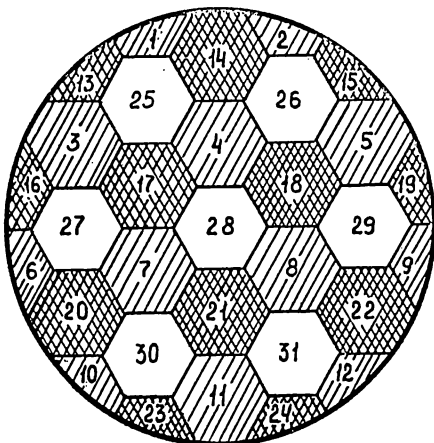


Рис. 9.16.

Вопрос о размещении шестиугольных ячеек (рис. 9.16) решается аналогично. Для раскраски шестиугольного разбиения достаточно трех цветов. Разделим спектр глубин ячеек на три группы. Ячейки одного цвета всегда должны иметь номера из одной группы. На рис. 9.14—9.16 приведены примеры конкретного разме-

щения, удовлетворяющего перечисленным требованиям (числа означают номера соответствующих ячеек).

Следующий вопрос связан с выбором абсолютного различия в глубинах ячеек, или величины h_{\max} . Предположим, что устройство горизонтального смешивания является однородным, т. е. имеет место равенство (4.2). Тогда после прихода материала из всех ячеек его свободная поверхность будет горизонтальной. Однако в промежуточные моменты времени поверхность материала горизонтальной не будет. Например, если одна из ячеек расположена гораздо ближе других, то на устройство горизонтального смешивания придет материал вначале только из нее и может образоваться профиль типа, изображенного на рис. 9.13. В таком профиле текущее значение угла наибольшего ската $\alpha(t)$ может превысить угол естественного откоса материала φ . Это приведет к растеканию материала, а, следовательно, и к сегрегации. Для исключения сегрегации наложим на параметры смесителя следующее ограничение:

$$\alpha(t) < \varphi. \quad (4.4)$$

Если зафиксированы параметры устройства горизонтального смешивания и размещение ячеек, то неравенство (4.4) однозначно определит верхнюю оценку h_{\max} .

Итак, в целом принципы создания конструкций „идеальных“ смесителей ясны. Здесь необходимо отметить, что в любом реальном смесителе всегда будут малые конечные отклонения от любых заранее сформулированных условий типа равенств. Для условий типа неравенств ситуация проще — таким условиям всегда можно точно удовлетворить. Возникает вопрос, к каким последствиям приведут указанные малые отклонения, будут ли основные показатели смесителя (факт перехода смеси к однородному состоянию и время перехода) устойчивы к возмущениям или нет. Для решения этих вопросов необходимо численное исследование кинетики процесса.

9.3.5. Кинетика процесса смешивания

Выше рассмотрены условия, которым должен удовлетворять теоретически идеальный смеситель сухих порошковых материалов. Конечной целью является создание действующих устройств, приближающихся к теоретически идеальным. На этом пути возникает один принципиальный вопрос, связанный с тем обстоятельством, что в реальных устройствах всегда будут отклонения от любых заранее сформулированных условий типа равенства. Например, если в идеальном аппарате кинематика движения частиц не зависит от их типа, то это означает, что в реальном аппарате весь процесс должен быть организован так, чтобы кинематика как можно меньше зависела от типа частиц. Теоретически траектории свободно падающих частиц не зависят от их свойств. Практически же из-за недостаточности вакуума и других факторов кинематика от типа частиц зависеть все же будет. Возникает вопрос, будут ли подобные отклонения влиять на конечный результат недопустимым образом или изменения качества и времени, необходимого для смешивания, будут незначительно меняться при малых возмущениях, т. е. возникает вопрос об устойчивости работы аппарата по отношению к различным возмущениям. Для анализа устойчивости необходимы строгие теоретические подходы.

Рассмотрим, следуя [95, 97], плоскую задачу. В трехмерном случае выводы останутся без изменений. Область, где могут оказаться частицы, разобьем на квадратные элементы (рис. 9.17).

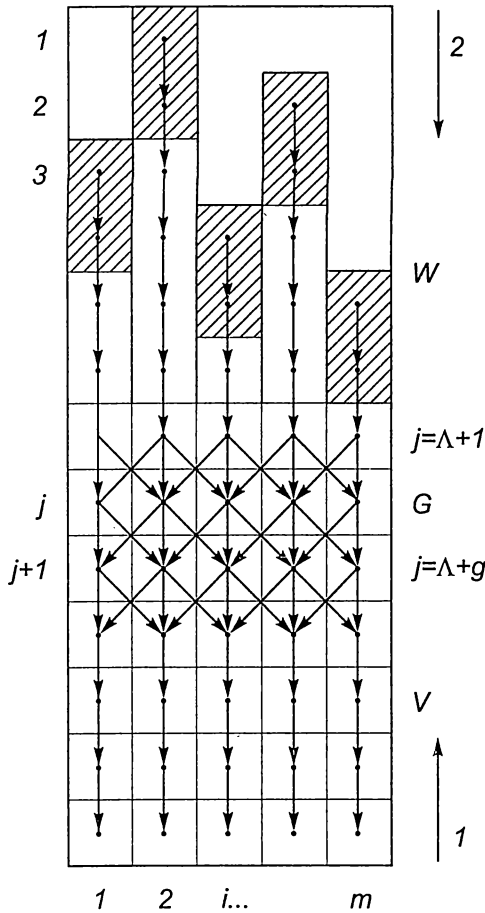


Рис. 9.17

слоев $j = \Lambda + 1, \dots, \Lambda + g$. После прохождения активных слоев материал попадает в разноглубинные ячейки W и накапливается в них. Когда весь материал перейдет в ячейки, осуществляется следующий переворот контейнера и материал начинает двигаться из ячеек в направлении 2.

Итак, в заштрихованных элементах известны значения a, b , в остальных узлах сетки — нули. Дальнейшие преобразования матриц сводятся к следующему. В точках (i, j) на дне ячеек полагаем

$$a_{ij}(t+1) = 0, \quad b_{ij}(t+1) = 0. \quad (5.1)$$

Эти равенства означают, что притока нового материала через границу не происходит. Для точек, не принадлежащих дну ячеек или активным слоям, кроме первого $i = \Lambda + 1$

$$a_{ij}(t+1) = a_{i,j-1}(t), \quad b_{ij}(t+1) = b_{i,j-1}(t). \quad (5.2)$$

Равенства (5.2) описывают смещение материала вниз. На первый активный слой материал приходит согласно условиям (5.2). Каждый узел этого и последующих активных слоев работает следующим образом: если на него приходят компоненты a_{ij}, b_{ij} , то часть их поступает в элемент, расположенный непосредственно под узлом (i, j) , часть — разбрасывается на соседние узлы:

Усредненные по элементу параметры будем относить к его центру. Центры элементов образуют двумерную сетку. Пронумеруем ее узлы индексами $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. В каждом узле определим пару чисел a_{ij}, b_{ij} . Первое число характеризует концентрацию материала A в элементе, второе — материала B . Мера концентрации выбрана так, что случаю $a_{ij} + b_{ij} = 1$ соответствует определенная упаковка контактирующих между собой частиц, которые полностью заполняют элемент. Точнее, если элементарный объем мгновенно окружить непроницаемыми стенками и дать возможность всем частицам, находящимся в нем, свободно сместиться вниз под действием веса, то концентрации a_{ij}, b_{ij} будут равны относительным объемам, занятым компонентами A и B . В процессе смешивания концентрации частиц меняются. Проведем с матрицами $(a_{ij}), (b_{ij})$ последовательные соответствующие дискретные преобразования. Таким образом, переменные a, b зависят от координат и дискретного времени $t = 0, 1, \dots, J$. В начальный момент времени материалы произвольным образом „засыпаются“ в накопитель V : при $t = 0$ в точках V задается пара чисел $a_{ij}, b_{ij} = 1 - a_{ij}$; в остальных точках — нули. Перевернем контейнер. Накопитель окажется наверху, и материал начнет двигаться вниз к устройству горизонтального смешивания G (направление 1, рис. 9.17), которое представляет собой ряд активных

$$a_{i,j+1}(t+1) = \sum_{s=1}^m P_{is} \cdot a_{sj}(t), \quad b_{i,j+1}(t+1) = \sum_{s=1}^m g_{is} \cdot b_{sj}(t), \quad (5.3)$$

где $j = \Lambda + 1, \dots, \Lambda + g$; g — число активных слоев; матрицы перехода (P_{is}) , (g_{is}) заданы. После прохождения через устройство горизонтального смешивания частицы порошков смещаются вниз, накапливаясь в нижней части контейнера. Этот процесс описывается следующим образом. Обозначим сумму $a_{ij}(t) + b_{ij}(t)$ через $V_{ij}(t)$. При накоплении частицы образуют определенную упаковку. Согласно определению, величина V_{ij} , равна части объема элемента, занятого накопившимся материалом. Перед тем, как численно транспортировать материал в соседний элемент, расположенный ниже, необходимо проверить, какая часть его объема еще свободна. Оператор, описывающий накопление частиц, имеет вид

$$a_{i,j+1}(t+1) = \begin{cases} a_{i,j+1}(t) + a_{ij}(t), & \text{если } V_{i,j+1}(t) + V_{ij}(t) \leq 1, \\ a_{i,j+1}(t) + a_{ij}(t) \frac{1 - V_{i,j+1}(t)}{V_{ij}(t)}, & \text{если } V_{i,j+1}(t) + V_{ij}(t) > 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Вторая компонента преобразовывается по такому же правилу. При достаточно больших значениях $t \geq J$ оператор (5.1)—(5.4) становится тождественным. Это означает, что весь материал скопился в нижней части контейнера и очередной цикл закончен ($\Delta N = 1$). Из условия сохранения массы следует, что

$$\sum_{s=1}^m P_{si} = 1, \quad \sum_{s=1}^m g_{si} = 1.$$

Для выполнения условия однородности достаточно, чтобы

$$\sum_{s=1}^m P_{is} = 1, \quad \sum_{s=1}^m g_{is} = 1. \quad (5.5)$$

Описанная схема расчета была реализована на ЭВМ БЭСМ-6. Процесс контролировали следующим образом: выводился тангенс максимального угла ската свободной поверхности материала для каждого шага по времени внутри цикла, стационарное распределение a , b , если оно отличалось от однородного, и две оценки качества смеси после окончания каждого цикла:

$$K_c = \max_{ij} |a_{ij} - a^0|, \quad K_L = \frac{1}{\sqrt{nm}} \sqrt{\frac{b^0}{a^0}} \sqrt{\sum_{ij} (a_{ij} - a^0)^2}.$$

Первая оценка — самая жесткая — по наиболее неоднородному элементу, вторая оценка — в среднем по объему. Однородному состоянию $a_{ij} = a^0$, $b_{ij} = b^0 = 1 - a^0 \geq a^0$ отвечают значения $K_c = K_L = 0$. Значения a^0 , b^0 легко определяются по заданному начальному распределению компонентов. Коэффициент в оценке K_L , выбран так, чтобы в исходном состоянии, когда материалы A и B полностью разделены, $K_L = K_c = b^0$. Все графики выводились на графопостроитель. Расчеты прекращались при достижении стационарного распределения компонентов.

Рассмотрим основные результаты. В расчетах принималось значения $m = 10$, $n = 70$, высота засыпки материала — 10. Исследовались два крайних случая начальной засыпки: горизонтальной, при которой нижнюю половину накопителя заполняли одним материалом, верхнюю половину — другим, и вертикальной, когда материал A помещали в левую половину, материал B — в правую. При таком соотношении компонент значение $a^0 = 0,5$. Предположим, что устройство горизонтального перемешивания линейно, однородно и одинаково реагирует на различные материалы: $P_{ij} = g_{ij}$. Пусть число активных слоев равно 6 и каждая внутренняя точка слоя $1/3$ материала пропускает вниз и по $1/3$ разбрасывает в соседние элементы:

$$P_{i-1,i} = P_{i,i} = P_{i+1,i} = 1/3, i=2, \dots, m-1. \quad (5.6)$$

Из условия (5.5) следует, что стенка в идеальном устройстве должна работать вполне определенным образом, а именно, $2/3$ материала, поступившего на нее, должно смещаться вниз и $1/3$ — во внутрь контейнера:

$$P_{11} = P_{mm} = 2/3, P_{21} = P_{m-1,m} = 1/3. \quad (5.7)$$

Пусть начальная засыпка горизонтальна и размещение ячеек имеет вид (2; 3; 1,5; 2,5; 1) (см. рис. 9.17). Проследим за кинетикой численного перемешивания. На рис. 9.18 показано, как меняется качество смеси при увеличении числа циклов (кривая 1 — в оценке K_C , 2 — в оценке K_L). Видно, что смесь довольно быстро переходит к однородному состоянию.

Посмотрим теперь, как влияет на процесс степень разрежения смеси в пространстве — величина h_{\max} , равная отношению наибольшей и наименьшей глубин ячеек. Увеличение h_{\max} приводит к тому, что на устройство G приходит одновременно все меньше материала. Поэтому наибольший угол ската и время каждого цикла увеличиваются. Если $h_{\max} \rightarrow 1$, то глубины всех ячеек выравниваются и эффективность устройства вертикального перемешивания стремится к нулю. При начальной горизонтальной засыпке вертикальное перемешивание необходимо. Поэтому при $h_{\max} \rightarrow 1$ время полного смешивания $N^* \rightarrow \infty$. Для перехода вертикальной начальной засыпки к однородному состоянию вертикального перемешивания не требуется. Расчет показывает, что при $h_{\max} = 1$ устройство горизонтального перемешивания переводит смесь в однородное состояние за 10 циклов.

Возникает вопрос, как изменится кинетика этого процесса, если устройство вертикаль-

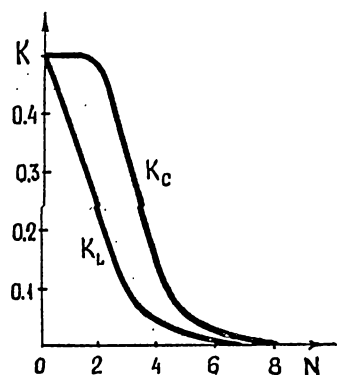


Рис. 9.18

ного перемешивания все же ввести. Оказывается смесь, по-прежнему, будет стремиться к однородному состоянию, но время смешивания изменится. С увеличением h_{\max} от 1 до 1,2 время увеличивается до $N^* = 30$, затем уменьшается до $N^* = 6$. Таким образом, при любой начальной засыпке гарантируется полное смешивание материалов независимо от глубины и размещения ячеек. Необходимо только, чтобы в устройстве было хотя бы две ячейки с различной глубиной. Параметры ячеек влияют только на время полного перемешивания и поведение свободной поверхности материала внутри цикла.

Предположим теперь, что устройство горизонтального смешивания на материалы A и B реагирует по-разному. Пусть

материал A состоит из более упругих частиц и разбрасывается сильнее, чем B . Условие однородности (5.5) будем считать по-прежнему выполненным. Расчеты показывают, что в таком устройстве смесь стремится к однородному состоянию (асимптотическая устойчивость), меняется (причем устойчиво) только время смешивания.

Предположим теперь, что устройство горизонтального смешивания имеет внутренние дефекты, например, условие (5.6) заменяется на следующее:

$$P_{ii} = 1/3 - 2\delta_i, P_{i-1,i} = P_{i+1,i} = 1/3 + \delta_i, \delta_i \neq 0 \text{ и } P_{ij} \equiv g_{ij}.$$

Подобные дефекты могут появиться при изготовлении или неточной настройке устройства G или вследствие неудачного выбора параметров внешних воздействий. В этих случаях смесь также стремится к однородному состоянию. Меняется только стационарный профиль свободной поверхности. Аналогичный результат будет и в случаях, когда стенки смесителя работают либо слишком пассивно (не отбрасывают во внутрь достаточно материала), либо слишком активно.

Перейдем к анализу дефектов устройства, которые для порошков A и B проявляются по-разному. Пусть для компоненты A левая стенка является слишком активной, а для компоненты B — пассивной, например,

$$P_{11} = 2/3 - \delta, P_{21} = 1/3 + \delta, g_{11} = 2/3 + \delta, g_{21} = 1/3 - \delta, \delta \geq 0.$$

В остальных точках выполняются равенства (5.6), (5.7) и $p_{ij} = g_{ij}$. На рис. 9.19 показано, как меняется качество смеси K_C при увеличении числа циклов (начальная засыпка — вертикальная, $g = 6$). Видно, что стационарное состояние однородным не является. Однако степень неоднородности имеет тот же порядок, что и возмущение. Так, при возмущении $\delta = 0,067$; $0,033$ и $0,0033$ соответствующие значения $K_C = 0,1509$; $0,079$ и $0,007$ (кривые 1—3).

Посмотрим теперь, к каким последствиям приведут отклонения от условий свободного падения частиц. Обозначим через T_A , T_B — времена, за которые частицы порошков A и B проходят через устройство G . Пусть устройство G линейно, однородно, $P_{ij} = g_{ij}$ и $T_B \geq T_A$. В расчетной схеме различие в значениях T_A, T_B учитывалось следующим образом. Между слоями разностной сетки $j = \Lambda$, $\Lambda + 1$ вводили $T_B - T_A$ промежуточных слоев. Переход компонента a от слоя Λ к $\Lambda + 1$ осуществлялся сразу согласно соотношениям (5.2). А переход компонента b осуществлялся через промежуточные слои. Поскольку устройство G линейно, то такая задержка равносильна различию во временах прохождения через само устройство. Расчеты показывают, что распределение компонентов с увеличением времени перемешивания стремится к стационарному состоянию, которое не является однородным. Так, при горизонтальной начальной засыпке, когда материал A находится внизу, качество смеси стремится к пределу монотонно (рис. 9.20, графики 1).

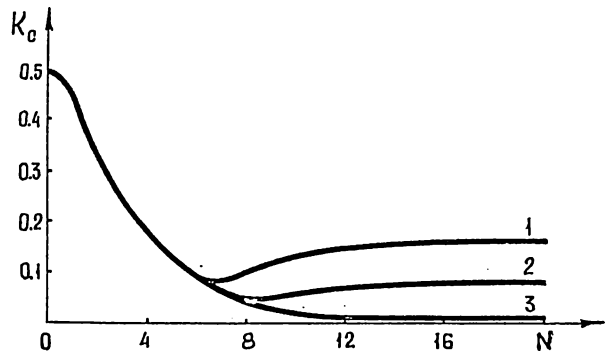


Рис. 9.19

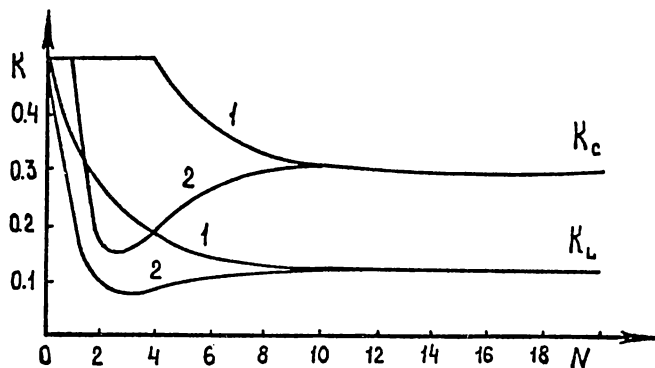


Рис. 9.20

Если же материал A в исходном состоянии находится выше, чем B , то качество смеси сначала улучшается, затем ухудшается (графики 2). В указанном примере $g = 6$, $T_B - T_A = 3$. Выход кривых на общую асимптоту закономерен, так как с увеличением времени смешивания материал „забывает“ вид начальных неоднородностей. Если возмущение $T_B - T_A$ уменьшать, то асимптота будет стремиться к оси абсцисс. Таким образом, по отношению к возмущениям вертикальной относительной скорости движения частиц процесс смешивания устойчив.

Рассмотренная выше разностная схема построена как непосредственная модель процесса без обращения к дифференциальным уравнениям. Из известных моделей наиболее близка к построенной ячеечная модель потока [288]. Проведенное моделирование легко обобщается на случай трех или большего числа смешиваемых компонентов. Возможно также эффективное описание различного рода нелинейностей. Схему расчета можно интерпретировать как реализацию марковского процесса случайного блуждания на дискретной решетке [290]. Выше предполагалось, что объем, по которому проводится контроль качества однородности и усреднение в математической модели, содержит достаточно большое количество частиц обоих компонентов. Если указанное условие не выполняется, то необходим учет флуктуации. Флуктуации имеют также значение, если требования к однородности очень жестки или содержание одного компонента много меньше, чем другого.

Таким образом, 1) численное моделирование показывает, что отклонения от условий идеального смешивания, которые могут быть в реальном аппарате, влияют на качество и время смешивания на величину порядка самого отклонения — процесс к возмущениям устойчив; 2) устойчивость означает возможность создания аппаратов, реализующих принципы идеального смешивания. Ряд технических решений, использующих указанные принципы, рассмотрен в [99—102].

§ 9.4. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ В РАДИАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Расчет локализованных режимов течения, описанных в § 7.6 в строгой постановке наталкивается на значительные математические трудности. Ниже рассматривается кинематика локализованных течений на основе стохастических моделей клеточных автоматов.

В механике горных пород и сыпучих тел стохастические модели начали развиваться применительно к расчету мульд проседания земной поверхности над выработанным пространством [291, 292]. Метод клеточных автоматов был независимо предложен в работах [95, 97] для исследования процесса смещения сыпучих материалов (см. § 9.3). В работе [293] стохастическая модель [95] применялась для анализа кинематики нелокализованного деформирования сыпучих сред. В отличие от классических моделей механики

сплошных сред, где вся теория строится на таких понятиях как поле скоростей и тензор напряжения, модели клеточных автоматов опираются на другую основу. Здесь вся среда представлена в виде дискретного набора ячеек (клеток), каждая из которых обладает определенным правилом „деформирования“: если материал из одной ячейки перемещается, то на его место с определенной вероятностью может поступить материал из любой соседней ячейки. Таким образом, построение стохастической модели деформирования сводится, по существу, к заданию ячеистой структуры тела и определению вероятностей для перемещения материала из одной ячейки в другую. Следует отметить, что модель клеточных автоматов имеет ряд преимуществ по сравнению с классическими моделями механики сплошных сред. Во-первых, здесь нет проблемы описания больших (конечных) деформаций, что в классической механике является весьма серьезной проблемой. Иными словами, данное описание позволяет учесть тот факт, что изначально близкие частицы среды в процессе деформирования могут расходиться сколь угодно далеко. Во-вторых, стохастические модели весьма просты в реализации. Здесь достаточно просто учитывается нелинейность поведения среды, поскольку схема расчета всегда будет явной. С другой стороны, необходимо отметить и недостатки стохастических моделей клеточных автоматов. Одним из основных недостатков этого подхода, является то, что эти модели являются имитационными. В них нет общего алгоритма задания свойств материала, т.е. они имитируют тот или иной процесс деформирования, а не являются универсальными. Иными словами, в настоящее время нет общего универсального способа определения вероятностей стохастической модели по реальным параметрам материала и условиям его деформирования. Тем не менее, современный уровень развития вычислительной техники — с одной стороны, и простота реализации стохастического деформирования среды — с другой, привели к тому, что в последнее время модели клеточных автоматов получают все большее распространение в механике.

Рассмотрим радиальный сходящийся канал с углом раствора, через который осуществляется выпуск сыпучего материала (рис. 9.21). Локализация деформаций в процессе выпуска происходит по дискретной системе линий скольжения. Аппроксимируем линии скольжения прямыми (пунктирные линии, наклоненные к стенкам канала под определенным углом κ). Разобьем область, занятую сыпучей средой, на квадратные ячейки (рис. 9.22). Каждая ячейка может быть либо пустой, либо заполненной материалом. Деформирование среды будем представлять следующим образом. Пусть ячейка C_0 — пустая. Тогда в следующий момент времени она может быть заполнена в результате перемещения материала из любой соседней ячейки C_1, \dots, C_8 . Перемещение материала из ячеек C_1, \dots, C_8 в C_0 означает одновременно образование на ее месте новой пустой ячейки,

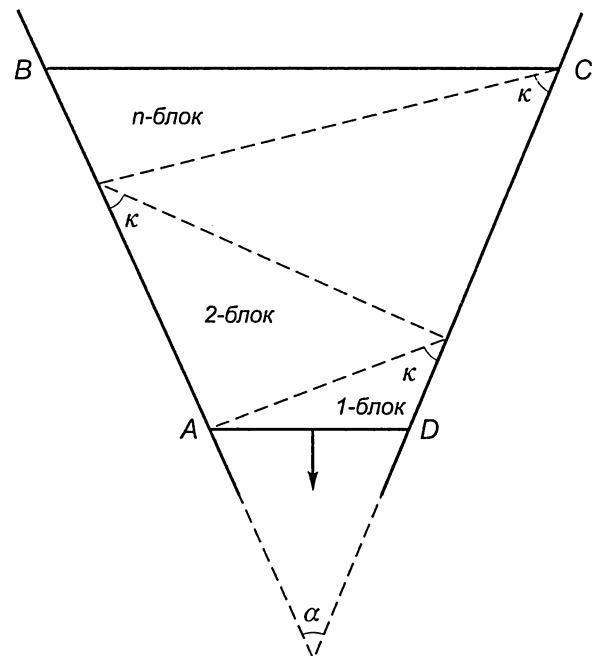


Рис. 9.21

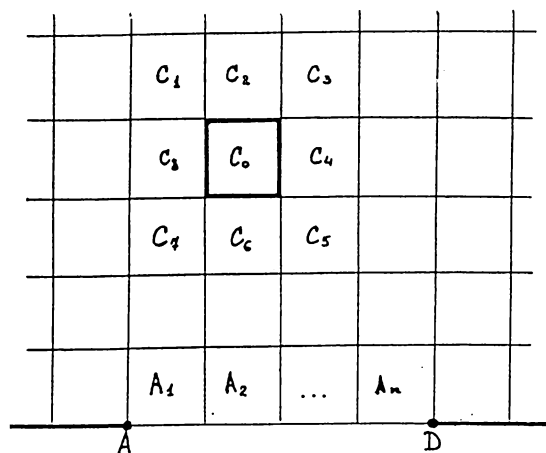


Рис. 9.22

которая по аналогичному алгоритму снова заполняется материалом из соседней ячейки и т. д. Таким образом, внутри материала происходит миграция вакансий. Перемещение вакансий по ячейкам клеточного автомата соответствует перемещению материала в противоположном направлении.

Обозначим через p_1, \dots, p_8 , где $\sum_{i=1}^8 p_i = 1$ —

вероятности перемещения вакансии из ячейки C_0 соответственно в ячейки C_1, \dots, C_8 . В этом случае движения вакансий и, следовательно, кинематика процесса деформирования среды, будут иметь вероятностный характер.

Обратимся к исходной постановке задачи о выпуске. Всю границу расчетной области можно разбить на участки трех типов. Первый тип — граница, через которую происходит вытекание материала. На рис. 9.21 эта часть соответствует отрезку AD . Второй тип — неподвижные непроницаемые стенки: отрезки AB и CD . Третий тип — это свободная поверхность (в начальный момент времени — отрезок BC). Применительно к рассматриваемой стохастической модели каждый тип границы означает постановку на них следующих условий. Выпускное отверстие (отрезок AD) является источником образования вакансий. Если отрезку AD на рис. 9.21 соответствуют ячейки A_1, A_2, \dots, A_n на рис. 9.22, то процесс выпуска моделируется в такой последовательности. Сначала освобождается ячейка A_1 . Образовавшаяся вакансия, в соответствии с описанным выше алгоритмом, начинает мигрировать внутрь области. Если на некотором этапе вакансия переходит в ячейку, граничащую с жесткой непроницаемой стенкой, то на ее место может поступить материал только из соседних ячеек, за исключением граничных. Миграция вакансии продолжается до тех пор, пока вакансия не достигнет свободной поверхности. После этого освобождается ячейка A_2 (см. рис. 9.22), и весь процесс повторяется снова. Ясно, что в результате описанного алгоритма свободная поверхность будет изменять свой профиль. Этот профиль должен удовлетворять условию ограниченности угла естественного откоса сыпучей среды. Для этого в алгоритм при достижении вакансией свободной поверхности вводится дополнительное условие проверки соответствия профиля углу откоса. Если это условие нарушается, то в этом месте происходит сползание определенного поверхностного слоя материала, и соответствие восстанавливается [293].

До сих пор описанный алгоритм не был связан с процессом локализации деформаций. Ниже учет локализации производится путем соответствующего выбора вероятностей p_1, \dots, p_8 . Вернемся к блочной структуре материала, представленной на рис. 9.21. Пусть $1, 2, \dots, n$ — номера блоков. В соответствии с описанным алгоритмом, образование вакансии происходит на участке границы AD , т. е. вакансия находится в первом блоке. Как уже отмечалось, движение блоков слабо отличается от их скольжения как жестких целых. Естественно предположить, что и соответствующие вероятности p_1, \dots, p_8 необходимо выбирать таким образом, чтобы движение материала из одной ячейки в другую проис-

ходило с одинаковыми вероятностями для всех ячеек одного и того же блока и соответствовало его сползанию вдоль стенки канала. Таким образом, все блоки необходимо разделить на два типа: нечетные, которые движутся влево-вниз, и четные, которые движутся вправо-вниз. Для каждого типа блоков выбираются соответствующие вероятности p_1, \dots, p_8 , например, для нечетных блоков наибольшую из вероятностей естественно выбрать p_3 , а для четных блоков, в силу симметрии — p_1 . Таким образом, алгоритм миграции вакансии такой: сначала вычисляется номер блока, в котором вакансия находится в настоящий момент, проверяется его четность и в зависимости от этого выбирается соответствующая восьмерка вероятностей p_1, \dots, p_8 . Далее вакансия перемещается в одну из соседних ячеек, и весь процесс повторяется вновь. После того, как все ячейки выпускного отверстия A_1, A_2, \dots, A_n последовательно освобождаются, естественно предположить, что весь блок сместится на один слой материала вниз. При этом границы разделов блоков (пунктиры на рис. 9.21) также смещаются на один слой вниз, а в вершине C граница раздела блоков автомодельно продолжается до пересечения со свободной поверхностью материала.

Перейдем теперь к численной реализации описанного алгоритма расчета. Возьмем исходное состояние материала в сходящемся радиальном канале как показано на рис. 9.23. Здесь цветом выделено четыре радиальные полосы. Угол раствора канала положим равным $\alpha = 30^\circ$. В соответствии со схемой локализованного течения, показанной на рис. 9.21, выберем ориентацию прямолинейных линий скольжения в виде $\kappa = 40^\circ$. Определим теперь вероятности для моделирования миграции вакансии. Положим, что для нечетной группы блоков (верхний индекс „o“) и четной группы (верхний индекс „e“) вероятности перемещения материала следующие:

$$\begin{aligned} p_1^o &= 0,20 & p_2^o &= 0,30 & p_3^o &= 0,40 \\ p_8^o &= 0,03 & p_4^o &= 0,07 \\ p_5^o &= 0,00 & p_6^o &= 0,00 & p_7^o &= 0,00 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p_1^e &= 0,40, & p_2^e &= 0,30, & p_3^e &= 0,20, \\ p_8^e &= 0,07 & p_4^e &= 0,03, \\ p_5^e &= 0,00, & p_6^e &= 0,00, & p_7^e &= 0,00. \end{aligned} \quad (2)$$

Видно, что вероятности p_1 выбраны так, что для нечетных блоков наибольшая из них соответствует движению материала влево-вниз, а для четных — вправо-вниз. Численно выбор соответствующей ячейки для миграции вакансии с учетом вероятностей (1), (2) осуществляется с помощью стандартного датчика случайных чисел среды Turbo-Pascal.

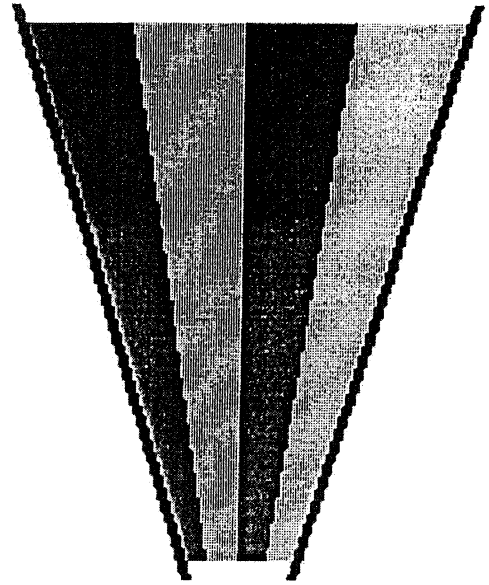


Рис. 9.23

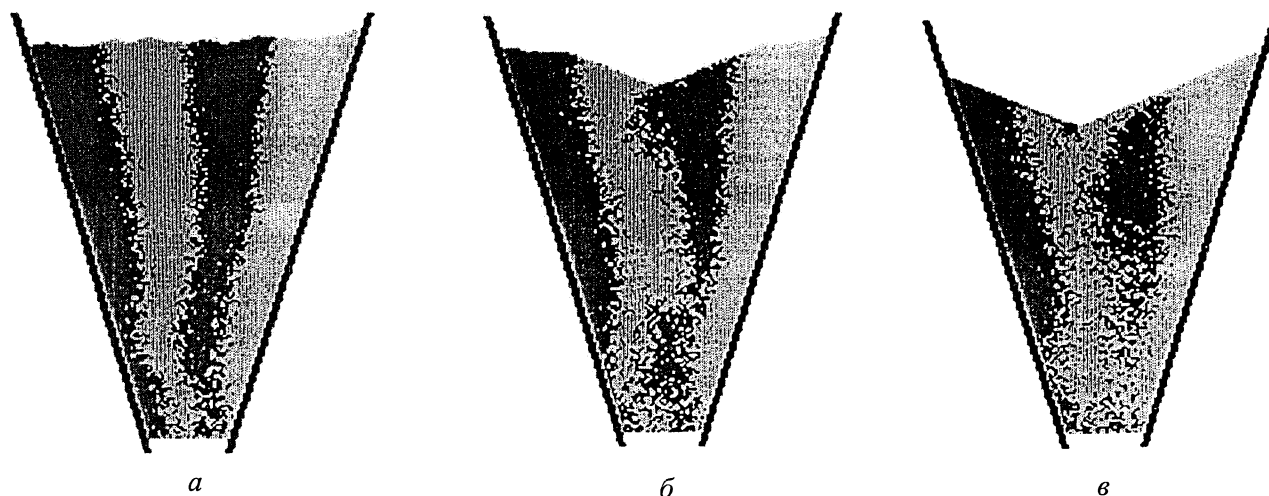


Рис. 9.24

Клеточная разбивка материала осуществлена таким образом, что ширина выпускного отверстия (отрезок AD на рис. 9.21) составляет 30 ячеек. Угол естественного откоса материала составляет 26° . На рис. 9.24 *а—в* показаны последовательные картины течения сыпучей среды в канале. На начальных стадиях выпуска (см. рис. 9.24 *а*) видно формирование линий скольжения и нарушение радиальной симметрии течения. На последующих стадиях материал особенно вблизи выпускного отверстия сильно перемешивается. Более подробно все результаты изложены в [136].

Глава 10. ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ И НАПРАВЛЕННЫЙ ПЕРЕНОС МАСС ЗЕМЛИ

Возвратимся к результатам по теории аффинных деформаций, изложенным в главе 1 и работах [1—5]. Они послужили основой для создания приборов по исследованию поведения сложных сред при различных путях нагружения (глава 2, 3), а также для построения алгоритма, предназначенного для экспериментального получения новых упорядоченных структур (глава 7). Анализ аффинных процессов, рассмотренных в главе 1, приводит еще к одному направлению исследований, представляющему самостоятельный интерес.

Обратимся к плоскому эллиптическому течению, описанному в п. 1.2.2. Первоначально оно вводилось как суперпозиция простых сдвигов типа Куэтта. Как отмечалось, для его точной реализации необходимо взять эллиптическую область и на ее границе задать вектор скорости, направленный вдоль границы. Причем величина скорости должна быть переменной и такой, чтобы выполнялся закон Кеплера (условие постоянства секториальной скорости). Проще, однако, реализовать нагружение, когда постоянной будет величина самой скорости. Такая замена приводит к одному эффекту, который необходимо рассмотреть отдельно.

§ 10.1. ЭФФЕКТ НАПРАВЛЕННОГО ПЕРЕНОСА МАСС ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В главе 1 было показано, что если на границе задать кеплеровское распределение скоростей, то распределение скоростей внутри области будет всегда линейным. Причем этот факт от реологии среды не зависит. Отклонение граничных условий от кеплеровского типа приводит к нелинейности поля скоростей и, следовательно, к зависимости его от реологии среды. Основные черты нелинейного поля можно проследить на модели ньютоновской вязкой жидкости. Задача сводится к решению стационарных уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} v\Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \\ v\Delta v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

внутри области $x^2/(1+m)^2 + y^2/(1-m)^2 \leq 1$ при условии, что на границе заданы обе компоненты скорости $v = \{u, v\}$, удовлетворяющие равенствам (1) § 3.2, где $v_0 = 1$. Здесь использованы стандартные обозначения: x, y — декартовы координаты, v — вязкость, ρ, p — плотность и давление, Δ — оператор Лапласа. Ограничимся случаем большой

вязкости (число Рейнольдса $Re \ll 1$) и малых эксцентриситетов эллипса ($m \ll 1$). Методом малого параметра система сводится к последовательности бигармонических уравнений относительно членов разложения функции тока. Используя схему [196], получим

$$\begin{aligned}
 u = & -y + m(-3y + 2y^3) + m^2\left(\frac{7}{4}y + \frac{7}{2}y^3 - \frac{9}{4}y^5 - \right. \\
 & \left. - \frac{21}{2}x^2y + \frac{15}{2}x^2y^3 + \frac{15}{4}x^4y\right) + m^3\left(\frac{87}{8}y - \frac{57}{4}y^3 - \frac{33}{8}y^5 + \right. \\
 & \left. + \frac{5}{2}y^7 + \frac{165}{4}x^2y - \frac{105}{4}x^2y^5 + \frac{35}{4}x^6y\right) + \\
 & + \frac{Re\,m}{16}(x - 2x^3 + x^5 - 6xy^2 + 5xy^4 + 6x^3y^2), \\
 v = & x + m(-3x + 2x^3) + m^2\left(-\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^5 + \right. \\
 & \left. + \frac{21}{2}xy^2 - \frac{15}{2}x^3y^2 - \frac{15}{4}xy^4\right) + m^3\left(\frac{87}{8}x - \frac{57}{4}x^3 - \frac{33}{8}x^5 + \right. \\
 & \left. + \frac{5}{2}x^7 + \frac{165}{4}x^3y^2 - \frac{165}{4}xy^4 - \frac{105}{4}x^3y^2 + \frac{35}{4}xy^6\right) + \\
 & + \frac{Re\,m}{16}(-y + 2y^3 - y^5 + 6x^2y - 5x^4y - 6x^2y^3).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Перенос частиц и характер деформирования материальных объемов определялись численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = u(x, y), \quad dy/dt = v(x, y). \tag{3}$$

Расчеты показали, что все частицы движутся вокруг центра по замкнутым траекториям. Однако периоды обращения на различных траекториях различны. На рис. 10.1 показаны траектории и положения частиц, расположенных вначале на большой полуоси эллипса (а, б при $m = 0,1; 0,2$). Различие в периодах приводит к тому, что внутренние

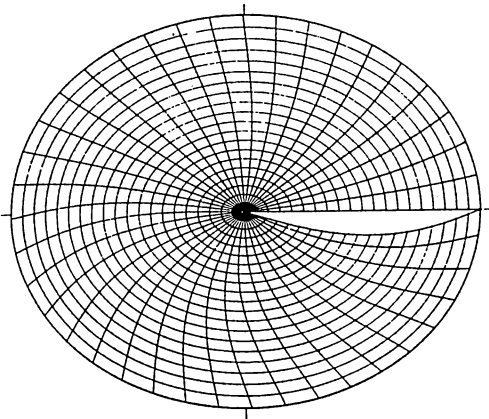


Рис. 10.1 а

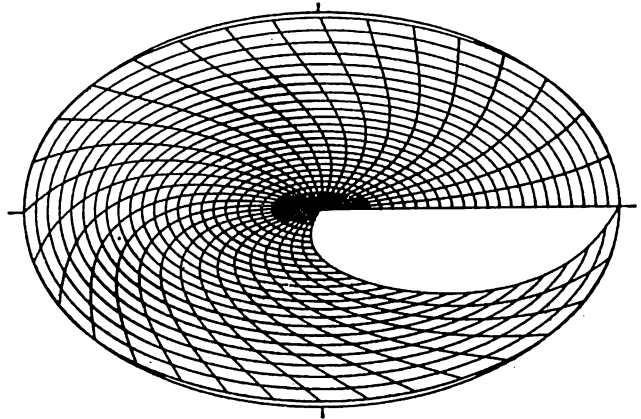


Рис. 10.1 б

деформации тела с увеличением времени неограниченно растут (рис. 10.2 показано изменение формы квадратного элемента). Причем это увеличение происходит в условиях, когда внешние деформации малы (порядка m). Например, области, первоначально близкие к полукругу, в процессе деформирования приобретают спиралевидную форму (см. рис. 10.3; $m = 0,1$, a — 16 оборотов, b — 28 оборотов). С увеличением числа циклов они все больше закручиваются вокруг центра и в пределе вырождаются в две бесконечно тонкие и длинные спирали, которые вложены друг в друга так, что, последовательно чередуясь, целиком заполняют исходную двумерную область.

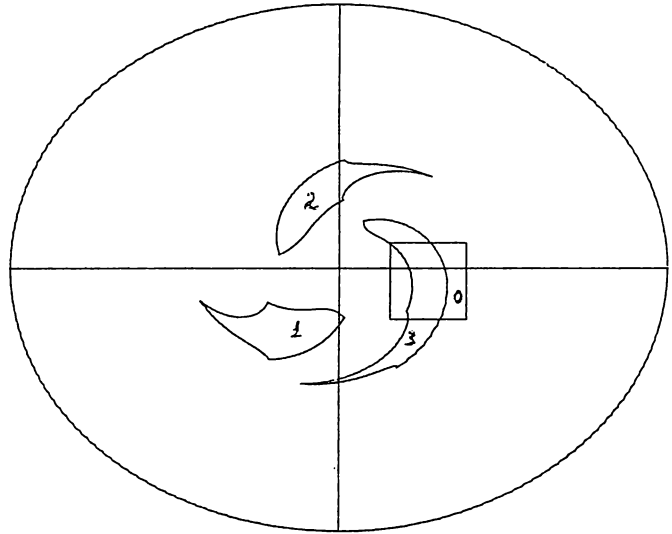


Рис. 10.2

Для вязких жидкостей роль малых параметров m и Re в развитии течения различна: параметр m входит в решение (2) без коэффициента Re , а Re фигурирует только в произведении с m . Поэтому роль последнего в формировании „остаточных“ смещений на фоне параметра m незначительна. Более того, если перейти к пределу $Re \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$), то кинематика течения по сравнению с вариантом $Re \ll 1$ практически не изменится даже количественно.

Решение для сыпучей среды обладает теми же качественными особенностями, что и рассмотренные выше решение (2). Аналогичный результат получается и в рамках гипопластической модели [77].

Итак, в системе координат (2) эффект выглядит как дифференциальное вращение материальных элементов вокруг центра. Лабораторные координаты соответствуют точке зрения наблюдателя, который связан с фиксированной точкой границы области. С этой

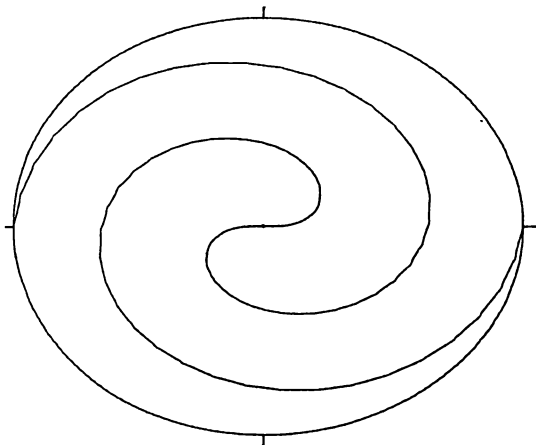


Рис. 10.3 а

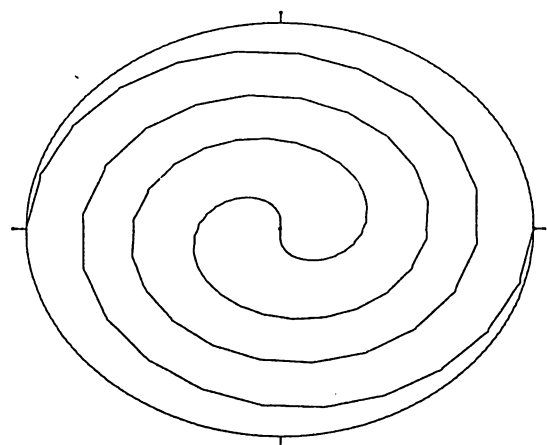


Рис. 10.3 б

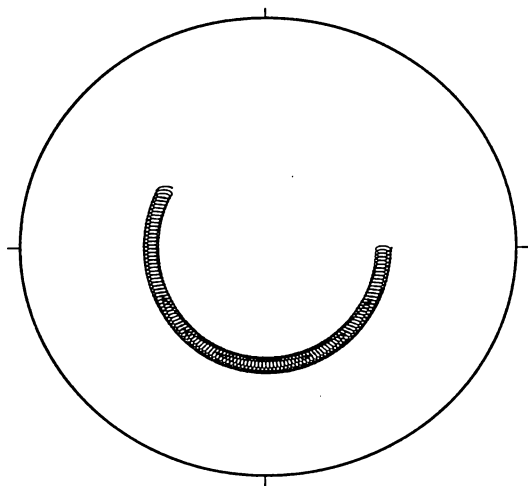


Рис. 10.4

точки зрения каждая точка границы описывает замкнутую петлю. Для упругого тела отсюда следует, что и все внутренние (см. рис. 6.1) точки также будут описывать замкнутые петли. Если же допустить наличие неупругой реакции, то за полный цикл на границе внутренняя точка опишет почти замкнутую петлю, но к первоначальному положению тем ни менее не вернется. С увеличением числа циклов эффект будет накапливаться и точка начнет движение по „глобальной“ траектории, параметры которой определяются расстоянием до центра.

Интересно проследить этот процесс численно. На рис. 10.4 ($m = 0,05$) изображена траектория движения фиксированной точки при увеличении числа оборотов в указанных координатах (показа-

но также положение границы после целого числа циклов). Увеличение эксцентриситета приведет к тому, что за один оборот точки получают большие остаточные смещения, то есть траектории все больше отличаются от „почти замкнутых“ (рис. 10.5 а — $m = 0,1$; б — $m = 0,2$). В своем „глобальном“ движении вокруг центра точка за определенное время совершает полный оборот. В общем случае это время некратно времени совершения одного цикла. Поэтому движение точки на следующем витке происходит по траектории, несколько отличной от предыдущей (см. рис. 10.5 б) и т. д.

Таким образом, в системе координат (2) эффект выглядит как направленный перенос масс. Следует отметить, что в указанных координатах (особенно при малых эксцентриситетах эллипса) приложенный способ нагружения можно рассматривать как задание на поверхности тела определенного волнового движения. При такой интерпретации описанный выше эффект аналогичен переносу частиц жидкости волнами конечной амплитуды [294].

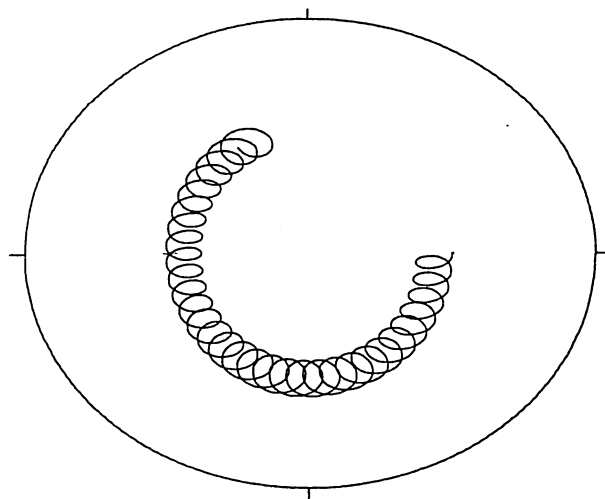


Рис. 10.5 а

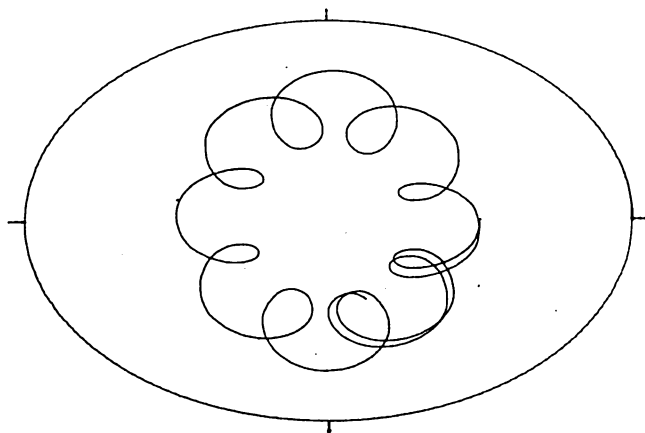


Рис. 10.5 б

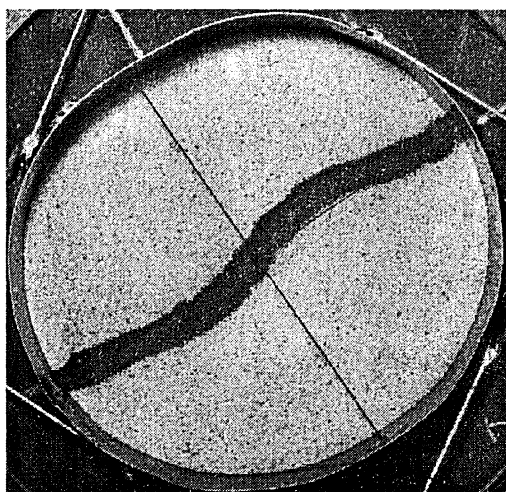


Рис. 10.6 а)

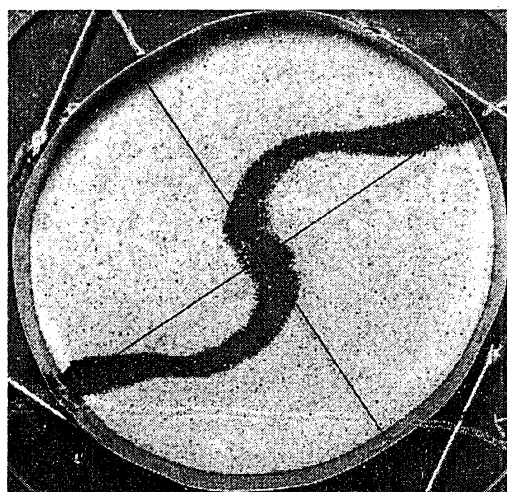


Рис. 10.6 б)

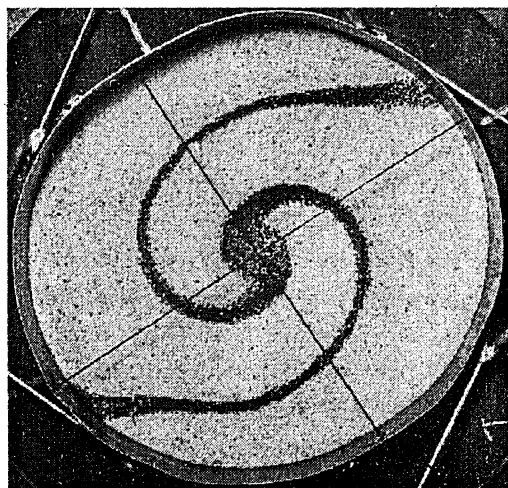


Рис. 10.6 в)

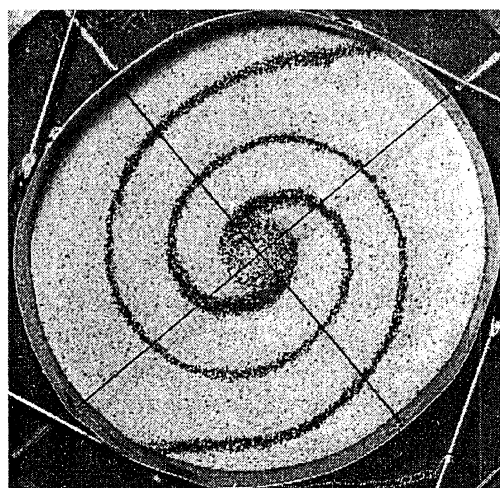


Рис. 10.6 г)

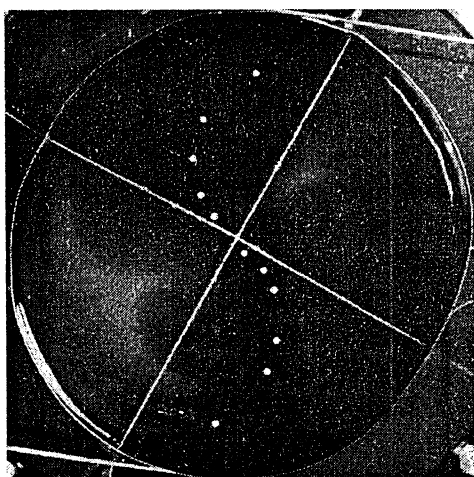


Рис. 10.7

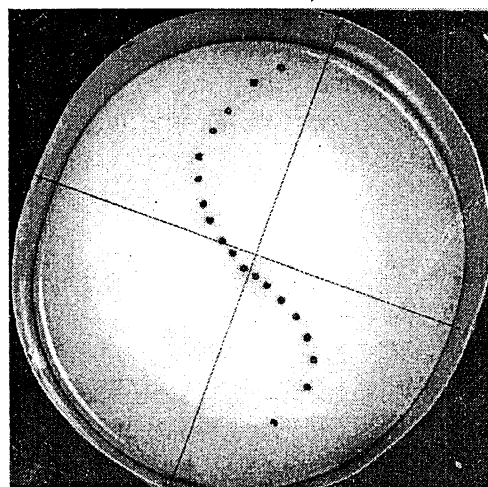


Рис. 10.8

Обратимся теперь к экспериментальным результатам. Эксперименты, проведенные на самых разных материалах, указывают на существование эффекта направленного переноса. На рис. 10.6—10.8 приведены типичные картины деформирования, полученные на сухом кварцевом песке (рис. 10.6), глицерине (рис. 10.7), меде (рис. 10.8). Во всех опытах в исходном состоянии маркерная линия была прямой. Деформирование осуществлялось на стенде, описанном в главе 3.

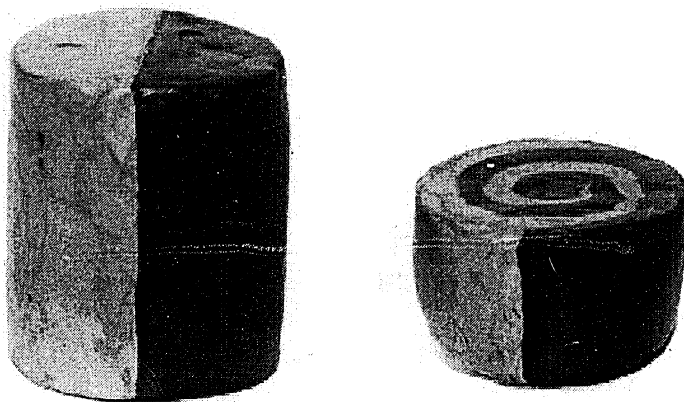


Рис. 10.9

Аналогичный результат получается и на пластилине. Здесь, однако, использование стенда становится затруднительным, так как образец не повторяет форму камеры. Поэтому опыт проводился по-другому. Образец из пластилина заворачивался в бумагу, которая на торцах скручивалась подобно обертке карамели. Затем образец прижимался к столу плоской дощечкой и прокатывался, подобно сигарете при ее разминании. После этого обертка удалялась, образец разрезался на две части и фотографировался. Результат показан на рис. 10.9. Этот опыт вполне возможен и в домашних условиях.

§ 10.2. ПРИЛИВНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КАК ПРОЦЕСС СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В главе 3 была дана интерпретация аффинного эллиптического течения, которая приводит к одному обобщению. Первый шаг на этом пути является почти тривиальным. Он состоит в том, чтобы рассмотреть то же самое течение, но в другой системе координат (см. рис. 3.1). В новой системе координат эллиптическое течение представляет собой последовательность аффинных растяжений в некотором направлении и точно таких же сжатий в ортогональном направлении. Причем указанные направления непрерывно поворачиваются вокруг тела с некоторой постоянной угловой скоростью.

Обратимся теперь к процессу деформирования небесного тела под действием приливных сил (рис. 10.10). Как известно, приливные силы сводятся к обычным массовым силам, которые стремятся растянуть тело в направлении к возмущающей массе и сжать его в ортогональных направлениях. В общем случае тело относительно указанных направлений поворачивается. При указанной интерпретации аналогия в приливном деформировании, с одной стороны, и сложном эллиптическом нагружении — с другой, становится очевидной. В свою очередь это приводит к

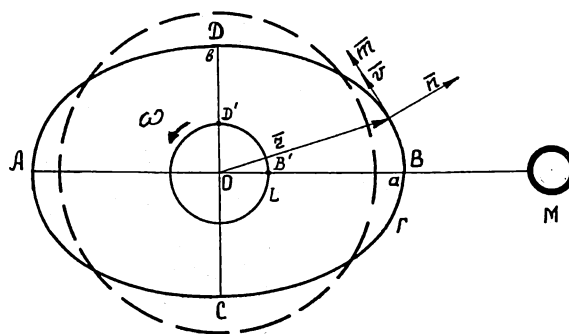


Рис. 10.10

выводу о том, что эффект направленного переноса при сложном нагружении означает возможность переноса масс приливными волнами. Последнее является уже достаточным основанием для более детального изучения указанной аналогии.

Предположение о возможном переносе масс приливами волнами высказывалось ранее в трудах Вегенера, Штрауба, Надаи и др. (см., например, работы [199, 295, 296], в которых содержится дальнейшая библиография). Вместе с тем вопросы о конкретных механизмах переноса, их количественном описании и экспериментальном моделировании в лабораторных условиях — практически не исследовались. Рассмотрим один из возможных подходов к этим проблемам.

§ 10.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИЛИВНЫХ ВОЛН

Реальный процесс приливного деформирования чрезвычайно сложен. Здесь действует множество факторов, большинство из которых можно оценить только с той или иной степенью достоверности.

При разработке методики экспериментального моделирования возникает ряд вопросов. Главный из них — что именно и как моделировать. Приливы, как отмечалось, вызываются массовыми силами, т. е. силами, которые приложены к каждому материальному элементу тела. Моделирование таких сил в лабораторных условиях наталкивается на значительные трудности. Большие осложнения вызывают и попытки моделирования реологии небесного тела. Известно, что его плотность, а значит, и объемные силы меняются с глубиной. От глубины существенно зависят тип реологического поведения и соответствующие параметры. При этом их количественные оценки колеблются в весьма широких пределах. Указанные обстоятельства приводят к следующему выводу: выполнение требований, которые обычно предъявляются к экспериментам (геометрическое подобие и равенство безразмерных чисел, характеризующих процесс в модели и натуре), практически невозможно.

Осуществимым представляется следующий путь исследования: вначале выделяются главные черты приливного деформирования и моделируются только они, причем, возможно, в грубом приближении. Затем полученные результаты используются для построения математических моделей. При математическом описании учет действительного характера массовых сил и сложной реологии принципиальных трудностей уже не вызывает. Здесь проблемы только постановочного и вычислительного характера. Таким путем основные трудности моделирования можно перенести с технических на чисто математические.

Итак, пусть некое тело, близкое к шару, находится в поле приливных сил, создаваемых массой M (см. рис. 10.10). Приливные силы растягивают тело в направлении AB и сжимают его в ортогональных направлениях. В системе координат, связанной с линией центров масс, очертание внешней границы тела остается неизменным. Последняя отличается от сферической, поэтому вращение тела приводит к циклическому деформированию его элементарных объемов. Этот процесс можно представить следующим образом: материальные волокна, расположенные на AB , при смещении вследствие суточного вращения

в положение CD испытывают сжатие, затем при движении к AB — растяжение и т. д. Имея в виду максимальные упрощения, предположим, что прилив создается только одной массой M и плоскость экватора совпадает с плоскостью орбиты. Рассмотрим условия моделирования, которые, с одной стороны, приближают эксперимент к реальной ситуации, с другой — делают его технически осуществимым. Прежде всего нас будет интересовать кинематика деформирования. Как отмечалось, моделирование массовых сил весьма сложно. Поэтому модель будем нагружать другим путем, а именно: 1) будем задавать на границе кинематические условия (скорости или перемещения), которые имитируют приливную волну. Теоретически можно показать, что для определенного класса материалов такая замена на картине деформирования (точнее, на его кинематике) не скажется. Далее, 2) направления сжатия — растяжения относительно материальных объемов должны поворачиваться в одну сторону и осуществляться так, чтобы очертание внешней границы тела не менялось. Кроме того, 3) устройство нагружения должно допускать реализацию сколь угодно большого числа циклов. На этом вопросе стоит остановиться подробнее. Для твердой оболочки Земли высота приливной волны имеет порядок 0,5 м. На модели реализовать такую ничтожную деформацию довольно сложно, и, главное, при этом все эффекты будут настолько малыми, что для их проявления потребуется громадное число циклов. Кроме этого, возникнут проблемы, связанные с возмущениями формы тела и условиями его нагружения. Поэтому, если интересоваться только качественной стороной дела (перенеся все остальные вопросы на математические модели), то можно сформулировать положение 4): в эксперименте приливное искажение формы можно задавать гораздо большим, чем в натуре.

В литературе широко обсуждается вопрос о том, является ли реакция Земли на приливное деформирование упругой или есть все же неупругая составляющая [157, 161, 162, 297, 298, 299].

В настоящее время накоплено достаточно много фактов, свидетельствующих о том, что даже на современной стадии эволюции Земля дает неупругую реакцию на приливные воздействия. Более того, если иметь в виду изучение Земли на стадии ее формирования из допланетного облака [300], то предположение о неупругости выглядит вполне оправданным. Указанные соображения приводят к следующему условию: 5) в качестве модели можно использовать тела, обладающие неупругой реологией.

Теперь еще об одном упрощении. Выше предполагалось, что плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью. Поэтому рис. 10.10 можно рассматривать как сечение тела по экватору. Если не касаться вопроса о неоднородности тела и возможной неустойчивости движения его внутренних масс, то из условия симметрии можно заключить, что переноса вещества через плоскость экватора происходить не должно, т. е. все частицы, принадлежащие этой плоскости, должны двигаться только в этой же плоскости. Изложенные соображения приводят к такой идее: вначале промоделировать деформирование только экваториальной плоскости, причем сделать это в условиях плоской деформации (условие 6).

Процесс сложного нагружения, который был рассмотрен в главе 3, всем указанным выше условиям — удовлетворяет. Следовательно, эффект направленного переноса, обнаруженный при сложном нагружении неупругих тел, означает возможность существования глобального механизма переноса масс Земли приливными волнами.

§ 10.4. СРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ

Итак, кинематическое моделирование приливных волн указывает на существование глобального механизма направленного переноса масс. Численные решения только подтверждают наличие этого эффекта. При этом следует подчеркнуть, что речь идет о задаче, рассмотренной в § 10.1, в кинематической постановке. То есть в задаче так же, как и в экспериментальной модели, на границе задавались перемещения, имитирующие приливную волну, а не напряжения. Оставаясь в рамках кинематической постановки, оценить ее адекватность достаточно сложно.

Поэтому рассмотрим ту же самую задачу в рамках динамической постановки и затем сравним полученные результаты. Как отмечалось, в математической модели учет массовых сил (или, точнее, задание их в качестве причины течения) особых трудностей не составляет. По крайней мере, по степени сложности такие задачи от кинематических принципиально ничем не отличаются (для экспериментальной реализации, как отмечалось, это различие носит принципиальный характер).

Перейдем теперь к постановке задачи. Вначале исключим все факторы, кроме одного — поворота тела в поле приливных сил. Ограничимся плоской деформацией и следующей схемой нагружения. Пусть тело находится в естественном состоянии: смещения, скорости и напряжения равны нулю. В начальный момент $t=0$ „включаются“ приливные силы. С их направлениями свяжем координаты Oxy . Предположим временно, тело относительно осей Oxy не поворачивается. Будем считать, что в этом случае приливные силы вызовут некоторое течение со скоростями

$$u = dx / dt = f(x, y), \quad v = dy / dt = g(x, y). \quad (1)$$

Здесь $x(t), y(t)$ — координаты материальной частицы. Течение (1) назовем базовым.

Свяжем с телом систему координат $Ox'y'$ и „разрешим“ его вращение. Вращение представим как дискретную последовательность отдельных положений тела. Пусть в промежутке времени от 0 до $\Omega \Delta t$ тело неподвижно и под действием массовых сил течет по закону (1). Затем оно скачком поворачивается на угол $\Omega \Delta t$, где Ω — некоторая постоянная. (Или лучше считать, что тело остается неподвижным, а скачком на угол $\Omega \Delta t$ меняется направление массовых сил.) При $t \dots (\Delta t, 2\Delta t)$ тело опять неподвижно. На прежние деформации накладываются новые, которым соответствуют те же скорости (1), и т. д. Осуществляя, как и в [1,2], суммирование смещений в системе $Ox'y'$, затем, переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и координатам Oxy , получим следующий результат:

$$u = dx / dt = f(x, y) - \Omega y, \quad (2)$$

$$v = dy / dt = g(x, y) + \Omega x.$$

Здесь по-прежнему u, v — компоненты скорости в координатах Oxy . Таким образом, вращение тела приводит к появлению аддитивной составляющей вектора скорости. Ее роль в переносе материальных частиц весьма существенна.

Перейдем теперь к конкретным моделям. Предположим, что среда является вязкой, однородной и несжимаемой. Причем вязкость настолько велика, что инерционными силами можно пренебречь. В этом случае уравнения Навье—Стокса аналогичны уравнениям линейно-упругого тела. Поэтому для решения задач можно использовать методы [196].

При оценке массовых сил ограничимся только приливным потенциалом [198]. Тогда компоненты сил равны

$$X = 2\rho\Gamma_x, \quad Y = -\rho\Gamma_y,$$

где ρ — плотность, $\Gamma = G / M D^3$, G — гравитационная постоянная, M — масса, которая вызывает прилив, D — расстояние до ее центра. Примем, что $D = \text{const}$ и, следовательно, $\Gamma = \text{const}$.

Здесь необходимо уточнить смысл плоской деформации. На первом этапе, когда отбрасывается как можно больше факторов, плоская постановка представляется естественной. Фактически под ней подразумевается следующее. Приливный потенциал берется из трехмерной задачи. Как отмечалось, предполагается, что плоскости экватора и орбит совпадают. Перенос масс рассматривается только в этой плоскости. При этом считается, что выполняются уравнения плоской деформации. Это, конечно, довольно грубая модель, но основной эффект она все же предсказывает.

Займемся теперь уравнениями Навье—Стокса. Вначале перейдем к безразмерным переменным (отмечены чертой сверху). Обозначим через R масштаб длины: $x = R \bar{x}$. Тогда в качестве масштаба напряжений необходимо взять величину $\rho \Gamma R^2$: $\sigma_{xx} = \rho \Gamma R^2 \bar{\sigma}_{xx}$, $p = \rho \Gamma R^2 \bar{p}$ и т. д. Здесь, как обычно, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} — компоненты напряжений, p — давление. Для определения масштаба скорости необходимо ввести характерное время. Имея в виду использование результата (2), за единицу времени примем величину Ω^{-1} . Тогда $u = R \Omega \bar{u}$, $v = R \Omega \bar{v}$. Уравнения вязкого течения имеют вид

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Видно, что для коэффициента вязкости естественен следующий масштаб: $\mu = \rho \Gamma R^2 \Omega^{-1} \bar{\mu}$. В дальнейшем безразмерные переменные будем обозначать так же, как и размерные. Уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + 2x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - y = 0 \quad (4)$$

совместно с уравнениями (3) образуют замкнутую безразмерную систему относительно скоростей u, v , напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и давления p .

Перейдем к задачам. Введем полярные координаты r, θ . Луч $\theta = 0$ направим вдоль оси Ox . Пусть исходная область имеет форму круга $x^2 + y^2 \leq 1$. Ее граница от напряжений свободна: $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$. Тогда приливные силы вызывают базовое течение:

$$8\mu u = -x^3 - 3xy^2 + 3x, \quad 8\mu v = y^3 + 3x^2y - 3y, \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = 1 - x^2 - y^2, \quad \sigma_{yy} = -0,5\sigma_{xx}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad p = -0,25\sigma_{xx}.$$

Формулы (5) дают точное решение системы (3), (4) и удовлетворяют поставленным краевым условиям.

В безразмерных переменных правило перехода от (1) к (2) сводится к следующему:

$$u = f(x, y) - y, \quad v = g(x, y) + x. \quad (6)$$

Отсюда для решения (5)

$$dx / dt = -y + \lambda(-x^3 - 3xy^2 + 3x), \quad dy / dt = x + \lambda(y^3 + 3x^2y - 3y), \quad (7)$$

где коэффициент λ , выраженный через размерные параметры, имеет вид

$$\lambda = \rho \Gamma R^2 / 8 \mu \Omega. \quad (8)$$

Как выглядит течение (7)? Этот вопрос удобнее исследовать в полярных координатах. Здесь перенос вещества характеризуется следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = \lambda F(r) \cos 2\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 + \lambda G(r) \sin 2\theta, \quad (9)$$

$$F(r) = r(3 - r^2), \quad G(r) = -(3 - 2r^2). \quad (10)$$

Как правило, приливные силы невелики, так что $\lambda \ll 1$. Поэтому можно использовать метод малого параметра. Как обычно, разложим решение по λ :

$$r(t, \lambda) = r_0(t) + \lambda r_1(t) + \lambda^2 r_2(t) + \dots, \quad \theta(t, \lambda) = \theta_0(t) + \lambda \theta_1(t) + \lambda^2 \theta_2(t) + \dots,$$

сделаем подстановку в (9) и получим цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= 0, \quad \frac{d\theta_0}{dt} = 1, \quad \frac{dr_1}{dt} = F(r_0) \cos 2\theta_0, \quad \frac{d\theta_1}{dt} = G(r_0) \sin 2\theta_0, \\ \frac{dr_2}{dt} &= F'(r_0) \cos 2\theta_0 r_1(t) - 2F(r_0) \sin 2\theta_0 \theta_1(t), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= G'(r_0) \sin 2\theta_0 r_1(t) + 2G(r_0) \cos 2\theta_0 \theta_1(t), \end{aligned} \quad (11)$$

Для наших целей вполне достаточно второго приближения. Пусть начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} r(0, \lambda) &= l, \quad \theta(0, \lambda) = 0, \quad r_0(0) = l, \quad \theta_0(0) = 0, \quad r_1(0) = 0, \quad \theta_1(0) = 0, \\ r_2(0) &= 0, \quad \theta_2(0) = 0, \dots, \quad 0 \leq l \leq 1, \end{aligned}$$

т. е. рассмотрим перенос частиц, расположенных на луче $\theta = 0$. Все уравнения интегрируются и приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} r_0(t) &= l, \quad \theta_0(t) = t, \quad r_1(t) = E(l) \sin 2t / 2, \quad \theta_1(t) = G(l) \sin^2 t, \\ r_2(t) &= -F(l) G(l) \sin^2 t + F(l) [2G(l) + F'(l)] \frac{\sin^2 2t}{8}, \\ \theta_2(t) &= [G'(l)F(l) - 2G^2(l)] \frac{t}{4} + G^2(l) \frac{\sin 2t}{2} - [G'(l)F(l) + 2G^2(l)] \frac{\sin 4t}{16}. \end{aligned} \quad (12)$$

Проследим судьбу двух материальных частиц $l = l_1, l_2$. Решение показывает, что эти частицы обращаются вокруг центра по замкнутым траекториям. В пределах одного оборота различие в их полярных углах возрастает на величину порядка λ и затем уменьшается до величины порядка λ^2 — налицо эффект дифференциального вращения. Главную роль иг-

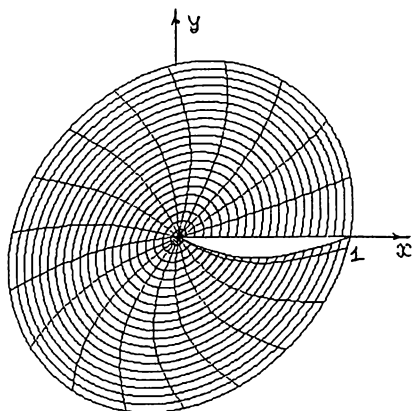


Рис. 10.11 а

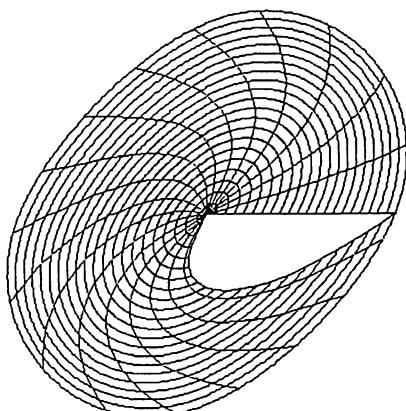


Рис. 10.11 б

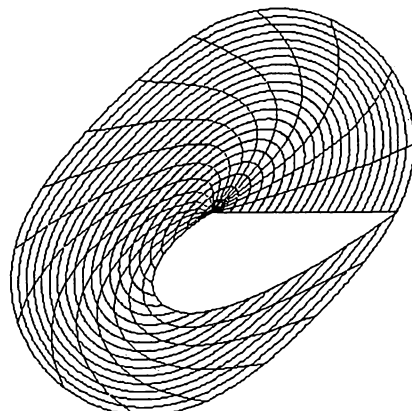


Рис. 10.11 в

рает первое слагаемое в формуле (12) для $\theta_2(t)$. Оно пропорционально времени и поэтому с увеличением числа циклов даже близкие точки l_1, l_2 будут все больше расходиться. Это означает, что процесс идет с накоплением деформаций. Под действием приливных сил меняется конфигурация внешней границы. При малых λ ее форма близка к эллиптической. Оси эллипса составляют с направлением Ox угол 45° . Последнее видно и непосредственно из (9): от угла $\theta = -45^\circ$ до $+45^\circ$ значение $r(t)$ возрастает, затем до $\theta = 135^\circ$ убывает и т. д. Таким образом, чисто вязкая модель без учета самогравитации дает сдвиг по фазе между приливными волной и силой в 45° . На рис. 10.11 показаны траектории и положения частиц $0 \leq l \leq 1$ за один оборот. (Получены численным интегрированием (9) при $\lambda = 0,1; 0,2; 0,25$).

Итак, безразмерное поле скоростей характеризуется параметром λ . Этот параметр определяет конфигурацию внешней границы и, следовательно, высоту приливной волны.

Ситуация здесь очень простая. Пусть задано некоторое тело. В начальный момент на него начинают действовать приливные силы. Как отмечалось, эти силы стремятся растянуть тело в одном направлении и сжать его в ортогональных направлениях. Поэтому если вращения нет ($\Omega = 0, \lambda = \infty$), то вследствие вязкой реологии тело будет вытягиваться в бесконечно длинную и тонкую иглу (базовое течение). Это связано с тем, что стабилизирующие механизмы типа самогравитации и внешних упругих оболочек здесь не учитываются. Единственный стабилизирующий механизм, который фигурирует в модели, — это собственное вращение тела. Действует он таким образом. Тело в направлении возмущающей массы вытягивается. Затем, вращаясь, оно „подставляет“ растяжению новую сторону, которая до этого сжималась, и т. д. В результате устанавливается некоторая стабильная форма. При этом внутренние деформации тела неограниченно увеличиваются. Как и в случае кинематической модели, здесь налицо эффект дифференциального вращения. Видно, что с увеличением массовых сил эффект увеличивается.

Таким образом, динамическая модель дает качественно такой же эффект, как и кинематическая модель. Более того, при малых λ совпадение будет и количественное. При $\lambda \ll 1, m \ll 1$ первые приближения решений (7) и (2) из § 10.1 совпадают между собой. В этом легко убедиться, положив $\lambda = m$ и повернув систему координат на угол 45° . Полученный результат в определенной мере подтверждает правомерность принятого выше кинематического метода моделирования.

§ 10.5. РОЛЬ ТВЕРДОГО ЯДРА

Выше рассматривалась модель однородного тела. Сделаем первый шаг к учету неоднородности. Предположим, что в центре тела находится твердое ядро радиуса L . Реологические уравнения вне ядра будем по-прежнему считать вязкими. Для определения базового течения поставим следующую задачу: найти поле скоростей, которое удовлетворяет уравнениям (3), (4) § 10.4, условиям прилипания на границе с ядром ($u = 0, v = 0$ при $r = L$) и условиям отсутствия напряжений на внешней границе ($\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$ при $r = 1$). Решение этой задачи с учетом формул (6) § 10.4 можно представить в виде (9) § 10.4. Здесь функции F и G имеют вид

$$\begin{aligned} F(r) &= -Ar - Br^3 + \frac{C}{r} + \frac{D}{r^3}, \\ G(r) &= A + 2Br^2 + \frac{D}{r^4}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (-12L^4 + 6L^2 - 6L^{-2})/\Delta, \quad B = (6L^2 - 4 + 2L^{-2})/\Delta, \quad C = (-6L^6 + 6L^2 - 12)/\Delta, \\ D &= (2L^6 - 4L^4 + 6L^2)/\Delta, \quad \Delta = 2(L^6 + 4L^4 - 6L^2 + L^{-2} + 4). \end{aligned}$$

Результаты (11), (12) § 10.4 не опирались на конкретный вид функций $F(r)$, $G(r)$. Поэтому они имеют место и в случае (1). Основные выводы также сохраняются: течение (1) приводит к эффекту направленного переноса, деформации со временем накапливаются (рис. 10.12, $\lambda = 0,1$; $L = 0,2$). При $L \rightarrow 0$ формулы (1) переходят в формулы (10) § 10.4.

Естественно теперь посмотреть, что дает кинематическая модель при наличии жесткого ядра. Обратимся к рис. 10.10. Здесь течение происходит между ядром и внешней эллиптической оболочкой. Причиной течения выступает движение внешней оболочки по закону

$$(\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0, \quad |\bar{v}| = \text{const}. \quad (2)$$

На контакте с ядром выполняются условия прилипания. Поэтому оно будет увлекаться во вращение с некоторой угловой скоростью ω : при $r = L$ имеем

$$v_r = 0 \quad v_\theta = L\omega. \quad (3)$$

Величину ω можно определить следующим образом. Фактически ядро находится в свободном состоянии. В стационарном течении оно вращается равномерно. Следовательно, момент сил, действующих на него, равен нулю. Решим кинематические задачи (2), (3) для разных величин ω и подсчитаем моменты сил. Действительным будет такое ω , при котором момент отсутствует.

Ниже ограничимся приближенной оценкой. Она основана на следующих соображениях. В целом о течении на рис. 10.10 можно сказать, что оно происходит между коаксиальными цилиндрами с переменным зазором. В качестве оценки будем

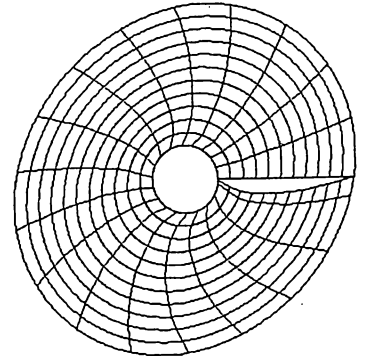


Рис. 10.12

использовать решение для цилиндров с постоянным зазором [301]. Из этого решения видно, что если угловая скорость внешнего цилиндра больше, чем внутреннего, то на последний действует положительный момент, если наоборот, то отрицательный. В нашем случае на внешней границе постоянна не угловая, а линейная скорость. Поэтому соотношение между угловыми скоростями для точек на одном радиусе будет переменным. Так, угловая скорость точки D — наибольшая, а точки A — наименьшая ($\Omega_b = |\vec{v}|/b$, $\Omega_a = |\vec{v}|/a$). Ясно, что ядро должно вращаться с некоторой промежуточной скоростью. При этом течение в зазоре $D'D$ стремится увлечь ядро во вращение против часовой стрелки, а в зазоре $B'B$ — затормозить его. Примем, что касательное напряжение в точке B' такое же, как и в случае двух коаксиальных цилиндров, зазор между которыми равен $B'B$, радиусы L , a и угловые скорости ω и Ω_a . Аналогичное условие примем и для точки D' . Предположим, что суммарный момент будет отсутствовать, если моменты от этих двух экстремальных на контуре напряжений компенсируют друг друга. Отсюда легко определяется скорость вращения ядра

$$\omega = \left[\Omega_a \left(1 - \frac{L^2}{b^2} \right) + \Omega_b \left(1 - \frac{L^2}{a^2} \right) \right] / \left[2 - L^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right]. \quad (4)$$

Если значения a и b близки, то $\omega \approx (\Omega_a + \Omega_b)/2$. В другом крайнем случае, когда $L \rightarrow b$, скорость ядра $\omega \rightarrow \Omega_b$, причем независимо от величин a и Ω_a . В этом случае механизм переноса переходит в волновой механизм, предложенный в [302, 303]. В работе [78] показано, что результат (4) отличается от численного полученного в строгой постановке, не более чем на 1,5%.

Эксперименты [76] на вязких жидкостях подтверждают основные результаты расчета (рис. 10.13). Более сложной будет ситуация, когда ядро вовлекается во вращение сыпучей средой (см. 7.5.3 и рис. 7.28—7.30). В работе [56] приведены экспериментальные данные (полученные на модели), которые показывают, что в зависимости от параметров материала и области возможен как западный дрейф ядра, так и его восточный дрейф. В настоящее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с получением новых фактов, указывающих на возможность восточного дрейфа в натурных условиях [155].

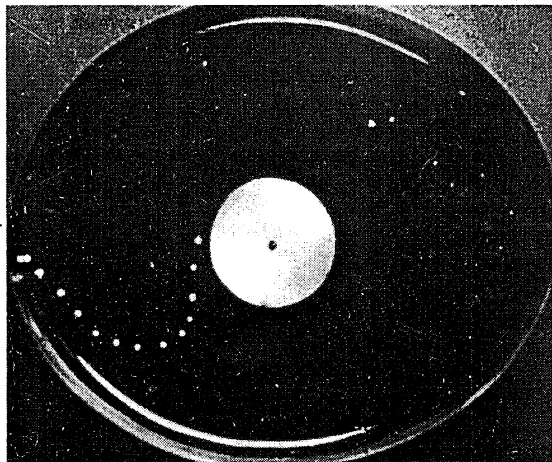


Рис. 10.13

Итак, рассмотренные выше модели указывают на существование приливного переноса масс. Результат его действия представляет интерес и с математической точки зрения. В последние годы возросла роль математических объектов типа фракталов, всюду разрывных отображений и т. д. Приливный механизм дает еще один пример, показывающий, как вполне естественные внешние условия порождают всюду разрывное отображение. Ситуацию лучше всего пояснить на самом простом примере. Пусть дифференциальное вращение создается следующим полем скоростей:

$$dr/dt = 0, \quad d\vartheta/dt = 1 - r.$$

Предположим, что в начальный момент половина круга $r \leq 1$, $0 \leq \vartheta < \pi$ закрашена в белый цвет, а другая половина — в черный. Зафиксируем в пространстве радиус $\vartheta = 0$ и будем интересоваться изменениями его цвета. Эволюцию проще всего проследить в плоскости $r - \vartheta$. Пусть она закрашена полосами, как показано на рис. 10.14. Соединим точки $r = 1, \vartheta = 0$ и $r = 0, \vartheta = t$ прямой. Тогда ее пересечение с белыми и черными полосами даст ответ на вопрос о закраске радиуса в момент t . Видно, что с увеличением t количество белых и черных участков на радиусе неограниченно увеличивается. При этом любой фиксированный участок монотонно смещается от центра к наружной границе $r = 1$, а его длина стремится к нулю. Центр окружности $r = 0$ выступает как источник новых участков разного цвета. Для области это означает, что обе ее половины преобразуются в две бесконечно длинные и тонкие спирали, которые вложены друг в друга так, что, последовательно чередуясь, они целиком заполняют всю область. При этом материальные объемы неограниченно растягиваются и одновременно складываются. В целом процесс деформирования напоминает известное „преобразование пекаря“ [304].

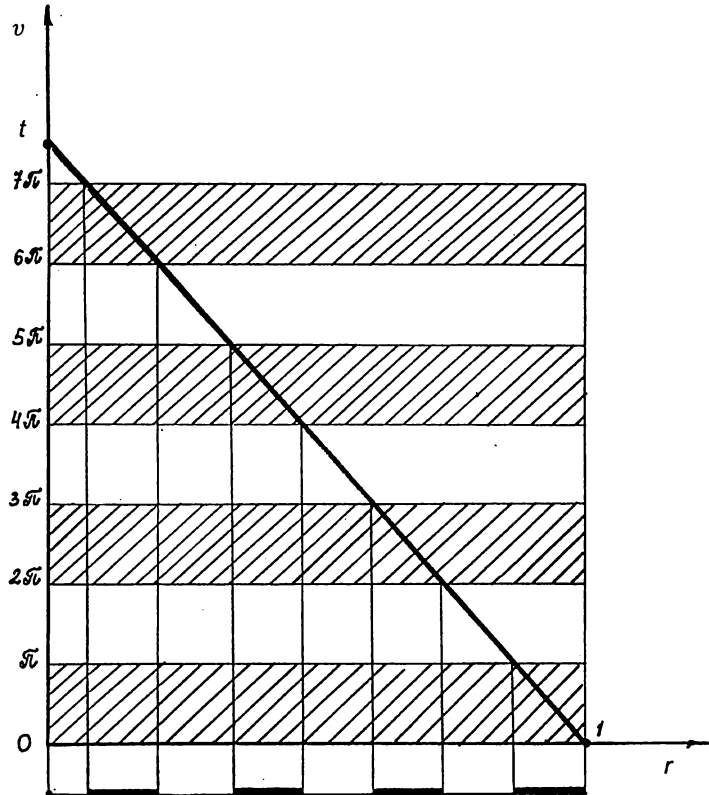


Рис. 10.14

§ 10.6. ПЕРЕХОД К НОВОМУ МЕХАНИЗМУ ПЕРЕНОСА МАСС ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ВЫСОТЫ ПРИЛИВНОЙ ВОЛНЫ

Поля скоростей (9), (10) § 10.4 и (1) § 10.5 показывают, что если значение параметра λ невелико, то все материальные точки обращаются вокруг центра по определенным замкнутым траекториям. И это кажется естественным. Парадоксальным выглядит то обстоятельство, что при больших значениях λ угловая скорость в некоторых областях становится отрицательной. Поэтому характер течения меняется. Такое поведение никаким уравнениям не противоречит и объясняется тем, что при большом приливном растяжении скорость сжатия в ортогональном направлении настолько велика, что не компенсируется переносом частиц вследствие поворота тела. Таким образом, существует критическое искажение формы небесного тела, при переходе через которое картина переноса масс внутри тела меняется качественно.

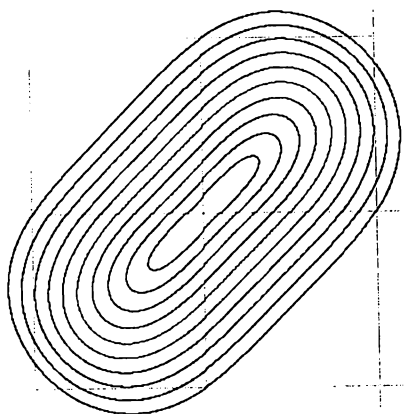


Рис. 10.15

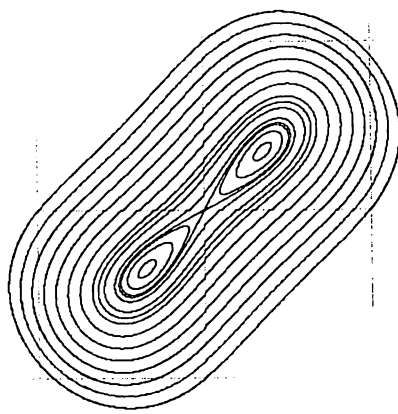


Рис. 10.16

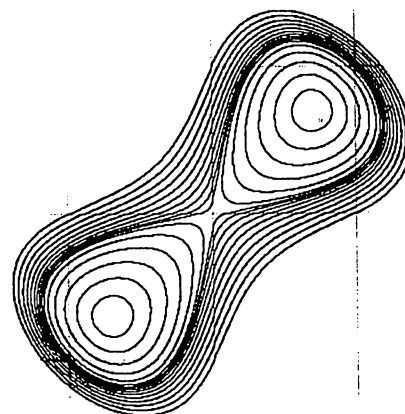


Рис. 10.17

Обратимся к рисункам. 10.11 и будем постепенно увеличивать параметр λ . До значений λ^* область будет постепенно вытягиваться, но вращение точек будет по-прежнему происходить вокруг одного фокуса (рис. 10.15, $\lambda = 0,34$). Затем режим течения изменится качественно: образуются два фокуса и в соответствии с этим две области, в каждой из которых формируется свой вихрь. Эти области ограничены теперь сепаратрисой. Вне сепаратрисы материал движется по-прежнему вокруг одного центра (рис. 10.16, $\lambda = 0,4$). Дальнейшее увеличение высоты приливной волны приводит к появлению у внешней области „тали“ и тенденции к формированию перемычки (рис. 10.17, $\lambda = 1$).

Таким образом, при постепенном возрастании высоты приливной волны механизм переноса масс меняется качественно. Этот результат полностью подтверждается в экспериментах на моделях (см. п. 7.5.4 и рис. 7.31—7.34). Это кажется неожиданным, так как при больших значениях λ краевые условия, строго говоря, необходимо сносить на новую поверхность. Кроме того, в решении использовалась модель вязкой жидкости, в то время как в эксперименте использовался сыпучий материал. Поэтому качественное совпадение расчетов и эксперимента можно отнести либо за счет случайности, либо за счет того, что в данной задаче характер течения определяется не столько реологией среды, сколько спецификой условий ее нагружения. Случай больших λ может представить интерес для описания процессов, рассмотренных в [161, 162].

§ 10.7. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Выше рассматривались плоские модели. Переход к пространственным моделям приводит к усложнению как экспериментальной методики, так и всех численных расчетов. В [76, 79] описан стенд и приведены результаты расчетов приливного деформирования трехмерного тела, близкого к шару. Эксперименты подтвердили наличие эффекта направленного переноса и в этом случае. Предполагалось, что ось вращения тела направлена ортогонально к плоскости эклиптики. Наибольший эффект наблюдался в экваториальной плоскости. При смещении к полюсам эффект уменьшался.

Трехмерные расчеты также указывают на существование направленного переноса, хотя и весьма незначительного (по крайней мере в рамках модели, когда тело предполагается

однородным). Интересно отметить, что если в решении формально увеличить высоту приливной волны, то вблизи экваториальной плоскости появляются два симметричных объемных вихря, которые исчезают на высоте, примерно равной 0,6 радиуса тела. В экваториальной плоскости картина течения аналогична показанной на рис. 10.16 и 7.31—7.34.

Следует отметить, что в объемном стенде [76] также, как и в плоском, была реализована кинематическая схема моделирования. Такая же схема использовалась и в математической модели [79]. Реализация пространственной динамической модели наталкивается на значительные трудности вычислительного плана. Поэтому рассмотрим одну упрощенную модель.

Хорошо известны рассуждения Ньютона, на основании которых он вычислил величину сжатия Земли. Ньютон рассматривал два канала, простирающиеся от полюса до центра Земли и от центра до экватора. Каналы заполнены водой и сообщаются между собой в центре Земли. Поэтому давление воды в центре в обоих каналах должно быть одинаковым. Центробежная сила „уничтожает“ определенную часть веса воды в канале, направленном к экватору. Поэтому равновесие будет сохранено только в случае, когда высота столба воды, направленного к экватору, будет несколько больше высоты столба, направленного к полюсу. Отсюда Ньютон получил величину сжатия Земли, равную 1/230 [305].

Кажется удивительным, что такая простая модель дала не только абсолютно верный качественный результат, но и вполне приемлемый количественный результат. От современного значения сжатия он отличается всего лишь на 22%. Эти обстоятельства позволяют надеяться, что и модели, построенные как обобщение этой классической модели, могут дать вполне приемлемые результаты. Идея обобщения очень проста. В исходной модели учитываются силы самогравитации и центробежные силы. Можно попытаться таким же образом учесть и приливные силы. Учет приливных сил водит в систему элемент нестационарности. Для любого фиксированного канала, проведенного от центра Земли к ее поверхности, центробежную и гравитационную силы можно принять постоянными. Приливная же сила зависит от ориентации канала и будет все время меняться. Поэтому необходимо учесть динамику среды, а значит, и ее реологию.

Ниже ограничимся построением самой простой модели, которая была бы как можно ближе к исходной модели Ньютона. На величину приливных сил ограничений накладывать не будем. Поэтому для общности будем говорить о деформировании небесного тела, имея в виду Землю при малых силах или двойную звезду или другой объект при больших силах.

Введем бесконечно много цилиндрических каналов, которые простираются от поверхности тела к его центру. Все каналы заполнены линейно вязкой жидкостью и в центре сообщаются между собой. Поместим начало координат в центр, ось Ox' направим к возмущающей массе, ось Oz — вдоль оси вращения тела. Остальные обозначения указаны на рис. 10.18. Пусть (r, φ, ϑ) сферические координаты, связанные с системой $Oxyz$. Зафиксируем некоторый канал и рассмотрим движение жидкости вдоль его оси. Пусть σ и u — средние по сечению нормальные напряжения и смещения, F — составляющая объемной силы вдоль оси канала, ρ — плотность жидкости. Пренебрегая силой Кариолиса, имеем:

$$\frac{d\sigma}{dr} - \mu \dot{u} + F = \rho \ddot{u}, \quad (1)$$

где точка, как обычно, обозначает производную по времени t , μ — коэффициент вязкого трения. Ограничимся случаем однородного и несжимаемого тела. В качестве отсчетного примем состояние, когда действуют только силы самогравитации и тело имеет форму шара радиуса R . Центробежные и приливные силы приведут к искажению формы. Соответствующим изменением гравитационного потенциала пренебрежем. В результате получим

$$F = \gamma \cdot r, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad \gamma_1 = -\rho \frac{g_0}{R}, \quad \gamma_2 = \rho \omega^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma_3 = \gamma_3(t),$$

где γ_1, γ_2 — интенсивность силы самогравитации и центробежной силы, ω — скорость вращения тела, $\gamma_3(t)$ — интенсивность приливной силы. Последнюю проще всего определить, если воспользоваться приемом [306]. Заменим возмущающую массу M на две массы $M/2$, расположенные симметрично относительно изучаемого тела. Тогда движение тела по орбите можно исключить и приливную силу рассматривать как чисто статическую, вызванную гравитационным притяжением к указанным двум массам.

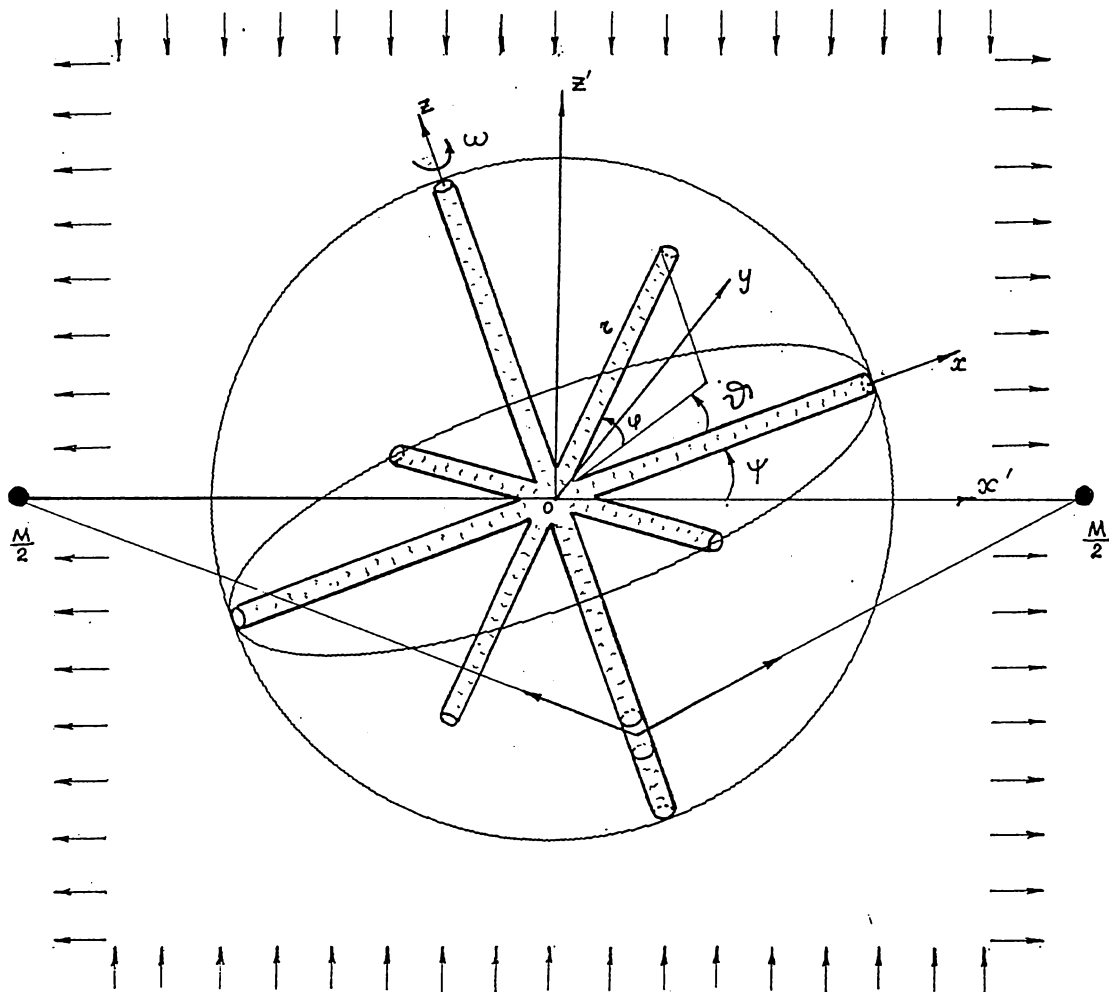


Рис. 10.18

Как известно, приливная сила сводится к обычной массовой силе, компоненты которой пропорциональны соответствующим декартовым координатам и равны: $2\Gamma x'$, $-\Gamma y$, $-\Gamma z'$, где $\Gamma = \rho GM / D^3$, G — гравитационная постоянная, D — расстояние до возмущающей массы. Отсюда

$$\gamma_3 = \Gamma[2(x')^2 - y^2 - (z')^2]/r^2. \quad (2)$$

Вернемся к уравнению (1). Условие несжимаемости показывает, что смещение от r не зависит. Поэтому уравнение можно проинтегрировать:

$$\sigma(r, t) = (\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})r - \gamma r^2/2 + c(t),$$

где c — „постоянная“ интегрирования. Поверхность тела от напряжений свободна: $\sigma(R+u) = 0$. Следовательно,

$$(\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})(R+u) - \frac{\gamma}{2}(R+u)^2 + \sigma^0(t) = 0, \quad (3)$$

где $\sigma^0(t)$ — напряжение в центре тела. Принятое краевое условие равносильно следующему условию, поставленному на поверхности тела до деформации:

$$\sigma(R, t) = \gamma Ru + \frac{\gamma}{2}u^2 - (\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})u.$$

Первое слагаемое равно весу слоя, заключенного между деформированной и недеформированной поверхностями (при $u > 0$). В нем учтена поправка на центробежную силу, но значение потенциала взято на основании слоя $r = R$. Остальные слагаемые дают поправки на изменение потенциала в пределах слоя, а также на силы инерции, трения и приливные силы, действующие на этот слой. При $|u| \ll R$ ими можно пренебречь. Тогда краевое условие принимает вид

$$\sigma(R) = (\gamma_1 + \gamma_2)Ru.$$

Отсюда

$$(\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})R - (\gamma_1 + \gamma_2)Ru - \frac{\gamma}{2}R^2 + \sigma^0 = 0.$$

Таким образом, задача свелась к исследованию континуума связанных между собой осцилляторов. Каждый из осцилляторов (каналов) можно идентифицировать двумя параметрами, например, α и β , равными углам ϑ и φ в начальный момент времени. Иными словами, α и β — это лангранжевы координаты канала; ϑ и φ — эйлеровы координаты, r — координата вдоль оси канала. Связь осцилляторов между собой проявляется в том, что величина σ^0 для всех для них одинакова. Она определяется из условия сохранения общей массы жидкости во всех каналах.

Вращение тела приводит к переносу канала (α, β) в пространстве по следующему закону:

$$\vartheta(t) = \alpha + \omega \cdot t, \varphi(t) = \beta.$$

Рассмотрим соответствующее изменение приливной силы. Очевидно, что

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \psi - z \sin \psi, \quad z' = x \sin \psi + z \cos \psi, \\x &= r \cos \varphi \cos \vartheta; \quad y = r \cos \varphi \sin \vartheta; \quad z = r \sin \varphi.\end{aligned}\tag{4}$$

Подставим (4) в (2). В результате получим:

$$\gamma_3 = k + f \cdot \cos 2\varphi + h \cos^2 \varphi \cos 2\vartheta - G \sin 2\varphi \cos \vartheta,$$

где

$$\begin{aligned}4k &= -\Gamma(1 - 3\sin^2 \psi), \quad 4f = 3\Gamma(1 - 3\sin^2 \psi), \\2h &= 3\Gamma(1 - \sin^2 \psi), \quad 2G = 3\Gamma \sin 2\psi.\end{aligned}$$

Ограничимся только стационарным решением:

$$u(\alpha, \beta, t) = u(\alpha + \omega t, \beta) = u(\vartheta, \varphi).$$

Отнесем смещение к R , вязкость к $-\rho\omega$, напряжения — к $R^2\rho\omega^2$ и постоянную Γ — к $\rho\omega^2$. В результате придем к следующему уравнению:

$$u'' + \mu u' + (\lambda - \cos^2 \varphi)u = -\sigma^0 + 0,5(-\lambda + \cos^2 \varphi + k + f \cos 2\varphi + h \cos^2 \varphi \cos 2\vartheta - G \sin 2\varphi \cos \vartheta),\tag{5}$$

где $\lambda = g_0 / R\omega^2$ и штрихом обозначена производная по ϑ . Решение имеет вид [188]:

$$\begin{aligned}u &= \frac{-\lambda + \cos^2 \varphi + k + f \cos 2\varphi - \sigma^0}{2(\lambda - \cos^2 \varphi)} + \frac{h \cos^2 \varphi \cdot \cos(2\vartheta - \varepsilon)}{2\sqrt{(\lambda - \cos^2 \varphi - 4)^2 + 4\mu^2}} - \\&- \frac{G \sin 2\varphi \cdot \cos(\vartheta - \delta)}{2\sqrt{(\lambda - \cos^2 \varphi - 1)^2 + \mu^2}},\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\mu}{\lambda - \cos^2 \varphi - 4}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu}{\lambda - \cos^2 \varphi - 1}.\tag{7}$$

Решение описывает форму, которое принимает тело под действием самогравитации, центробежных и приливных сил. Тело вращается и при этом деформируется так, что для внешнего наблюдателя конфигурация его внешней формы остается неизменной. Поэтому решение (7) описывает и закон деформирования тела.

Рассмотрим теперь вклад различных факторов в этот процесс. Прежде всего из (7) следует, что вязкость приводит к сдвигу фаз между приливной волной и приливообразующей силой. Причем для различных сечений тела $\varphi = \text{const}$ сдвиг будет различным. Это вызывает скручивание тела вокруг оси вращения. Далее, легко заметить, что последнее слагаемое в (6) связано только с наклоном оси вращения тела ($G = 0$ при $\psi = 0$). Только указанное слагаемое нечетно по φ и содержит гармонику с периодом 2π . Это приводит к несимметрии северного и южного полушарий, а также к несимметрии тела по отношению к плоскостям, проходящим через его ось вращения.

Случай, когда ось вращения тела направлена к возмущающей массе, является особым. При $\psi = 90^\circ$ $h = G = 0$ и решение от угла ϑ становится независимым. Поэтому тело будет

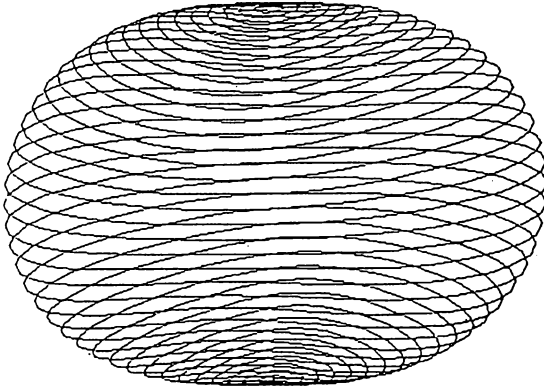


Рис. 10.19 а

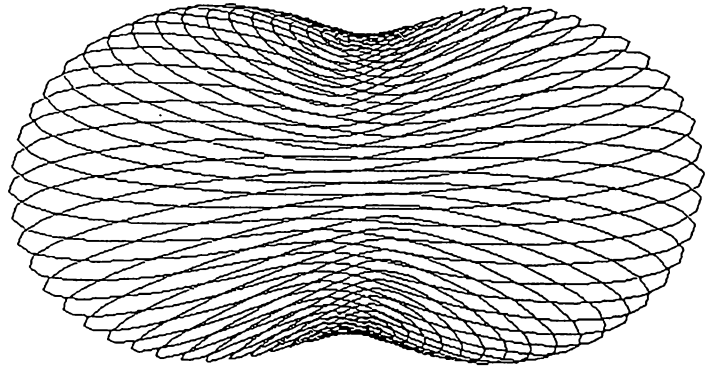


Рис. 10.19 б

вращаться как жесткое целое. Можно отметить также случай, когда $\sin^2 \psi = 1/3$ и $k = f = 0$. Здесь решение упрощается, но принципиально от общего случая оно ничем не отличается.

Исключим теперь указанные факторы и рассмотрим подробнее случай, когда приливные силы значительно возрастают. Положим $\psi = 0$ и для слоя, заключенного между исходной и деформированной поверхностями тела,

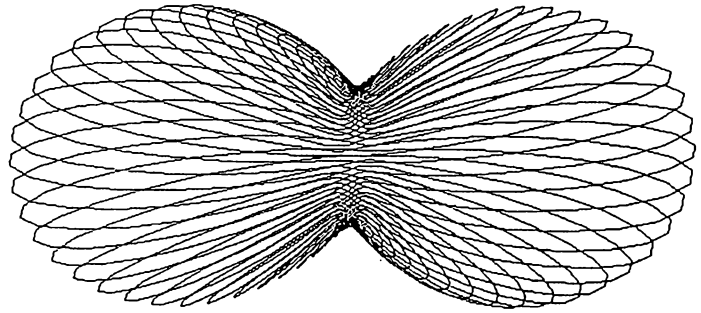


Рис. 10.19 в

пренебрежем центробежной силой. (В левой части уравнения (5) опустим член $\cos^2 \varphi \cdot u$). Тогда сдвиг по фазе по всем сечениям тела станет одинаковым. Поэтому, повернув оси координат, этот фактор можно также исключить. Как отмечалось, постоянная σ^0 определяется из условия сохранения объема тела. Удобнее σ^0 заменить на N так, чтобы

$$r = 1 + u(\varphi, \vartheta) = N(1 + m \cos^2 \varphi \cos 2\Theta + n \cos 2\varphi), \quad (8)$$

где

$$\Theta = \vartheta - \chi/2, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{2\mu}{\lambda - 4}, \quad N = \frac{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5}{2\lambda},$$

$$n = \frac{f + 0,5}{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5}, \quad m = \frac{\lambda}{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5} \cdot \frac{h}{\sqrt{(\lambda - 4)^2 + 4\mu^2}}.$$

В качестве параметров нагружения примем величины m и n . В исходном состоянии $m = n = 0$ и тело имеет форму шара. Увеличивая m и n , можно проследить, как меняется форма тела при увеличении приливных и центробежных сил. Весь сценарий развития зависит от соотношения m и n . При $m = 2n$ тело будет сохранять осевую симметрию с осью Ox на всех этапах своей эволюции. При малых n тело приобретает форму сфероида, который постепенно уплощается. Затем появляется вогнутость („талия“) и тело приоб-

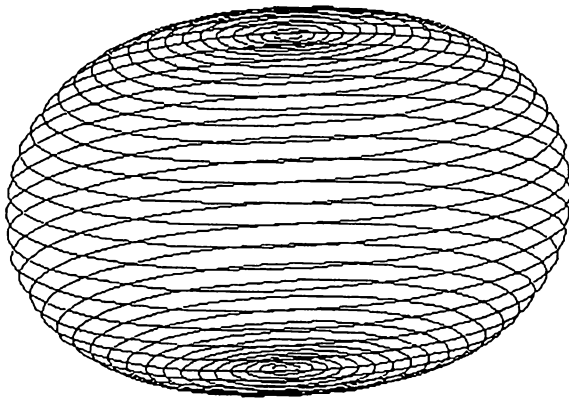


Рис. 10.20 а

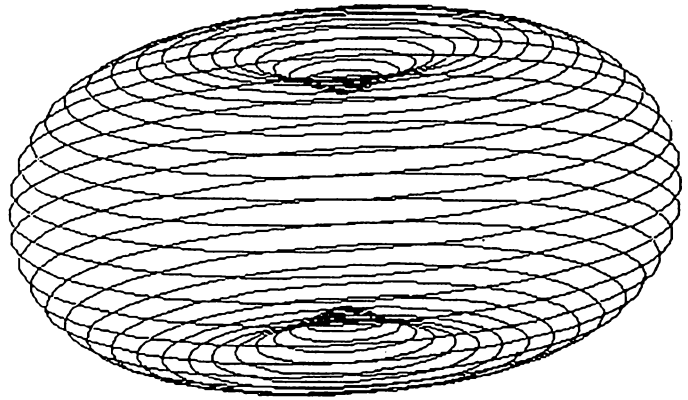


Рис. 10.20 б

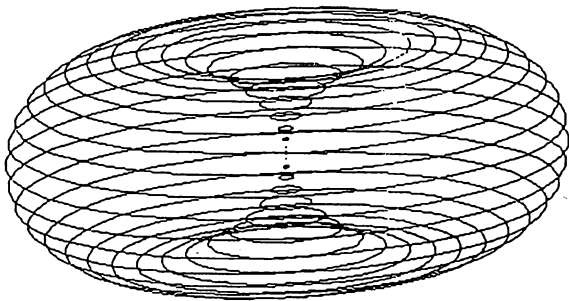


Рис. 10.20 в

ретаает форму гантели (рис. 10.19 а — $n = 0,1$; $m = 0,2$; б — $n = 0,25$; $m = 0,5$; в — $n = 0,5$; $m = 1$). При $m = 2$, $n = 1$ „талиа“ вырождается в точку и тело распадается на два сфероида.

Другой крайний случай реализуется при $m = 0$. Здесь тело также будет иметь осесимметричную форму с осью Oz (рис. 10.20 а — $n = 0,25$; б — $n = 0,5$). Критическое состояние достигается при $n = 1$ (тело приобретает форму, подобную тору, рис. в. На рис. 10.21 показаны

промежуточные формы (а — $n = 0,6$; $m = 0,6$; б — $n = 0,7$; $m = 0,7$)

Рассмотренная модель является исключительно простой и по существу одномерной. Поэтому она допускает ряд обобщений, которые принципиально задачу не усложняют. Во-первых, при больших искажениях формы необходимо переходить к квазилинейному уравнению (3). Интегрирование трудностей не представляет. Кроме того, цилиндрические каналы естественно заменить на радиальные, сходящиеся к центру тела. Это обобщение существенно ничего не меняет. Не выходя за рамки модели, можно также учесть и изменение гравитационного потенциала тела. Основным в модели, по-прежнему, остается условие несжимаемости, которое позволяет проинтегрировать уравнение движения.

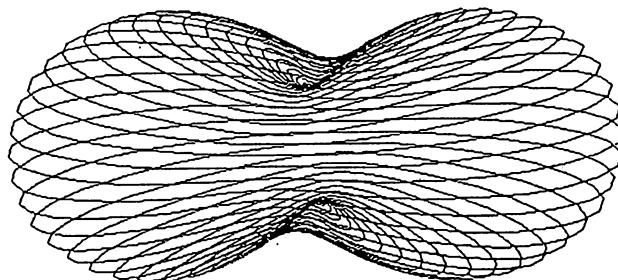


Рис. 10.21 а

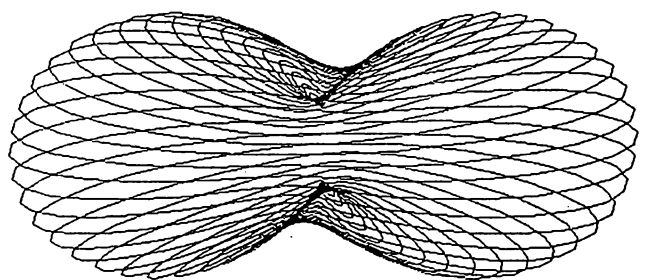


Рис. 10.21 б

Более сложным является вопрос о внутреннем трении. Выше предполагалось, что сопротивление пропорционально скорости движения жидкости. Это означает наличие у каналов стенок. Можно рассмотреть вариант, когда стенки „убираются“ и трение становится пропорциональным градиенту скорости. Тогда в плоской задаче сопротивление будет пропорционально $\partial^3 u / \partial t \partial \alpha^2$. Поэтому в стационарном уравнении появится производная третьего порядка. Третья производная от синусов и косинусов с точностью до знаков совпадает с первой производной. Поэтому вид линейного решения сохраняется и в этом случае. Выше предполагалось также, что угол наклон оси вращения ψ и скорость вращения тела ω — постоянны. В действительности они меняются. Однако характерное время их изменения много больше суток [307]. Поэтому зависимость ψ, ω от t можно учесть как параметрическую.

Итак, рассмотренная модель позволяет проследить эволюцию формы тела и закон его деформирования при постепенном увеличении центробежных и приливных сил. В зависимости от параметров может реализоваться множество различных форм тела, начиная от шара и сфероидов и заканчивая формами в виде торов или гантелей. В последнем случае можно проследить постепенный распад тела на два сфероида.

Глава 11. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Как известно, в механике твердого тела разделение задач на прикладные и теоретические весьма условно. Практически все задачи механики так или иначе связаны с приложениями. Так, все рассмотренные выше задачи (за исключением приливов, линий тока энергии и точных решений уравнений идеальной пластичности) возникли при решении конкретных прикладных проблем. Методы решения таких задач можно отнести к теоретическим в том смысле, что их можно свести к решению той или иной системы уравнений при заданных краевых и начальных условиях.

Однако есть широкий класс задач, методы решения которых не сводятся только к теоретическим. Это задачи технического плана, где проблемы сводятся к поиску ответа на вопрос: „Как сделать?“, то есть к поиску некоторых технических решений. Однако и для решения подобных задач также необходимо знание свойств среды, различных эффектов ее деформирования, проведение расчетов и т. д.

В настоящей книге ограничимся только теми задачами, которые непосредственно связаны с рассмотренными выше теоретическими и экспериментальными результатами.

§ 11.1. ПСЕВДОВЯЗКОСТЬ СЫПУЧИХ СРЕД И ЗАДАЧИ ОБОГАЩЕНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Вначале рассмотрим одно свойство сыпучих сред, связанное с внешним сухим трением между ее частицами.

1. Основным закон, который управляет поведением сыпучих сред, — это закон сухого трения Кулона—Аматона. Согласно этому закону, два соприкасающихся тела начинают скользить друг по другу, когда касательное усилие T достигает определенной доли от нормального усилия P :

$$T = f \cdot P. \quad (1.1)$$

Здесь f — коэффициент внешнего трения, который зависит только от свойств поверхности контакта и не зависит ни от величины сжатия P , ни от площади контакта и скорости сдвига. Несмотря на привычность и внешнюю простоту, соотношение (1.1) содержит в себе одно неожиданное на первый взгляд следствие. Оказывается, что сухое трение в определенном смысле может проявляться в принципиально другом режиме, а именно, как трение вязкое. Это проще всего проиллюстрировать на следующем примере.

Пусть на жесткой горизонтальной поверхности покоится тело весом P (рис. 11.1, вид сверху). Приложим к телу в направлении Oz сдвигающую силу τ . Будем считать, что эта сила мала так, что порог трения она не преодолевает и поэтому тело остается неподвижным. Затем приложим в направлении Ox силу F , которую будем увеличивать монотонно от

нуля. В какой-то момент времени порог трения будет преодолен и тело начнет скользить по горизонтальной поверхности. Легко видеть, что скольжение будет происходить не в направлении OX , а в направлении OA , причем

$$\sqrt{F^2 + \tau^2} = f \cdot P, \quad \sin \alpha = \frac{\tau}{P \cdot f}, \quad v_z = v \cdot \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Здесь v — скорость тела, v_z — составляющая скорости в направлении Oz . Из (1.2) равенств следует, что

$$v_z = \frac{v}{P \cdot f} \cdot \tau. \quad (1.3)$$

Последнее равенство показывает, что скорость тела в направлении Oz пропорциональна силе τ , действующей в этом же направлении. Иными словами, закон трения проявляется как вязкий (точнее, псевдовязкий). Это свойство хорошо известно и используется в ряде устройств [308].

Внутреннее трение сыпучих материалов является следствием внешнего трения частиц, из которых сложены эти материалы. Поэтому можно ожидать, что при определенных условиях эффекты, подобные (1.3), будут наблюдаться и для сыпучих сред. Какими должны быть эти условия? Из равенств (1.2), (1.3) прежде всего ясно, что псевдовязкость может обнаружить себя только на фоне сил, которые порог сухого трения преодолели. Поэтому необходимо реализовать такое деформирование сыпучей среды, которое обеспечит относительные проскальзывания между ее частицами. Причем для получения заметного эффекта необходимо задать достаточно большую величину относительного скольжения. Действительно, если в (1.3) от скоростей перейти к смещениям, то очевидно, получим

$$u_z = \frac{u}{P \cdot f} \cdot \tau, \quad (1.4)$$

где u — величина относительного скольжения, u_z — составляющая скольжения в направлении действия τ . В равенстве (1.3) выражение u/Pf играет роль коэффициента вязкости. При этом главным является то обстоятельство, что равенства (1.3), (1.4) не содержат никакого порога: какой бы малой ни была сила τ , перемещение в направлении действия этой силы все равно будет реализовано. Для увеличения компоненты u_z необходимо, чтобы одна из величин τ или $u/P \cdot f$ была достаточно большой. Практически возможности в управлении величинами τ и $P \cdot f$ весьма ограничены. Поэтому остается только один путь — увеличение относительного скольжения u .

Наиболее интенсивное скольжение происходит на поверхностях локализации сдвигов. Если они расположены вертикально, то механизм псевдовязкости приведет к погружению тяжелых частиц и всплыванию легких в зоне локализации. В лабораторных условиях указанные эффекты моделировались на приборе однородного сдвига, описанном в главе 2. В естественных условиях они имеют значение для переноса масс в зонах разломов земной коры.

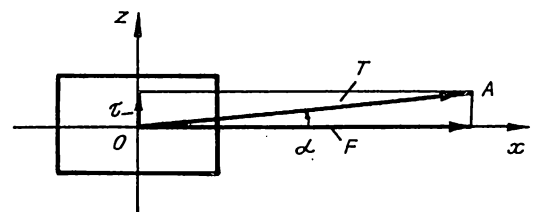


Рис. 11.1

Представляет интерес также случай, когда эффекты псевдовязкости проявляются во всем объеме сыпучего материала. Равенство (1.4) показывает, что в этом случае необходимо реализовать значительные относительные сдвиги во всем объеме. На приборе однородного сдвига это можно сделать только при циклической знакопеременной деформации. В свою очередь, циклическая деформация приведет к переменной дилатансии материала. Представляет интерес исследование псевдовязкости при постоянной пористости материала, а значит, при отсутствии его дилатансии. С этой точки зрения более удобным является сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора деформаций.

В главе 3 было показано, что при сложном нагружении дилатансия материала довольно быстро переходит в стационарное состояние. При этом в материале по существу идет непрерывный процесс сдвига. Если при простом сдвиге деформирование осуществлялось только в одном направлении, то в данном случае направление сдвига непрерывно меняется. Как было показано в главе 10, такой процесс приводит к неограниченным внутренним деформациям образца.

Опыты проводились на стенде, описанном в главе 3. Поместим на свободную поверхность сыпучего материала стальной шар. Включим устройство нагружения. Шар начнет погружаться. На рис. 11.2 приведены экспериментальные графики изменения глубины погружения шаров двух диаметров (7 мм — кривая 1 и 13,5 мм — кривая 2) в зависимости от числа оборотов нагружающего устройства (коэффициент сжатия эллипса равен 0,86).

Приведенные графики показывают, что скорость погружения непостоянна. В начале деформирования происходит интенсивное погружение, затем процесс асимптотически замедляется. Более тяжелый шар погружается более интенсивно и на большую глубину. Таким образом, в рассмотренной ситуации псевдовязкость принципиально отличается от вязкого поведения жидкостей тем, что характеризуется определенным порогом. Это приводит к тому, что тяжелые шары погружаются в сыпучий материал только на определенную глубину. Аналогичные эксперименты показывают, что легкие шары могут всплыть только с глубины, не большей некоторой критической [105].

Для построения математической модели более удобными являются следующие экспериментальные результаты. На поверхность образца устанавливается вертикально трубка с заглушенным концом. Затем производится нагружение и записывается график глубины погружения трубки. График довольно быстро выходит на горизонтальную асимптоту, которой соответствует глубина H_1 . Во втором опыте трубка принудительно внедрялась до глубины, заведомо большей H_1 . После начала нагружения трубка всплывала до глубины H_2 . При этом наблюдался четкий гистерезис: глубина всплывания была больше глубины погружения ($H_1 < H_2$).

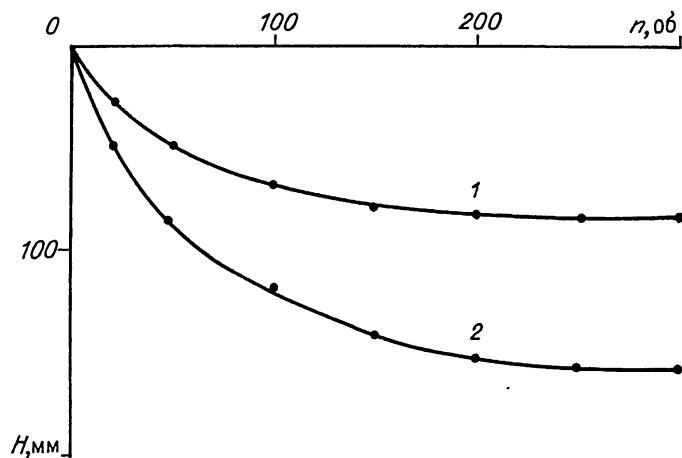


Рис. 11.2

2. Перейдем теперь к математической модели процесса. Введем декартову

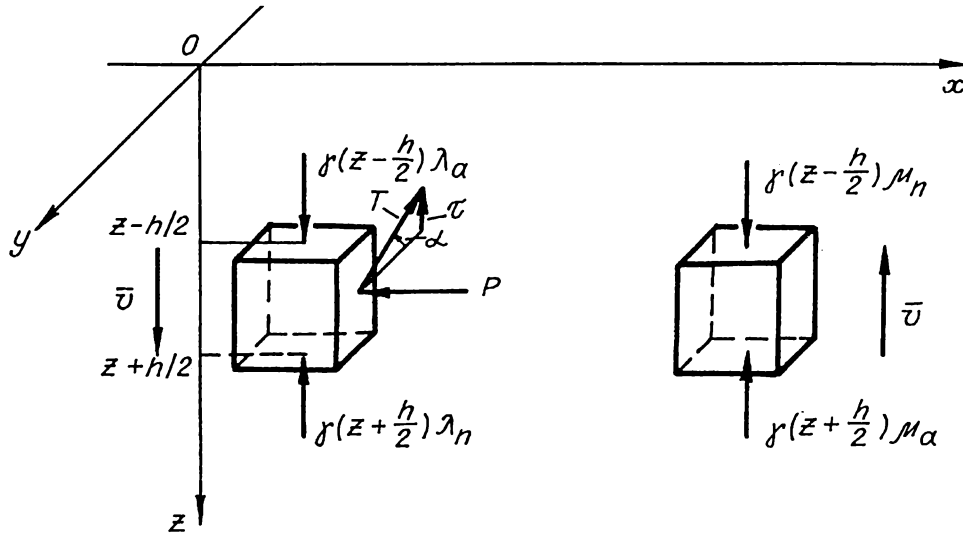


Рис. 11.3

систему координат $Oxyz$. Ось Oz направим вертикально вниз, плоскость Oxy совместим со свободной поверхностью материала. Ограничимся случаем, когда инородные тела, находящиеся в сыпучем материале, имеют форму прямого цилиндра (не обязательно кругового). Причем боковая поверхность цилиндра ориентирована вертикально. Поэтому бесконечно малый элемент боковой поверхности цилиндра всегда можно считать плоским и вертикальным. На рис. 11.3 показаны положительные направления всех напряжений: P — нормальное напряжение, T — результирующее касательное напряжение, причем $T = f \cdot P$, где f — коэффициент внешнего трения; τ — проекция результирующего касательного напряжения на вертикаль, α — угол наклона касательного напряжения к горизонтали. Из геометрических соображений очевидно, что

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{P \cdot f} = \sin \alpha; \quad \frac{du_z}{|du_y|} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.1)$$

Здесь du_z, du_y — бесконечно малые приращения u_z, u_y .

Оценим вначале величину проскальзывания сыпучего материала относительно погруженного в него тела. Пусть некоторый объем материала испытывает однородный сдвиг Γ (рис. 11.4). Предположим, что в него погружено жесткое тело. Ограничимся случаем плоской деформации. В окрестности тела однородность деформации нарушается. В связи с тем, что сыпучий материал растягивающих напряжений не выдерживает, нормальные трещины не образуются. Поэтому материал будет обтекать тело, оставаясь все время в контакте с ним. Задача состоит в том, чтобы оценить величину проскальзывания материала отно-

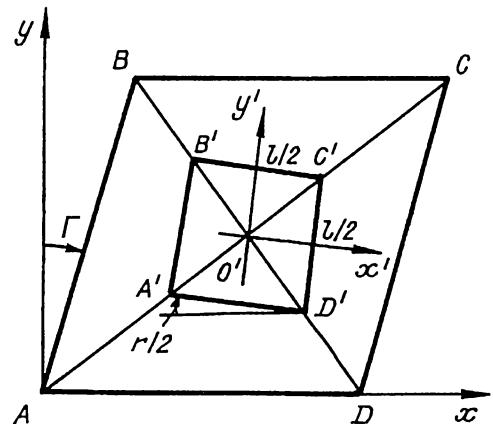


Рис. 11.4

сительно тела. Рассмотрим ее в следующей постановке. Пусть однородное поле смещений имеет вид

$$u_x = \Gamma \cdot y, u_y = 0, \Gamma \ll 1, \text{const.}$$

Тело, помещенное в сыпучий материал, испытывает определенный перенос и поворот. Удобнее связать координаты $O'x'y'$ с телом и считать, что тело неподвижно, а окружающий его материал получает перемещения, равные

$$u'_x = \Gamma \cdot y' - \Omega y' + c_1, u'_y = \Omega \cdot x' + c_2,$$

где c_1, c_2 — компоненты вектора переноса и поворота. В общем случае определение этих параметров представляет собой отдельную и весьма нетривиальную задачу. Есть, однако, один частный случай, когда эта задача имеет точное решение. Это случай, когда тело симметрично относительно осей AC и AD . Пусть сечение тела представляет собой квадрат $A'B'C'D'$. Из условия симметрии и простых геометрических соображений видно, что $\Omega = \Gamma/2$ и поэтому $u'_x = \Gamma \cdot y'/2, u'_y = \Gamma \cdot x'/2$. На сторонах $B'C'$ и $C'D'$ проскальзывания равны соответственно:

$$u'_x(y' = l/2) = \frac{\Gamma \cdot l}{4}; u'_y(x' = l/2) = \frac{\Gamma \cdot l}{4}.$$

Таким образом, если приращение однородного сдвига равно $d\Gamma$, то величину приращения горизонтальной компоненты проскальзывания можно оценить как

$$|du_y| = \frac{l}{4} d\Gamma > 0, \quad (2.2)$$

где l — поперечный размер тела. Подстановка (2.2) во второе равенство (2.1) дает

$$\frac{du_z}{\frac{l}{4} d\Gamma} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau/P \cdot f}{\sqrt{1 - (\tau/Pf)^2}}. \quad (2.3)$$

В последнем равенстве $\operatorname{tg} \alpha$ выражен через $\sin \alpha$ и первую формулу (2.1).

Итак, уравнение (2.3) выражает скорость погружения (или всплывания) через касательные напряжения, действующие на боковой поверхности тела. Кроме них, на тело действуют нормальные напряжения лобового сопротивления среды. Дадим их оценку. Предположим, что поверхность сыпучего материала представляет собой плоскость $z = 0$. Пусть материал подвергается некоторой плоской деформации, которая обеспечивает относительные сдвиги между его частицами. Выделим столб сыпучего материала под некоторой горизонтальной жесткой площадкой. Пусть высота столба равна H , а удельный вес материала — γ .

Из симметрии видно, что вертикальная составляющая касательного напряжения на боковой поверхности должна отсутствовать. Поэтому нормальное напряжение на площадке равно γH . Будем теперь принудительно погружать площадку с некоторой малой скоростью. Это приведет к тому, что давление P_{-n} со стороны нормали ($-\bar{n}$) упадет, а давление P_n со стороны нормали \bar{n} (лобовое сопротивление) — возрастет (нормаль направлена вдоль оси z). Обратная картина будет в случае принудительного поднимания площадки. Обозначения для соответствующих напряжений показаны на рис. 11.3:

$$\begin{aligned} \text{при } du_z > 0 \quad P_n &= \gamma H \lambda_n, \quad P_{-n} = \gamma H \lambda_a, \\ \text{при } du_z < 0 \quad P_n &= \gamma H \cdot \mu_a, \quad P_{-n} = \gamma H \mu_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Предположим, что все коэффициенты $\lambda_n, \lambda_a, \mu_a, \mu_n$ известны. Вначале рассмотрим задачу о погружении или всплывании жесткого цилиндрического стержня. Оценим силы, действующие на его боковую грань. Нормальное напряжение на горизонтальной площадке равно γz . Соответствующее напряжение на вертикальной площадке равно $P = \xi \gamma z$, где ξ — коэффициент бокового распора. Отсюда $\tau = f \cdot \xi \cdot \gamma \cdot z \cdot \sin \alpha$ и вертикальная составляющая касательного усилия

$$T_z = f \cdot \xi \cdot \gamma \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \int_0^H z \cdot dz = f \cdot \xi \cdot \gamma \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \frac{H^2}{2}, \quad (2.5)$$

где H — глубина погружения стержня. Аналогичные формулы будут иметь место и для других граней. Так как среда подвергается определенным сдвигам, то значение ξ для различных граней будет различным. При суммировании будем принимать, что коэффициенту ξ приписано некоторое среднее значение. В такой постановке обобщение на случай произвольного сечения тела трудностей не представляет. В этом случае величина l в равенстве (2.5) необходимо заменить на dl и проинтегрировать по контуру сечения. В результате получим

$$T_z = f \cdot \xi \cdot \gamma \cdot \sin \alpha L \frac{H^2}{2},$$

где L — периметр сечения. Пусть S — площадь сечения. Тогда, в соответствии с (2.4), лобовое сопротивление равно $F_{\Pi} = -\gamma H \lambda_{\Pi} \cdot S$ при $du_z > 0$, т. е. при погружении, и $F_a = -\gamma H \mu_a \cdot S$ при $du_z < 0$, т. е. при всплывании. Обозначим через G вес тела, либо вес тела плюс внешняя сила, приложенная к телу. Если $G > 0$, то сила направлена вниз.

Составим уравнения равновесия. Пусть тело медленно погружается. Тогда

$$G - \gamma H \lambda_{\Pi} S - f \xi \gamma L \frac{H^2}{2} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (2.6)$$

где G — вес трубки. Необходимым условием реализации этого режима является выполнение неравенства:

$$G \geq \gamma H \lambda_n S.$$

Тогда $\sin \alpha \geq 0$ и $du_z \geq 0$. Из (2.6) следует, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{f \cdot \xi} \cdot \frac{2 \cdot S}{L} \left[\frac{G}{S \cdot \gamma} \cdot \frac{1}{H^2} - \frac{\lambda_n}{H} \right]. \quad (2.7)$$

Предельное значение глубины H , при котором правая часть (2.7) обращается в нуль, обозначим через

$$H^* = \frac{G}{\lambda_n \cdot S \cdot \gamma}.$$

Величина $2S/L$ имеет размерность длины. Обозначим ее через R . Тогда, в размерных переменных задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (2.3):

$$\frac{dH}{H^* d\Gamma} = \frac{l}{4H^*} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.8)$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{\lambda_n}{f \cdot \xi} \cdot \frac{R}{H^*} \left[\left(\frac{H^*}{H} \right)^2 - \frac{H^*}{H} \right].$$

Начальное условие имеет вид: $H(0) = H^0$. Здесь $H_{\min} \leq H^0 \leq H^*$ и величина H_{\min} определяется условием $\sin \alpha \leq 1$.

Рассмотрим задачу о всплывании цилиндрического тела, где вместо уравнения (2.6) будем иметь

$$G - \gamma H \mu_a S - f \xi \gamma L \frac{H^2}{2} \sin \alpha = 0.$$

Необходимым условием реализации этого режима является неравенство $\sin \alpha \leq 0$ и, значит,

$$\gamma H \mu_a S \geq G.$$

В размерных переменных задача сводится к решению следующего уравнения:

$$\frac{dH}{H^{**} d\Gamma} = \frac{l}{4H^{**}} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.9)$$

где

$$\alpha = -\arcsin \frac{\mu_a}{f \xi} \cdot \frac{R}{H^{**}} \left[\frac{H^{**}}{H} - \left(\frac{H^{**}}{H} \right)^2 \right],$$

$$H^{**} = \frac{G}{\mu_a S \gamma}.$$

Начальное условие имеет вид

$$H(0) = H^0 > H^{**}.$$

Диаграмма напряжений на рис. 3.9 показывает, что нормальные напряжения на вертикальных площадках колеблются вокруг значения $\gamma \cdot z$. При этом нормальное напряжение на горизонтальной площадке постоянно и равно γz . Поэтому среднюю величину коэффициента бокового распора можно оценить как 1. Решения уравнений (2.8), (2.9) дают верное качественное поведение кривых погружения и всплытия. Однако предельные глубины определяются эмпирическими коэффициентами, фигурирующими в равенствах (2.4). Характерные значения $\lambda_n = 1,4 - 1,7$; $\mu_a = 0,67 - 1,3$. Теоретическое определение лобового сопротивления так же, как и более строгий учет реальной формы тела представляет собой самостоятельную задачу.

3. Итак, в режиме псевдовязкого деформирования в сыпучей среде проявляется закон, подобный закону Архимеда в обычной вязкой жидкости. Это обстоятельство можно использовать для разделения сыпучих сред по удельному весу частиц, то есть для решения задачи обогащения. Здесь необходимо отметить некоторые дополнительные обстоятельст-

во. Данные приведенные на рис. 11.2, соответствуют механизму погружения тяжелой частицы, которая преодолевает лобовое сопротивление внешней среды.

Представляет интерес другой крайний случай, когда тяжелая частица имеет размеры, гораздо меньшие, чем частицы, из которых состоит внешняя среда, например, размеры, достаточные для проникания частицы через трехмерный лабиринт порового пространства. В этом случае псевдовязкое течение также обеспечивает обогащение, но уже по механизму, отличному от рассмотренного выше (механизму „проникания“). При этом конечный результат будет тем же. Практически важным является также то обстоятельство, что основной эффект сохраняется и в случае, когда поровое среды пространство заполнено водой.

Для реализации процесса возможны самые различные технические решения. Очевидно, что наличие порога (см. рис. 11.2) ограничивает технические возможности конкретных устройств. Однако путем принятия специальных мер (например, выполнением камеры в форме конуса) указанную трудность можно преодолеть. Кроме того, на основе эффекта псевдовязкости возможна реализация также непрерывного режима обогащения. Некоторые примеры технических решений рассмотрены в [106, 107].

§ 11.2. ТОЧНОЕ ДОЗИРОВАНИЕ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Эффект псевдовязкости является универсальным (то есть имеет место для любых ситуаций, связанных с внешним сухим трением) и поэтому может быть использован для решения ряда других технических задач. Одна из подобных задач связана с точным дозированием порошковых материалов.

Рассмотрим эту задачу в дискретном варианте. Пусть требуется получить навески материала заданной массы с погрешностью, не большей заданной величины. Одним из основных элементов дозатора является питатель — устройство, которое предназначено для подачи порошкового материала на весоизмерительный механизм. Ясно, что в работе любого питателя есть определенная нестабильность. Причем она тем выше, чем выше его производительность. Поэтому для повышения точности дозирования работа питателя должна осуществляться в двух режимах: грубом и тонком. Например, пусть требуется сформировать навеску массой 1 кг с точностью $\pm 0,05\%$. Для этого вначале задается большая производительность питателя (режим грубой дозации). В этом режиме питатель работает до формирования порции массой $p_1 = 980$ г. При этом точность p_1 значения не имеет. Лишь бы она заведомо не превысила 1 кг. Затем по команде от весоизмерительного устройства питатель переходит в режим тонкого дозирования — его производительность резко уменьшается и за счет этого повышается абсолютная стабильность потока. Проще говоря, последние 20 г добавляются „по крупинкам“. В момент достижения значения массы 1 кг подается команда на остановку питателя. После остановки отсечка потока должна быть достаточно надежной.

Рассмотрим в качестве иллюстрации один из типов питателей, в котором непосредственно используется эффект перехода внешнего сухого трения в вязкое.

Пусть в цилиндр радиуса R на высоту $k \cdot R$ засыпан порошковый материал (рис. 11.5 а). Первоначально поверхность материала горизонтальна. Расположим ось цилиндра строго горизонтально и придадим ему вращение вокруг этой оси с угловой ско-

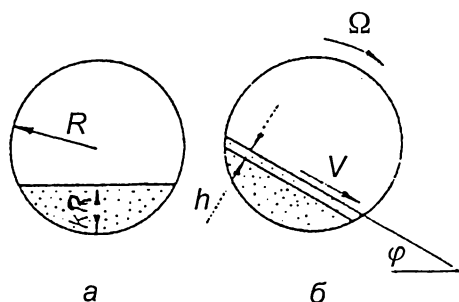


Рис. 11.5

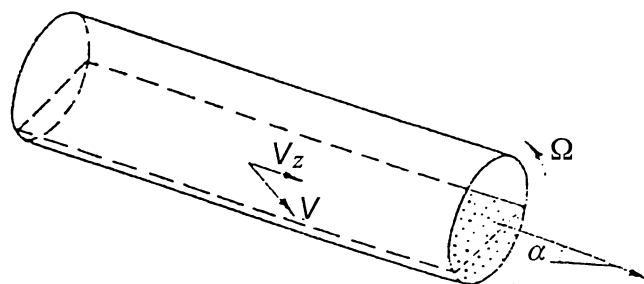


Рис. 11.6

ростью Ω (рис. 11.5 б). Если коэффициент внешнего трения материала о поверхность цилиндра достаточно велик и скорость вращения Ω достаточно мала, то при угле поворота цилиндра, равном φ (φ — угол естественного откоса материала), по свободной поверхности цилиндра начнет стекать тонкий слой материала. Обозначим через h среднюю толщину этого слоя, а через V — его скорость. Очевидно, что при таком движении поток материала вдоль оси цилиндра z будет равняться нулю. Отклоним теперь ось цилиндра от горизонтали на угол α (рис. 11.6), который выберем меньше угла внешнего трения материала и угла его естественного откоса. При этих ограничениях материал будет оставаться в покое. Начнем теперь медленно поворачивать цилиндр вокруг своей оси. Материал будет оставаться в покое только до тех пор, пока угол наибольшего ската на его свободной поверхности будет меньше φ . Когда этот угол достигнет значения φ , начнется скатывание тонкого слоя материала по его свободной поверхности. Вычисления параметров этого течения показывают, что составляющая скорости вдоль оси цилиндра пропорциональна углу α .

Таким образом, хотя сам материал обладает свойствами сухого трения, производительность питателя, определяется законом вязкого трения. Это значит, что изменяя угол наклона α , в принципе можно добиться сколь угодно малого расхода. В технической реализации [84] применяется ряд усовершенствований указанной схемы (рис. 11.6).

Использование данных питателей в весовых дозаторах [88, 89] позволяет добиться дозирования от 0,5 до 10 г и от 100 г до 5 кг с точностью до $\pm 0,05\%$. Ряд весовых дозаторов и питателей различного назначения описаны в [84-93].

§ 11.3. ДИЛАТАНСИОННЫЙ СПОСОБ УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

В некоторых технологических процессах возникает проблема создания однородных плотных упаковок частиц порошковых материалов. Причем эти упаковки должны иметь минимальное число дефектов, особенно крупных (арок, дислокаций, вакансий). Идеальным был бы способ формирования упаковки по одной частице, когда очередная частица непосредственно укладывается в нужное место упаковки. Однако технически этот способ нереален. Поэтому необходимо ставить задачу по-другому. А именно, пусть уже задана некоторая упаковка частиц, которая получена произвольным образом (например, путем засыпки материала струей или дождем). При этом исходная упаковка частиц будет неоднородной, как правило, рыхлой и, главное, будет содержать множество дефектов.

Причем большая часть этих дефектов — довольно устойчива к внешнему обжатию. Теперь задача сводится к тому, чтобы улучшить качество исходной упаковки.

Обычно для уплотнения используется вибрация. Этот способ имеет ряд недостатков. Вибрация приводит к сегрегации, а при большой интенсивности и к вихревым течениям, а значит, и к неоднородности упаковки. Кроме того, вибрация требует большого времени. Ниже рассмотрим другой способ уплотнения, который получил название дилатансионного [84, 103].

На рис. 2.5 приведена запись изменения высоты образца при его однородном и знакопеременном сдвиге. Видно, что в целом материал необратимо уплотняется. Можно представить себе следующий механизм этого процесса (см. § 2.2, 11.1). Плотная, бездефектная упаковка частиц имеет заведомо меньшую потенциальную энергию, чем рыхлая. На любом контакте между частицами всегда есть составляющая силы, которая ориентирована в направлении, уменьшающем общую потенциальную энергию упаковки. В обычном состоянии барьер сухого трения препятствует ее проявлению. Однако, после снятия трения на контакте, эта сила становится способной к уплотнению и разрушению дефектов упаковки. Следовательно, основную роль здесь играет тот же механизм псевдовязкости.

Большинство порошковых материалов имеет слабое сцепление. Поэтому на фоне знакопеременных сдвигов образцу необходимо дать незначительное осевое сжатие. Сжатие преодолевает барьер сцепления, а сдвиги дают возможность смещения частиц именно в направлении уменьшения их потенциальной энергии (дилатансия материала в условиях сжатия рассматривалась в [12]).

Таким образом, в результате реализации рассмотренного процесса происходит изменение упаковки частиц так, что она переходит в некоторое обратимое состояние. Конечно, это состояние еще не соответствует теоретически самой плотной или совершенно бездефектной структуре. Тем не менее, обработка порошковых материалов указанным способом позволяет получить достаточно однородные и плотные состояния.

Количественные характеристики процесса зависят от типа материала, формы частиц, их удельного веса и т. п. Но основные его черты имеют одинаковый характер для всех материалов. Так, 1) при знакопеременном квазистатическом сдвиге дилатансия складывается из двух частей: необратимого уменьшения объема дефектов и собственно дилатансии, свойственной обратимым упаковкам; 2) при циклических деформациях необратимая составляющая монотонно уменьшается до нуля и упаковка переходит в стационарный режим, которому соответствует только вторая составляющая дилатансии; 3) минимум пористости достигается всегда в середине цикла, причем величина его зависит от амплитуды сдвигов: чем меньше амплитуда, тем плотнее упаковка; 4) количество циклов до перехода в стационарное состояние зависит от свойств материала и величины амплитуды сдвига. Большие амплитуды интенсифицируют процесс, однако могут вызвать неоднородность структуры, связанную с локализацией деформаций. С учетом этого уплотнение необходимо осуществлять в ограниченном диапазоне амплитуд. Скорости должны быть такими, чтобы полностью исключить инерционные эффекты.

Такова принципиальная схема дилатансионного способа уплотнения, обеспечивающего однородность структуры и уменьшение концентрации напряжений при последующем компактировании изделий. Как и во всех рассмотренных выше случаях, здесь также возможны самые различные способы технической реализации. Один из примеров рассмотрены в [103, 104].

§ 11.4. ОБРАЗОВАНИЕ ШАРА ИЗ СВОБОДНОГО ОБЪЕМА НЕНЬЮТОНОВСКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Выше рассматривались задачи, связанные с обработкой порошковых (гранулированных) материалов. Обратимся теперь к одной задаче, которая возникла в технологическом процессе получения подобных материалов.

Согласно классическому опыту Плато, жидкость в свободном состоянии принимает форму шара. Это свойство используется при изготовлении ряда гранулированных материалов. Здесь возникает задача анализа эволюции изолированного объема жидкости под действием сил поверхностного натяжения. В [309] исследовались нормальные колебания объема с учетом капиллярных и вязких сил. Представляет интерес получение количественных оценок как для линейно-вязких, так и для сред с более сложной реологией. В строгой постановке задача является весьма трудной в силу нелинейности, а также в связи с ее трехмерностью и необходимостью анализа инерционных эффектов. С учетом неизбежной приближенности „строгой“ постановки для описания реальной ситуации представляется необходимым поиск идеализации, которая позволила бы учесть основные черты реального процесса и преодолеть трудности „строгой“ постановки.

Для этого, следуя [80], обратимся к результатам главы 1 и попытаемся использовать одно из аффинных течений для решения поставленной задачи.

1. Пусть в исходном состоянии объем имеет форму эллипсоида или в плоском случае, который рассмотрим ниже, — эллипса. Обозначим: $a \geq b$ — его полуоси, x_1, x_2 — декартовы координаты, ϑ — параметр границы: $x_1 = a \cos \vartheta$, $x_2 = b \sin \vartheta$. Силы поверхностного натяжения $T = \text{const}$ сжимают объем напряжениями, пропорциональными кривизне свободной поверхности:

$$\sigma_{nn} = -T d\alpha/ds = -T a b \lambda^{-3/2}, \quad \lambda = a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta, \quad \sigma_{nm} = 0, \quad (1)$$

где α — угол между внешней нормалью и осью Ox_1 , ds — элемент дуги, σ_{nn} , σ_{nm} нормальная и касательная компоненты напряжений. Здесь и ниже используется „трехмерная“ терминология: под объемом понимается его сечение плоскостью Ox_1x_2 и др.

Вычислим общие усилия сжатия вдоль осей:

$$p_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{n1} \frac{ds}{d\vartheta} d\vartheta = -2T, \quad p_2 = \int_0^{\pi} \sigma_{n2} \frac{ds}{d\vartheta} d\vartheta = -2T, \quad (2)$$

σ_{n1} , σ_{n2} — проекции вектора граничных напряжений на оси Ox_1, Ox_2 . Для (1) $\sigma_{n1} = \sigma_{nn} \cos \alpha$, $\sigma_{n2} = \sigma_{nn} \sin \alpha$ и усилия сжатия одинаковы. Однако средние напряжения будут различными:

$$\sigma_1 = p_1/2b = -T/b, \quad \sigma_2 = p_2/2a = -T/a. \quad (3)$$

Поэтому и появляются внутренние касательные напряжения и соответствующее течение. Главным в этом процессе является тот факт, что вдоль своей большой оси эллипс сжимается большими напряжениями, чем вдоль малой оси. Развивающееся течение приводит к выравниванию осей. Последнее вызывает уменьшение в различии указанных напряжений, и таким образом происходит постепенный переход к шару.

В промежуточные моменты фигура будет отличаться от эллиптической. Однако равенства (3) будут верны и в этом случае, если величинам $2b$, $2a$ придать смысл текущих диаметров соответствующей симметричной фигуры.

Нельзя ли, сохранив основные черты краевых условий (1)–(3), так их локально изменить, чтобы и в промежуточные моменты времени эллиптичность формы не нарушалась? Известно, что эллипсы переходят в эллипсы при аффинном преобразовании. Ему отвечает однородное распределение напряжений (жидкость однородна, инерционные силы вначале игнорируются). Последние выберем так, чтобы свойство (2) сохранялось во время всего перехода к шару. Из (3) и формул тензорного проектирования определим граничные напряжения:

$$\sigma_{nn} = -T(a \sin^2 \vartheta + b \cos^2 \vartheta)/\lambda, \sigma_{nn} = T(a - b) \sin 2\vartheta/2\lambda. \quad (4)$$

Таким образом, задача свелась к изучению течения жидкого эллипсоида. В различных постановках течения эллипсоида исследовались в [182—185, 310]. Ниже рассматривается модель (4). Условия (4) эквивалентны (1) в интегральном смысле: в обоих случаях выполняются равенства (2), (3). Модель (4) позволяет получить все количественные оценки. В ее рамках возможен анализ сложных реологических свойств и инерционных эффектов. Кроме этого, не вызывает принципиальных трудностей и обобщение на трехмерную постановку.

Предположим, что жидкость является изотропной, несжимаемой и реологически устойчивой: однородному распределению напряжений отвечают однородные деформации. Тогда

$$\dot{x}_1 = -kx_1, \dot{x}_2 = kx_2, \dot{x} = -kx, \dot{y} = ky, \quad (5)$$

где x , y — текущие значения длин полуосей эллипса, точка — производная по времени t , $2k = \gamma$ — скорость сдвига. Интеграл $xy = ab = R^2$ означает сохранение объема, R — радиус равновеликого шара. Система замыкается уравнением, связывающим максимальное касательное напряжение $\tau = 0,5(\sigma_2 - \sigma_1) = 0,5 \cdot T(y^{-1} - x^{-1})$ и скорость сдвига: $\tau = F(\gamma)$, $\gamma = \Gamma(\tau)$. Напряжения равны $\sigma_{11}, \sigma_{22} = -p \mp F(\gamma)$, $\sigma_{12} = 0$, давление p от координат не зависит. Решение имеет вид

$$t = \int_x^a \frac{2dx}{x\Gamma[(T/2)(x/R^2 - 1/x)]}.$$

Для ньютоновской жидкости $\tau/\gamma = \mu = \text{const}$ и стремление к шару — асимптотическое. Практически объем можно считать шаром, если различие в его диаметрах становится малым: $x/R = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Время достижения такой формы определяется равенством

$$\frac{t}{2t_\mu} = f(\varepsilon) - f\left(\frac{a}{R} - 1\right), f(\varepsilon) = \ln\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right), t_\mu = \frac{R\mu}{T}.$$

Аналогично для нелинейно-вязкой среды $\tau/\sqrt{\gamma} = \alpha = \text{const}$:

$$\frac{t}{t_\alpha} = \varphi(\varepsilon) \left(\frac{a}{R} - 1\right), \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon(2 + \varepsilon)}, t_\alpha = \frac{4R^2\alpha^2}{T^2}.$$

К жидкостям типа $\partial\tau/\partial\gamma \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 0$ примыкает класс вязко-пластических сред: $\tau = \tau_s + \mu\gamma$ при $\tau \geq \tau_s$; $\gamma = 0$ при $\tau < \tau_s$; $\mu, \tau_s = \text{const}$. Если $b^{-1} - a^{-1} \leq 2\tau_s/T$, то поверхностного натяжения недостаточно для преодоления порога τ_s . Для более вытянутых начальных форм происходит стягивание к предельной форме $x/R = \Delta = \delta + \sqrt{1 + \delta^2}$, $\delta = R\tau_s/T$ причем время достижения условия $x/R = \Delta + \varepsilon$

$$\frac{t}{2t_\mu} = \psi(\varepsilon) - \psi\left(\frac{a}{R} - \Delta\right), \quad \psi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{1 + \delta^2}}{\varepsilon}\right). \quad (6)$$

Таким образом, с увеличением a/R влияние начальной формы на время образования шара становится слабым, а увеличение точности приводит к его существенному возрастанию. Кроме того, увеличение радиуса R и вязкости приводит к увеличению времени, а увеличение поверхностного натяжения — к его уменьшению. Роль предела текучести несколько сложнее и определяется (6). Влияние начальной формы и точности приближения описываются одной функцией одного переменного. Этот результат является следствием безынерционности приближения. В связи с этим возникают следующие вопросы: при каких условиях безынерционное приближение является достаточным и как учесть силы инерции в остальных случаях?

Силы инерции пропорциональны плотности среды ρ . Учет в задаче новой размерной величины означает введение и нового масштаба времени — „инерционного времени“ $t_\rho = R\sqrt{\rho R/T}$. С другой стороны, реологические параметры дают свой масштаб — „вязкое время“ (для определенности — t_μ). Их отношение $\kappa = t_\rho / t_\mu = \sqrt{\rho RT} / \mu$ играет роль числа Рейнольдса в данной задаче: $\text{Re} = \kappa^2$, если масштабы длины R , скорости $v = v = R / t_\mu$ и $\text{Re} = \kappa$, если $v = R / t_\rho$. Можно ли учесть инерцию, сохранив существо принятой модели? Ясно, что силы инерции приведут к неоднородности напряжений: ускорения частиц зависят от их координат. Однако всем уравнениям можно удовлетворить только за счет неоднородности давления. Действительно, для течений (5) динамические уравнения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho(k^2 - \dot{k})x_1, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho(k^2 - \dot{k})x_2$$

имеют решение

$$\sigma_{11}, \sigma_{22} = \mp F(2k) + 0,5\rho[(k^2 - \dot{k})x_1^2 + (k^2 + \dot{k})x_2^2] + c(t), \quad \sigma_{12} = 0, \quad (7)$$

где $c(t)$ — произвольная функция. Используя (7), определяем компоненты $\sigma_{n1} = \sigma_{11} \cos \alpha$, $\sigma_{n2} = \sigma_{22} \sin \alpha$, подставляем их в (2), интегрируем по границе и переходим к безразмерным переменным. После исключения $c(t)$ получим замкнутую систему

$$\dot{x} = -kx, \quad \frac{t_\mu}{\mu} 2F\left(\frac{2k}{t_\mu}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{k^2}{6} \left[k^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) - \dot{k} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь в качестве масштаба выбрано „вязкое время“ t_μ . Некоторые черты решения можно усмотреть непосредственно из уравнения, полученного исключением $k(t)$:

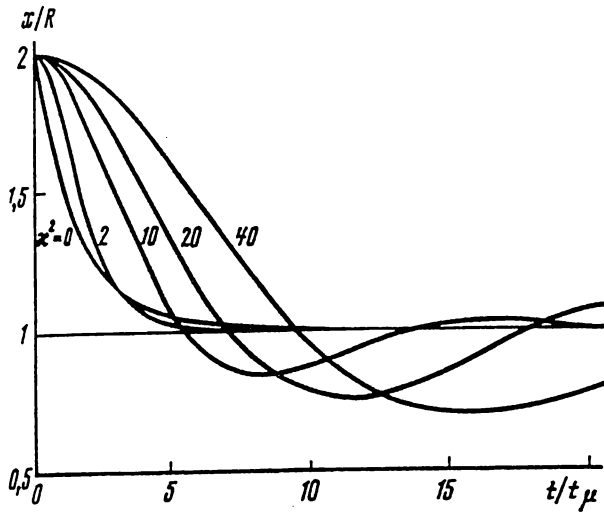


Рис. 11.7

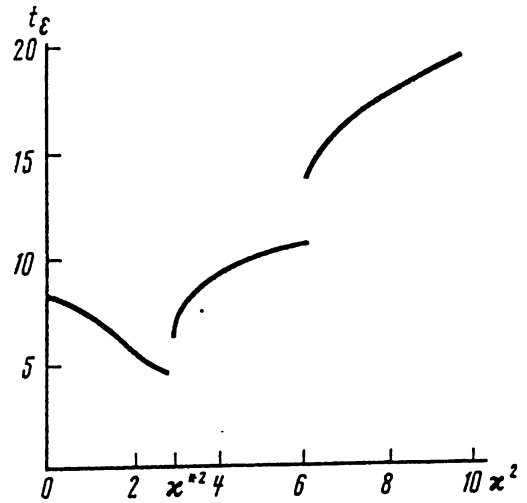


Рис. 11.8

$$\frac{\kappa^2}{6} \left(x + \frac{1}{x^3} \right) \ddot{x} - \frac{\kappa^2}{3} \frac{\dot{x}^2}{x^4} - \frac{t_\mu}{\mu} F \left(-\frac{2\dot{x}}{xt_\mu} \right) + \left(x - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Процесс представляет собой вынужденные нелинейные колебания с затуханием.

На рис. 11.7, 11.8 показаны результаты численного решения (8) при $F(\gamma) = \mu\gamma$ и $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Для каждой из кривых рис. 11.1 значение $\kappa = \text{const}$. График времени образования шара $t_\varepsilon(\kappa^2)$, $\varepsilon = 0,01$ показан на рис. 11.8. Видно, что до $\kappa \approx 0,9$ безынерционное приближение является удовлетворительным: ошибка не превышает 10%. Интересно отметить, что увеличение κ от 0 до $\approx 1,8$ приводит к уменьшению времени формирования. Этот факт имеет ясный механический смысл. При $\kappa > 0$ энергия поверхностного натяжения расходуется не только для преодоления вязкого сопротивления, но и для создания запаса энергии в виде кинетической. Поскольку запас реализуется, когда вынуждающая сила становится малой, то в целом это может приводить к выигрышу во времени. В некоторых точках κ^* функция разрывна. Это связано с тем, что при переходе через κ^* число колебаний с амплитудой, превышающей $1 + \varepsilon$ становится на единицу больше.

Для вязко-пластической среды инерционные силы позволяют преодолеть барьер Δ . Конечная форма объема может быть любой из диапазона $x/R \in (\Delta^{-1}, \Delta)$, включая в точности шаровую.

Рассмотренная выше постановка допускает обобщение на трехмерный случай. В работе [81] рассмотрена трехмерная задача о формировании шара в рамках моделей вязко-пластической среды и ньютоновской капиллярной жидкости (с учетом инерционных эффектов):

В указанных решениях рассматривалась только внутренняя задача. Реальный же технологический процесс таков, что капля жидкости подается в емкость, заполненную „внешней средой“ (обычно керосином или другой жидкостью с подходящими свойствами). Медленно двигаясь в этой среде, капля постепенно приобретает форму, близкую к шаровой. Затем форма фиксируется и полученная гранула отправляется на дальнейшую обработку.

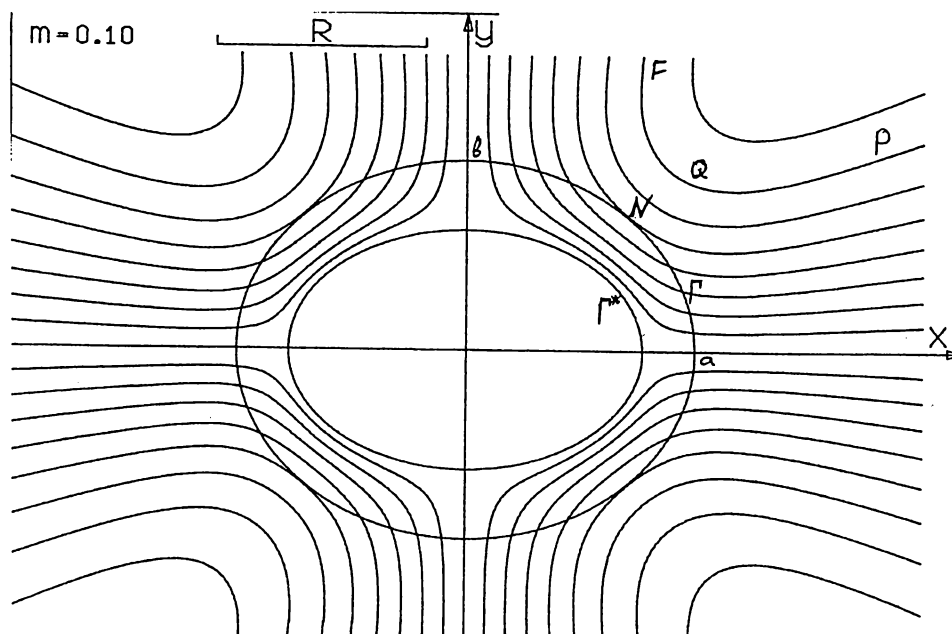


Рис. 11.9

Ясно, что наличие внешней среды приведет к увеличению времени, необходимому для формирования шара. В работах [82, 83] построены плоское и пространственное решение внешней задачи. Показано, что внешняя среда может увеличить время формирования шара в несколько раз (в 2 раза при одинаковых коэффициентах динамической вязкости во внешней и внутренней областях). Внешнюю среду можно считать безграничной, если диаметр области, занятой ею, отнесенный к диаметру капли составляет величину порядка

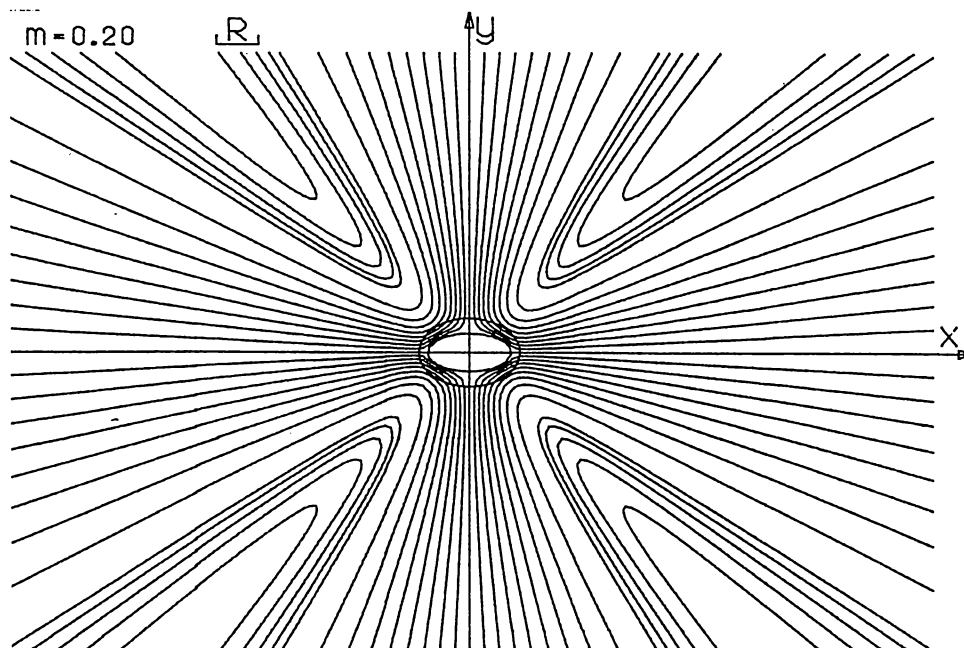


Рис. 11.10

10 (7 при точности 10 %, 20 — при точности 1 %). Построены также линии тока во внешней области (рис. 11.9). Линии тока можно разбить на два семейства. Первое семейство — это линии, которые „начинаются“ на бесконечности и „входят“ в контур Γ на участке aN , а также линии, которые „исходят“ из Γ на участке bN и уходят на бесконечность. Формальное продолжение решения вовнутрь Γ позволяет установить между указанными линиями соответствия. Фактически их можно рассматривать как одни и те же линии, которые пересекаются Γ и плавно огибают внутренний контур Γ^* . Второе семейство линий — это линии типа PQF , которые „начинаются“ на бесконечности, подходят к контуру Γ и снова уходят на бесконечность. Рассмотренная картина является типичной для объемов любой формы (рис. 11.10 $m = (a - b)/(a + b) = 0,2$, a, b — полуоси эллипса, $R = (a + b)/2$), а также для трехмерных течений [83].

§ 11.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ СПЛОШНЫХ СРЕД

Как отмечалось, феноменологический подход к описанию поведения сложных сред требует решения двух проблем: построение определяющих уравнений и измерение параметров среды, которые фигурируют в определяющих уравнениях. Для построения определяющих уравнений обычно привлекаются различные соображения как общего характера (постулаты, вариационные принципы), так и соображения формально-математического плана. Но так или иначе решающее значение имеют экспериментальные наблюдения. Это еще в большей мере относится к выбору параметров материала.

Идеальными, как уже также отмечалось, являются такие эксперименты, в которых реализуется однородное напряженно-деформированное состояние образца. Последнее можно рассматривать как общую формулировку технического задания на создание соответствующего оборудования. Дальнейшая конкретизация связана с выбором допустимых форм образца и условиями его нагружения. (Эти вопросы рассмотрены в главе 1) Далее проблема сводится к технической (и неизбежно приближенной) реализации указанных требований. Ясно, что здесь возможно уже неограниченное число различных вариантов.

Основные варианты, которые использовались в настоящей работе, описаны выше (главы 2, 3, 7). Здесь рассмотрим некоторые дополнительные устройства и способы исследования реологических свойств сложных сред.

Прежде, чем переходить к конкретным вопросам, отметим одно обстоятельство общего характера. Пусть в безграничном пространстве задано некоторое однородное течение сплошной среды. Формально это означает, что задано некоторое поле скоростей, линейное по координатам. Если вместо исходных координат взять теперь другую систему (возможно, вращающуюся относительно исходной), то получится некоторое альтернативное описание того же самого течения. Хотя полученное течение и совпадает с исходным (при квазистатическом нагружении), но тем не менее внешне оно может выглядеть совершенно по-другому. В главе 3 это обстоятельство использовалось для того, чтобы дать различные интерпретации одного и того же процесса деформирования. Это обстоятельство можно использовать и для поиска новых технических решений.

В качестве примера можно привести [112, 135], где описаны два устройства для реализации одного и того же течения § 1.2 (одно из них соответствует схеме, показанной на

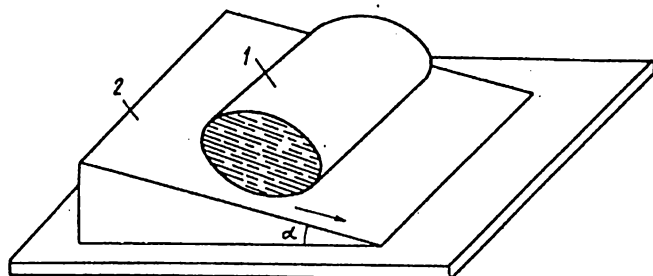


Рис. 11.11

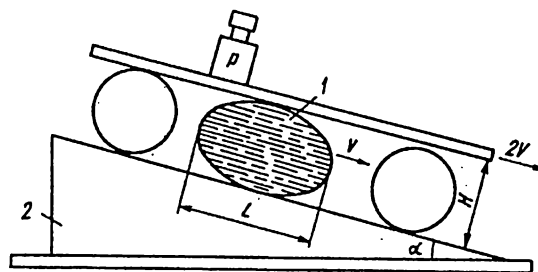


Рис. 11.12

рис. 1.5, другое — схеме на рис. 1.6). Так же, не останавливаясь на технических деталях, отметим работы [111, 114], в которых описаны устройства для реализации течений эллиптического типа (§ 1.2).

На этой же основе можно рассмотреть еще две схемы, по-видимому, наиболее простые и удобные для лабораторных исследований [119, 120]. Первая из них показана на рис. 11.11. Гибкая цилиндрическая оболочка 1 (капсула) заполняется испытуемым материалом и помещается на наклонную плоскость. Под действием силы тяжести капсула смещается вниз, перекачиваясь подобно гусенице трактора. При этом форма ее все время переходит сама в себя, то есть остается неизменной. Вектор граничной скорости всегда направлен строго вдоль границы и величина его постоянна (так как оболочка в процессе скатывания практически не растягивается). Из общих соображений ясно, что за счет искажения формы капсулы течение будет более неоднородным, чем по [111, 114]. Однако в целом оно является течением того же класса, что и эллиптические течения. Степень неоднородности течения можно рассчитать и для интерпретации опыта учесть необходимые поправки.

Преимуществом схемы является ее исключительная простота, точные данные о действующих силах (без силовых измерений) и высокая точность измерения скорости деформаций, если они незначительны. (Чем медленнее капсула скатывается вниз, тем точнее измеряется ее скорость). Недостаток так же очевиден — рассмотренная методика применима либо к вязким и сложным реологическим жидкостям, либо к пластическим телам с низким пределом пластичности. Для расширения диапазона можно использовать схему нагру-

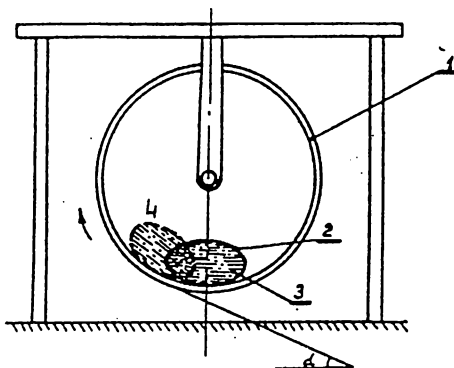


Рис. 11.13

жения, показанную на рис. 11.12. Интересно отметить, что схема испытаний рис. 11.11 была позже предложена также в работе [311].

Рассмотренный тип нагружения можно отнести к мягкому: задаются напряжения (угол ската) и измеряются скорости деформаций. В схеме, показанной на рис. 11.13 [120] напротив: задаются скорости и измеряются напряжения. Здесь капсула 2 с материалом 3 помещается на внутреннюю поверхность барабана 1, которому придается вращение с постоянной угловой скоростью. Вследствие этого капсула из положения 2 перемещается в положение 4. В этом положении ско-

рость ее скатывания равняется заданной скорости вращения барабана. Угол α измеряется и по его значению вычисляются все напряжения.

Необходимо отметить большую наглядность всех опытов. Например, если свойства материала меняются во времени, то хорошо видно как при постоянной скорости вращения барабана устойчивое и „стационарное“ положение капсулы постепенно смещается книзу (угол α уменьшается, опыты с тестом). Все измерения и опыты приводились по схеме, показанной на рис. 11.12. Схема рис. 11.13 также была реализована, но использовалась в основном как демонстрационная. Схема рис. 11.12 оказалась удобной также для исследования вибровязких свойств сыпучих сред.

Во всех описанных опытах сыпучий материал выступал как объект исследования. Однако в некоторых случаях его можно использовать и как чувствительный элемент, например, для регистрации определенных интегральных характеристик колебаний. На рис. 11.14 показан „сейсмоскоп“, который реагирует с накоплением на внешние колебания. Он состоит из платформы 6, 4, на которой размещается сыпучий материал, ограниченный конусом 3 с углом естественного откоса. Тонкий поверхностный слой материала находится в предельном состоянии. При наличии колебаний материал стекает вниз и попадает в вертикальные узкие емкости 5, ограниченные снаружи общей цилиндрической стенкой 2. Стенка выполнена из прозрачного оргстекла и поэтому профиль уровня материала можно наблюдать непосредственно. Форма конуса поддерживается неизменной за счет поступления нового материала из трубки 1. По объему ссыпавшегося материала и профилю высоты 5 можно судить о колебаниях, которым был подвергнут „сейсмоскоп“ с платформой.

В [115] описаны способ и устройство для испытания сыпучих материалов на склонность их к слеживаемости. Фактически в [115] реализована схема нагружения, рассмотренная в главе 7. Далее, в главе 7 рассматривались регулярные структуры в слое порошкового материала, возникающие при растяжении подложки. По размеру структурных элементов можно определить когезионную прочность порошкового материала. Прочность можно также оценить, если слой материала разместить на гибкой ленте и смещать ее к краю опоры. По среднему весу обрушенных частей материала можно рассчитать когезионную прочность [116].

В работах [110, 113, 117] описаны способы измерения скорости распространения трещин в хрупких телах и новые конструкции датчиков касательных напряжений.

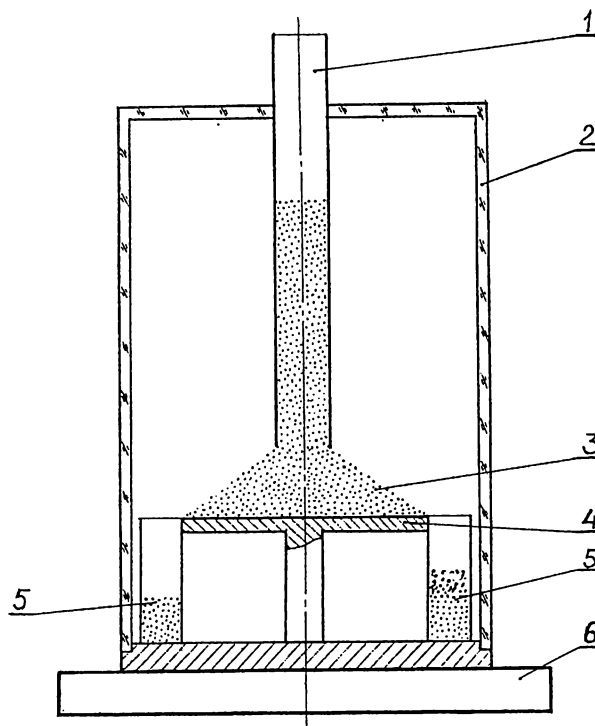


Рис. 11.14

§ 11.6. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ГОРНОГО ДЕЛА

В горном деле возникает множество задач, связанных с самыми различными областями науки. Среди них задачи механики деформирования и разрушения вмещающих горных пород, руды, угля, и различных сыпучих материалов занимают весьма видное место. Ниже остановимся кратко только на некоторых конкретных задачах.

В работе [57] рассмотрены задачи механики сыпучих сред в горном деле. Обратимся к результату § 7.6 о течении сыпучих материалов в радиальных сходящихся каналах. Эксперименты на моделях и многочисленные натурные наблюдения показывают, что некоторые черты течений в радиальных каналах имеют место и в гораздо более сложных ситуациях. Например, при формировании мульд проседания, а также при движении материала в камерах, блоках, бункерах и рудоспусках. В последних случаях весьма актуальной является проблема зависания материала. В [57] на моделях было показано, что характер локализации сдвигов в материале существенно зависит от формы рудоспуска. Этим обстоятельством определяется и эффективное сечение рудоспуска. Поэтому, управляя формой сечения, местом установки вибратора и его параметрами, можно оптимизировать и весь процесс течения материала [57, 128].

Далее, в обычных ситуациях сыпучие материалы занимают промежуточное положение между жидкостями и твердыми телами. Однако в стесненных условиях и при наличии большого всестороннего сжатия сыпучий материал может нести весьма значительные нагрузки. Эту ситуацию проще всего пояснить, если обратиться к задаче Янсена § 6.8. Представим себе, что стенки бункера являются жесткими, а дно выполнено подвижным и медленно смещается вверх. Тогда знак сухого трения на стенках изменится и усилия на дно возрастут качественно (как экспонента от безразмерной высоты засыпки). Это свойство используется в ряде конструкций анкерных креплений. В [126] рассмотрено одно из технических решений подобного анкера с управляемой податливостью. По существу эту же идею можно использовать и при создании искусственных целиков [127].

Явление локализации сдвигов сопровождает многие процессы деформирования геоматериалов. Оно существенно влияет на поля смещений и напряжений, а значит, накладывает и свои требования на выбор модели и методов решения соответствующих задач. Можно рассматривать „строгие“ постановки, когда заранее не задаются ни сам факт локализации, ни очертания поверхностей скольжения и величин сдвигов вдоль них. Можно рассматривать также полуобратные постановки, когда задается только конфигурация поверхностей скольжения, а деформирование материала вне поверхностей исследуется в рамках строгих постановок. В крайнем случае, деформации материала вне поверхностей можно вообще не учитывать и всю задачу свести либо к статически определимой, либо близкой к ней. Естественно, что для определенного класса задач должны иметь смысл промежуточные модели, когда поверхности скольжения считаются известными заранее, а деформирование материала вне их рассматривается в рамках собственных приближенных схем расчета.

Именно такой подход был применен в [59] для расчета давлений на передвижные крепи. В несколько упрощенном изложении проблему можно свести к следующей. Пусть задана некоторая емкость с попарно параллельными стенками, наклоненными под определенным углом к горизонту. Емкость заполнена сыпучим материалом и дно ее выполнено подвижным. Требуется рассчитать давление материала на дно емкости при условии, что оно смещается вниз дискретными шагами.

Подобная ситуация возникает в одной из технологических схем добычи угля. Указанная выше емкость — это угольный пласт, который после выемки угля заполняется сыпучим материалом — закладкой. Это делается для того, чтобы уменьшить подвижки горной породы, которые могут вызвать нежелательные деформации наземных сооружений. Дно емкости соответствует щитовому перекрытию. Под щитовым перекрытием ведутся очистные работы. Поэтому вопрос о нагрузках на дно — это вопрос безопасности работ.

В работе [59] рассмотрены результаты моделирования процесса в условиях плоской деформации. На рис. 11.15 показана типичная картина деформирования. Четко видны линии скольжения, которые выделяют блок материала, непосредственно связанного со щитом. Ориентация этих линий предполагалась известной. Задача о напряжениях внутри блока сводилась к одномерной (как обобщение задачи Янсена). Это позволило построить все решения в замкнутой форме. Сравнения с известными экспериментальными результатами и сопоставление с натурными данными подтвердили достаточную адекватность принятой модели.

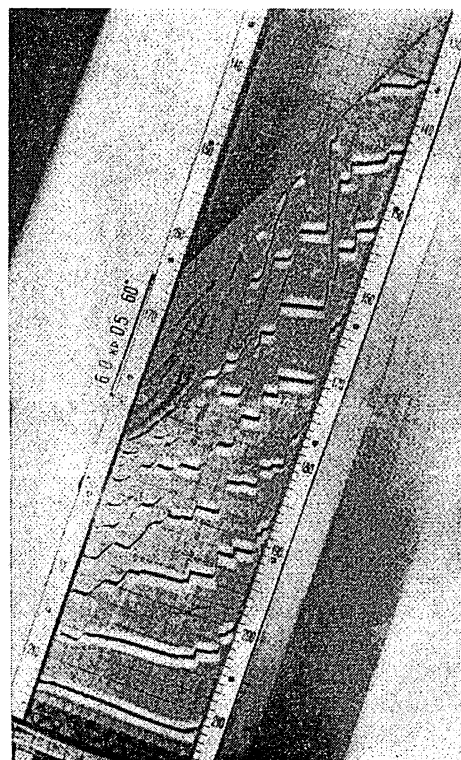


Рис. 11.15

В работе [58] рассмотрен предельный случай, когда смещение дна осуществляется непрерывно и достаточно долго, а угол наклона стенок уменьшается до нуля. В этих условиях в материале формируются стационарные вихревые структуры.

Как отмечалось, системы с закладкой выработанного пространства используются при разработке угольных пластов. Здесь возникает целый ряд специфических проблем, в частности проблема увеличения интенсивности фильтрации отработанной воды из закладочного массива и предотвращения проникновения воды в углеспускные скаты. В [121, 122] предложены элементы дренажного окна тубинговой крепи и технологии ведения закладочных работ, способствующие решению указанных выше проблем.

В [124] предложен способ проходки горных выработок, а в [125] — способ измерения напряжений в массиве горных пород по данным о параметрах разрушения контуров выработок.

§ 11.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ЭФФЕКТОВ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ОБРАБОТКИ НЕУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

1. Прежде всего обратимся к диаграммам дилатансии, изображенным на рис. 3.10, 3.11. Начальному участку кривых соответствует необратимое изменение упаковки, которое сопровождается ее уплотнением. В целом механизм этого процесса такой же, как и при знакопеременных однородных сдвигах (см. § 11.3). Поэтому сложное нагружение также можно использовать для получения однородных плотных упаковок частиц порошковых и



Рис. 11.16 а



Рис. 11.16 б

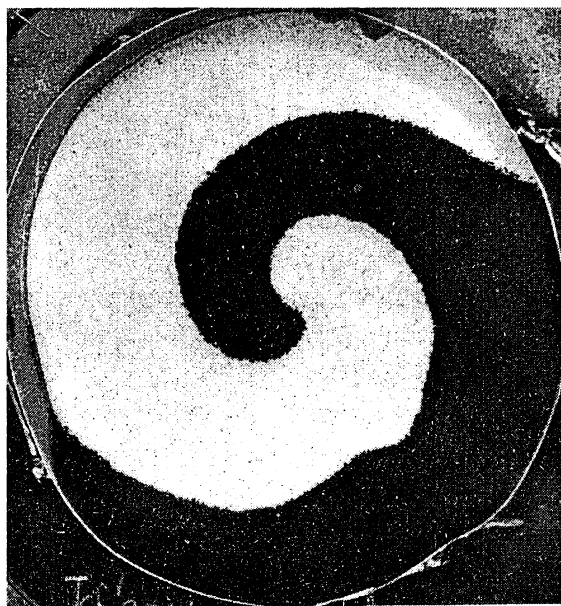


Рис. 11.16 в



Рис. 11.16 г

сыпучих материалов. Аналогично можно использовать и нагружения пространственного типа (см. рис. 1.4, 3.12, 3.13).

2. Обратимся теперь эффекту направленного переноса. На рис. 11.16 а—г изображены последовательные картины деформирования области, близкой к кругу. В начальном положении половина области закрашена в черный цвет, другая половина — в белый. Видно, что длина границы раздела неограниченно увеличивается. При этом внешняя

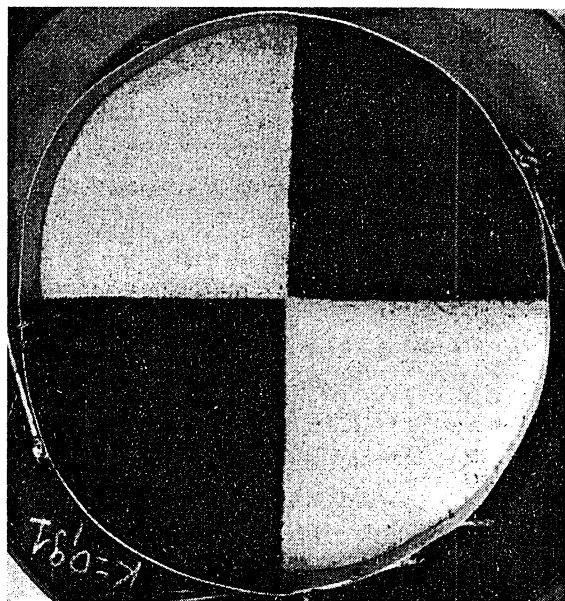


Рис. 11.17 а



Рис. 11.17 б

деформация области имеет порядок $1 - b/a$, то есть мала (a, b , как и прежде, полуоси эллипса). Однако за счет эффекта накопления внутренняя деформация может быть сколь угодно большой. Это свойство можно использовать для реализации различных процессов обработки материалов давлением [109].

3. Осуществим теперь сложное нагружение образца, составленного из различных материалов. Тогда, подбирая различные исходные сочетания компонентов, можно получать различные композиционные материалы (рис. 11.17 а—в) [108].

4. Эффект направленного переноса приводит к смешению материалов или их усреднению (в условиях отсутствия переноса массы по радиусу). Нетрудно определить параметры процесса, которые обеспечивают одинаковое содержание компонент разных типов в любом наперед заданном объеме пробы. Интересно отметить, что подобное смешивание от стохастического процесса, рассмотренного в главе 9, отличается принципиально. Здесь реализуется строго детерминированный (и, вообще говоря, обратимый) процесс [100].



Рис. 11.17 в

Глава 12. МЕТОДЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Настоящая глава посвящена математическому аппарату механики деформируемого твердого тела [129—134]. Математический аппарат, который используется в настоящее время, основан на классических понятиях анализа и теории упругости. Поведение твердых тел при малых деформациях, как правило, описывается линейно упругой моделью. В более сложных случаях привлекаются нелинейные модели пластичности, ползучести, наследственно-упругой среды и т. д. Все указанные модели базируются на двух постулатах.

Во-первых, среда предполагает сплошной и, во-вторых, все функции, которые описывают ее поведение, предполагают достаточно гладкими. Например, если — $u(x, y)$, $v(x, y)$ компоненты поля смещений, а x, y — декартовы координаты, то считается, что производные этих функций существуют (ограничимся только плоским случаем). Более того, само понятие „деформация“

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

предполагает существование и достаточную гладкость всех частных производных поля смещений по координатам.

Таким образом, первый постулат относится к области определений всех функций, а второй — к их поведению „в малом“. Эти обстоятельства позволяют использовать мощный математический аппарат — теорию уравнений в частных производных. Здесь, однако, можно увидеть проявление одной достаточно общей закономерности, когда средства исследования в определенной степени начинают влиять на их цель. История развития механики показывает, что сами ее исходные постулаты и постановки задач во многом были продиктованы существующим математическим аппаратом. Можно ожидать, что дальнейшее развитие теории будет связано с изменениями в ее аппарате и прежде всего с использованием в механике новых нетрадиционных математических объектов.

Для этого есть все предпосылки. Во-первых, внутренняя логика теоретической математики приводит к появлению новых математических объектов. Сюда прежде всего можно отнести фракталы [312] и актуальные бесконечно малые величины нестандартного анализа [173—178]. Подобные объекты обладают весьма необычными свойствами и первоначально рассматривались как чисто математические конструкции. Затем обнаружилось, что их можно использовать для описания многих реальных процессов, имеющих прикладное значение. С другой стороны, потребности самой механики твердого тела, новые экспе-

риментальные факты и натурные наблюдения также приводят к необходимости поиска новых теоретических методов.

В настоящее время можно считать общепризнанным, что деформирование пластической среды также как и геосреды — массивов горных пород, грунтов, сыпучих сред — разыгрывается на ряде структурных уровней, которые образуют определенную иерархию [156, 160, 287]. Наличие ряда масштабных уровней характерно и для многих других реальных объектов и процессов, начиная с очертания облаков, формы береговой линии островов и материков и кончая развитым турбулентным течением жидкости. Так что в этом отношении свойство многомасштабности неупругих деформаций является скорее правилом, чем исключением.

Наличие масштабных уровней непосредственно затрагивает второй из указанных выше постулатов, а именно, постулат о гладкости полей, которые описывают процесс деформирования. Действительно, что означает, что функция $y = f(x)$ является дифференцируемой? Это означает, что локально эту функцию можно свести к линейной. Например, в точке $x = a$ имеем $f(a + \Delta x) = A + B\Delta x$, где $\Delta x = l, l/2, l/4, \dots, l/2^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots, |l| \ll 1$. Причем масштаб Δx можно уменьшать сколько угодно. При этом коэффициенты A, B для всех масштабных уровней будут всегда одинаковыми.

Для сплошных сред гладкость перемещений равносильна предположению о том, что любая деформация локально сводится только к аффинной. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть элемент среды масштаба 1 испытывает простой сдвиг γ и поворот ω (рис. 12.1 а). Рассмотрим теперь последовательность элементов меньших масштабов. Обозначим их сдвиги через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, а поворот — через $\omega_1, \omega_2, \dots$. Предположение о гладкости перемещений накладывает довольно жесткое ограничение на деформации элементов меньших масштабов. Именно, любой элемент последовательности, сколь мал он бы ни был, должен испытывать такой же сдвиг и поворот, что и элементарный объем на исходном макроуровне. Иными словами, все члены в указанных бесконечных последовательностях должны быть равны между собой

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots; \omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \dots$$

Даже формально видно, что это весьма существенное ограничение.

Как отмечалось, во многих ситуациях пластические деформации развиваются на ряде структурных уровней. Причем связи между уровнями носят весьма сложный характер. В частности, если на макроуровне наблюдаются определенные деформации и поворот, то при переходе на микроуровни их величины могут быть совершенно другими. Следовательно, в си-

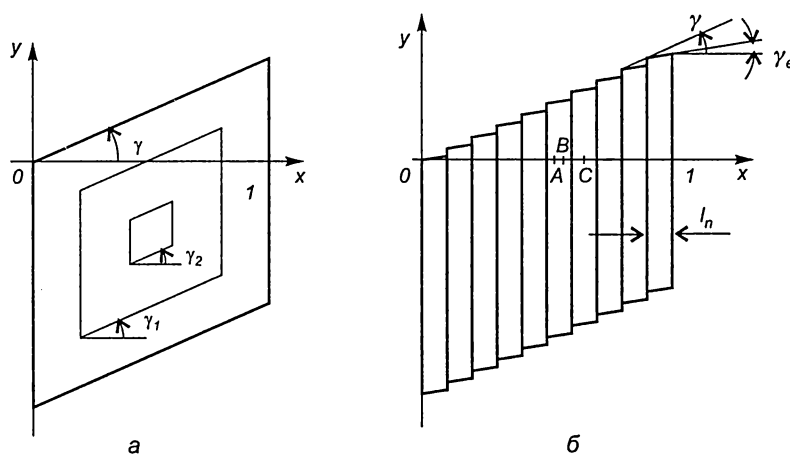


Рис. 12.1

туации, показанной на рис. 12.1 а, сдвиги и повороты в общем случае зависят от масштаба. Последнее приводит к тому, что поле перемещений становится недифференцируемым.

Если подобные факты можно игнорировать, то в теоретических построениях достаточно классического описания с помощью гладких функций. Однако, если необходимо понять, как макросвойства среда связаны с процессами, происходящими на микроуровнях, то гладкого приближения уже недостаточно. Вместе с тем, предположением о гладкости является весьма удобным, так как позволяет использовать хорошо разработанный аппарат уравнений в частных производных. Поэтому представляет интерес такое описание, которое, с одной стороны, ослабило бы требования к гладкости функций, а с другой — сохранило бы возможности использования теории уравнений в частных производных. Этим противоречивым требованиям можно удовлетворить, если изменить само понятие функции и соответствующих полей.

Перейдем теперь к более конкретной формулировке проблемы.

§ 12.1. НЕСТАНДАРТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТРУКТУРНЫХ УРОВНЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

12.1.1. Постановка задачи

Прежде всего необходимо отметить, что проблемы, связанные с негладкостью поля скоростей (а, значит, и поля смещений) возникают и в других областях механики (см., например, [203]). Ниже ограничимся построениями, которые связаны только с моделями, рассмотренными в § 4.3, 4.6 и 5.2. В указанных моделях исходному негладкому полю скоростей ставилось в соответствие гладкое осредненное поле и дополнительные переменные, восполняющие информацию о разрывах, которая терялась при осреднении.

В определенных ситуациях такого описания недостаточно и требуется более радикальные изменения в математическом аппарате. Обратимся снова к одному из простейших примеров. Пусть некоторый элемент среды $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$ испытывает простой сдвиг γ . Классическая теория описывает этот процесс весьма просто. Задается поле перемещений

$$u = 0, v = \operatorname{tg} \gamma x,$$

которому соответствует определенные компоненты деформаций и поворот:

$$\varepsilon_{xx} = 0, \varepsilon_{yy} = 0, \varepsilon_{xy} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2}, \omega = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2}.$$

Здесь все предельно ясно.

Предположим теперь, что среда имеет один микроструктурный уровень и сдвиг в целом осуществляется так, как показано на рис. 12.1 б. Пусть $l_n = 1/n$ — размер структурного элемента первого уровня, γ_e — величина его сдвига. Для определенности будем считать последний упругим.

В этом примере ситуация полностью характеризуется профилем смещений прямой $y = 0$. Это означает, что вместо векторного поля перемещений, можно рассматривать только указанный профиль — кривую $y = f_n(x)$. Здесь она представляет собой ступенчатую линию. Каждая ступень наклонена к оси Ox под углом γ_e . Этот угол характеризует упру-

гую деформацию. В среднем профиль имеет наклон γ . Угол γ характеризует общую деформацию. При этом разность $(\gamma - \gamma_e)$ связана с пластической деформацией. Здесь пластическая деформация „не размазана“, как обычно, по всему объему, а сосредоточена на проскальзываниях между структурными элементами первого уровня.

Теперь главное. При построении любой теории невозможно обойтись без определенной степени идеализации. Из двух указанных вначале постулатов первый постулат оставим без изменения, т. е., по-прежнему, будем считать, что среда является сплошной. Иными словами, примем, что область определения всех функций является связанной, непрерывной. Второй постулат о дифференцируемости всех функций значительно ослабим, а именно, мы не будем считать, что все функции дифференцируемы, а предположим только, что абсолютные размеры структурных элементов значения не имеют. Поэтому они могут считаться сколь угодно малыми. Это более слабое предположение, чем дифференцируемость. Однако оно позволяет при работе с недифференцируемыми функциями использовать методы уравнений математической физики.

Для рассматриваемого примера указанная постановка означает следующее. Необходимо описать процесс деформирования на двух структурных уровнях. При этом информация о размере l_n несущественна и поэтому можно считать, что $n \rightarrow \infty$, $l_n = 1/n \rightarrow 0$. Однако вся остальная информация об упругой деформации структурных элементов γ_e их относительном скольжении и формировании таким образом общего сдвига γ должна быть сохранена.

Здесь сразу возникает одна трудность. Пусть $n \rightarrow \infty$. Тогда операция перехода к пределу, понимаемая в обычном смысле, дает следующий результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - \operatorname{tg} \gamma x| = 0, \quad (1.1)$$

т. е. пределом является прямая $y = x \operatorname{tg} \gamma$. Следовательно, информация о том, что локальный наклон равен γ_e и отличается от среднего наклона γ , полностью теряется. Таким образом, операция (1.1) приводит к неудовлетворительному результату.

Поэтому наряду с пределом (1.1) можно задать дополнительно информацию о локальном угле наклона графика $y = f(x)$. Это соответствует рассмотренному выше подходу, когда сплошная среда наделяется набором дополнительных внутренних переменных. Как отмечалось, в определенных ситуациях этого описания недостаточно. Например, пусть требуется подсчитать кинетическую энергию объема среды. Для этого необходимо подсчитать квадрат функции $f_n^2(x)$. Иными словами, необходимо ответить на следующий вопрос: если действительному разрывному профилю скоростей $f_n(x)$ ставится в соответствие пара $f_n(x) \rightarrow (\operatorname{tg} \gamma \cdot x; \gamma_e)$, то какой объект должен быть поставлен в соответствие $f_n^2(x)$? Аналогичные вопросы возникают для определенного интеграла от $f_n(x)$ и т. д. Попытки решения подобных вопросов, исходя из гладкого осреднения и заданных дополнительно внутренних переменных, приводят ко все более сложным и искусственным построениям (здесь они не приводятся).

Источник всех трудностей связан с тем, что задание исходного поля в виде осреднения и внутренних переменных содержит некоторое словесное и, главное, неаналитическое описание их смысла. Основная идея состоит в том, чтобы все дополнительные соглашения относительно интерпретации внутренних переменных выразить аналитически, то есть

записать их в виде обычных операций [129]. Тогда ответ на вопрос, какие внутренние переменные соответствуют $f_n^2(x)$, будет решаться „автоматически“ — путем возведения в квадрат соответствующих выражений.

Для реализации указанной идеи необходимо вернуться к равенству (1.1) и изменить само определение предела. Фигурально выражаясь, в пределе необходимо получить ломаную линию, имеющую бесконечно малый зигзаг. Причем локальный угол наклона должен равняться γ_e , а общий наклон — γ . Ясно, что это не может быть обычная прямая, а должен быть какой-то другой, более сложный объект. Необходимо отметить, что потребность в подобных объектах возникает и в других областях механики и прикладной математики [313—315]. Так, в [313] подобные объекты получили название обобщенных кривых и вводились как элементы специального дуального пространства. Ниже описание [313] неудобно, так как здесь становится задача не только строгого описания подобных объектов, но и построения рабочего аппарата, который был как можно ближе к традиционному аппарату уравнений в частных производных. Таким образом, в начале необходимо ввести строгое определение нового объекта.

Прежде, чем переходить к формальным построениям, отметим, что разрывы различных типов исследуются и в рамках классического математического аппарата. Но они допускаются как некоторое особое решение, „патология“, и поэтому рассматриваются только на одной или нескольких изолированных поверхностях. При этом поверхности отстоят друг к другу на расстояниях порядка размера деформируемой области, то есть достаточно далеко. Здесь мы ставим задачу построения теории, для которой разрывы были бы типичным явлением и могли реализоваться всюду в области определения того или иного поля.

Хорошо известно, что подобные функции (например, непрерывные, но нигде не дифференцируемые) рассматриваются и в классическом анализе. Однако в настоящей работе ставится задача ввести в математический аппарат новые элементы так, чтобы для работы с нигде недифференцируемыми разрывными функциями можно было использовать все методы теории уравнений в частных производных. То есть, с одной стороны, функции должны быть всюду разрывными, с другой — для них должны быть сохранены все возможности аппарата, которые имеют место для гладких функций.

Этим противоречивым требованиям можно удовлетворить, если наряду с обычными математическими объектами, которые фигурируют в механике твердого тела, ввести новые объекты и, в частности, основной объект нестандартного анализа — актуальную бесконечно малую величину [173—178].

Вначале напомним представление об этой величине. На первый взгляд кажется, что точки на обычной действительной прямой расположены так тесно, что „втиснуть“ между ними какие-то новые точки совершенно невозможно. Однако это не так. Будем в качестве точек рассматривать не числа, а бесконечные числовые последовательности

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}. \quad (1.2)$$

Примем, что $A = B$, если начиная с некоторого номера N , $a_n = b_n$. Пусть $A < B$, если $a_n < b_n$ при всех $n \geq N$. Величину a_n будем называть приближением A . Все операции с объектами (1.2) введем через соответствующие операции с их приближениями. Например,

$$AB = \{a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots\}.$$

Обычное действительное число a отождествим со стационарной последовательностью $\{a, \dots a, \dots\}$.

Запас объектов (1.2) является слишком широким для наших целей. Поэтому ограничимся только действительными числами, то есть стационарными последовательностями, одной нестационарной последовательностью вида

$$\Pi = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}. \quad (1.3)$$

и результатами операций между ними. Легко заметить, что $\Pi > 0$, но меньше любого положительного действительного числа. Поэтому объект Π можно назвать актуальной бесконечно малой величиной. Таким образом, между обычными действительными точками поместилось бесконечно много новых точек. Например,

$$0 < \Pi^2 < \Pi < 2\Pi < \sqrt{\Pi} < \varepsilon,$$

где ε — сколько угодно малое положительное число.

Посмотрим теперь, как потребность в подобных объектах может возникнуть в механике твердого тела. Ограничимся одномерной деформацией, когда отлична от нуля только вертикальная компонента скорости, причем зависит она только от горизонтальной координаты.

12.1.2. Функции со структурой

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: необходимо изменить классическое определение предельного перехода так, чтобы „предельный“ объект сохранил информацию о внутренней структуре функции $f_n(x)$. Здесь есть два пути. Первый путь состоит в том, чтобы ввести „предельный“ объект как идеальный и определить его свойства с помощью системы аксиом. Второй путь предполагает использование процедуры, принятой в функциональном анализе при построении пополнения заданного пространства [316]. Для обоснования техники вычислений второй путь является более удобным. Поэтому выберем его.

Перейдем теперь к точным формулировкам. Пусть заданы две последовательности функций

$$\begin{aligned} P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots, \\ \tilde{P}_1(x), \tilde{P}_2(x), \dots, \tilde{P}_n(x), \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем говорить, что последовательности эквивалентны, если начиная с некоторого номера N , все их члены совпадают между собой, то есть имеют место равенства

$$P_N(x) = \tilde{P}_N(x), P_{N+1}(x) = \tilde{P}_{N+1}(x), \dots$$

Очевидно, что введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому множество всех последовательностей функций разбивается на классы эквивалентности. Класс, содержащий последовательность (2.1), обозначим через $P(x)$ либо $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$. Таким образом, положим по определению, что

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x). \quad (2.2)$$

Класс эквивалентных последовательностей $P(x)$ будем также называть функцией со структурой или объектом, а функции $P_n(x)$ — приближениями $P(x)$. Для удобства функции будем иногда называть обычными функциями. Предположим, что все они определены на отрезке $[0, 1]$.

Любую обычную функцию $y = f(x)$ можно интерпретировать как функцию со структурой, поставив ей в соответствие класс стационарных последовательностей $P_n(x) = f(x)$. В частном случае, когда $f(x)$ сводится к постоянной, в множество объектов (2.2) включаются и действительные числа. Здесь новых обозначений вводить не будем. Так, положим по определению, что

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x), \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0, \quad 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.3)$$

По смыслу всегда будет ясно, что понимается под символами $f(x)$, 0 ; 1 ; ... обычная функция или число, либо объект типа (2.2). Все операции с объектами (2.2) будем выводить через их приближения.

Например, пусть $P(x)$ и $B(x)$ — две функции со структурой. Назовем их суммой и произведением следующие объекты:

$$\begin{aligned} P(x) + B(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(x) + B_n(x)), \\ P(x) \cdot B(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \cdot B_n(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Остальные операции и обозначения для них вводятся аналогично:

$$\begin{aligned} \sqrt{P(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{P_n(x)}, \\ |P(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)|, \\ \sup P(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P_n(x) \end{aligned}$$

и т. д. Равенства (2.3), (2.4) позволяют определить также операции между обычными функциями и функциями со структурой. В частности, если $f(x)$, $k(x)$ — две обычные функции, а $P(x)$ — функция со структурой, то их линейная комбинация имеет следующий смысл:

$$F(x) = f(x) + k(x)P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) + k(x)P_n(x)].$$

В некоторых случаях определения (2.4) можно распространить на отношения порядка. Примем, что $P(x) < B(x)$, если начиная с некоторого номера N , для всех приближений имеют место неравенства

$$P_N(x) < B_N(x), \quad P_{N+1}(x) < B_{N+1}(x) \dots$$

Как отмечалось, идея введения новых объектов методом (2.2) (то есть через классы эквивалентности) используется достаточно широко и является общепризнанной. Однако для выбора условия эквивалентности никаких общих правил нет. Именно оно, это условие, является главным и определяет разрешающую способность той или иной теории

(то есть указывает, какие объекты необходимо считать различными, а какие объекты — совпадающими между собой, эквивалентными).

Выше принято наиболее простое условие эквивалентности (эквивалентность по совпадению последовательностей на кофинитных множествах). Считается [173, 178], что это условие приводит к ряду трудностей в теоретических построениях и, в частности, к появлению делителей нуля. Проблему делителей нуля можно пояснить на следующем примере. Пусть есть две последовательности $j_1 = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ и $j_2 = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$. Их произведение есть нуль: $j_1 \cdot j_2 = 0$, хотя $j_1 \neq 0, j_2 \neq 0$. Поэтому вводятся понятие ультрафильтра и на этой основе строится более жесткое условие эквивалентности [173]. При этом более жестком условии эквивалентности одна и только одна из последовательностей j_1 или j_2 отождествляется с нулем, то есть с последовательностью $\{0, 0, \dots, 0, \dots\}$. Поэтому проблема делителей нуля считается исчерпанной.

Однако при таком подходе неясно, чем все же по существу отличаются друг от друга последовательности j_1 и j_2 , если одну из них можно отождествить с нулем, а другую нет. Кроме, в целом ситуация такова, что указать какой-либо конкретной ультрафильтр затруднительно. Известно, что указанная трудность связана с применением аксиомы выбора Цермело [317]. Поэтому ниже ограничимся условием эквивалентности (2.2), которое полностью отвечает интуитивному пониманию предела и основано только на конструктивных определениях.

Следует, однако, признать, что принятое определение носит довольно общий характер. Поэтому множество объектов (2.2) является чрезвычайно богатым и практически необозримым. По-видимому, их запас превышает все разумные потребности механики и вообще прикладных наук. Задача состоит в том, чтобы найти дополнительные ограничения, которые сузили бы это множество и позволили сделать более конкретные построения.

Для этого вначале введем один особый объект, который можно было бы считать в каком-то смысле простейшим, элементарным носителем разрывов. Обозначим его через $E(x)$. Какие требования следует предъявить к подобному объекту? Во-первых, его приближения $E_n(x)$ должны быть функциями разрывными. Далее, указанные функции должны иметь минимально возможное число степеней свободы. Наиболее простым будет случай, когда все точки разрывов делят область определения функции $[0, 1]$ на одинаковые отрезки. Пусть приближение $E_n(x)$ имеет $(n - 1)$ точек разрыва. Тогда задание номера n однозначно определит координаты всех точек разрыва. Положим в первом интервале непрерывности $[0, 1/n]$ значения $E_n(x) = x$. Пусть на всех остальных интервалах $E_n(x)$ периодически повторяет значения на первом интервале (рис. 12.2). По-видимому, такая конструкция является самой простой. По крайней мере, при $n \rightarrow \infty, E_n(x) \rightarrow 0$, а производная $E_n(x)$ там, где она существует, постоянна и тождественно равна 1. (Более простой вариант $E_n(x) = \text{const}$ при $x \in [0, 1/n]$ дает уже тривиальный результат.) Итак, объект $E(x)$ представляет собой следующий класс эквивалентных последовательностей:

$$E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} E_n(x) &= E_n(x_i + \tau) = \tau, \quad \tau = x - x_i, \\ 0 \leq \tau < l_n, \quad l_n &= \frac{1}{n}, \quad x_i = (i - 1)l_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Короче можно записать так:

$$E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{nx\}}{n},$$

где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Ниже из всего множества (2.2) будем использовать лишь один объект — $E(x)$. Ограничимся изучением функций со структурой, которые можно получить в результате операций с элементарным носителем разрывов $E(x)$ и обычными гладкими функциями. В этом отношении объект $E(x)$ будет играть роль нового базисного элемента.

12.1.3. Линейные функции

Вначале рассмотрим линейную комбинацию $E(x)$ и обычных гладких функций $f(x)$ и $k(x)$:

$$F(x) = f(x) + k(x)E(x). \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.5), (2.6) получим следующее выражение для приближения:

$$F_n(x) = F_n(x_i + \tau) = f(x_i + \tau) + k(x_i + \tau) \cdot \tau. \quad (3.2)$$

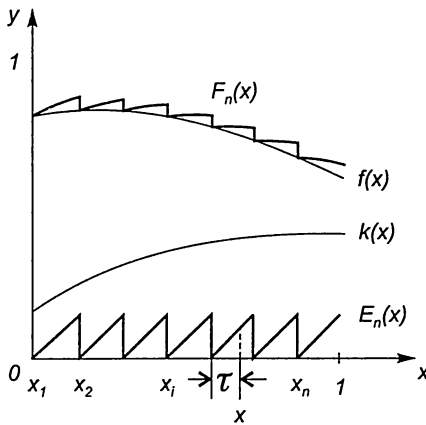


Рис. 12.2

Верно и обратное: если некоторая функция зависит от x и n по правилу (3.2), то она является приближением объекта (3.1). Функцию $f(x)$ („свободный член“) будем называть базовой функцией. На рис. 12.2 показан типичный график приближения (3.2). При $l_n \ll 1$ значения $F_n(x)$ определяются значениями базовой функции, так как $E_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно (3.2), $F_n(x) \rightarrow f(x)$. Таким образом, „издалека“ график $y = F_n(x)$ выглядит как $y = f(x)$. Если же смотреть на график „вблизи“, то скачки, связанные с разрывностью $E_n(x)$, уже различаются. Поэтому сам „предельный“ объект $F(x)$ должен характеризоваться производными, взятыми в различных смыслах: как с учетом локальной структуры приближений, так и „в среднем“, без учета такой струк-

туры. Теперь более точные формулировки.

Производной $\partial / \partial x$ или ∂ -производной линейной функции со структурой (3.1) назовем объект

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f'(x) + k'(x)E(x), \quad (3.3)$$

где $f'(x)$, $k'(x)$ — обычные производные от $f(x)$, $k(x)$. Если $k(x) \equiv 0$, то $F(x)$ сводится к $f(x)$ и ∂ -производная переходит в классическую производную.

Теперь обратимся к равенству (3.2). Приближение $y = F_n(x)$ внутри интервалов (x_i, x_{i+1}) является функцией гладкой. Производную этой функции можно найти, если равенство (3.2) продифференцировать по τ :

$$\frac{dF_n(x_i + \tau)}{d\tau} = f'(x_i + \tau) + k(x_i + \tau) + k'(x_i + \tau)\tau. \quad (3.4)$$

Переменная τ имеет смысл вариации аргумента x , причем такой вариации, которая не выводит за границы интервала. Подчеркнем это специальным обозначением $\tau = \delta x$. Из того факта, что равенства (3.1) и (3.2) эквивалентны, легко заключить, что правая часть (3.4) является приближением объекта $f' + k + k'E$. Поэтому естественно ввести следующее определение. Назовем локальной производной, или d -производной от выражения (3.1) следующую функцию со структурой:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f'(x) + k(x) + k'(x)E(x). \quad (3.5)$$

Для самого базисного элемента равенства (3.3), (3.5) дают следующий результат:

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{dE(x)}{dx} \equiv 1.$$

Теперь можно перейти к общему случаю.

12.1.4. Нелинейные функции

Пусть $\psi(x, y)$ — обычная гладкая функция своих аргументов. Обозначим через $\psi(x, E)$ следующую функцию со структурой

$$F(x) = \psi(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x, E_n(x)). \quad (4.1)$$

В терминах приближений:

$$F_n(x) = F_n(x_i + \tau) = \psi(x_i + \tau, \tau) \quad \text{при } x \leq \tau < x_i + l_n, \quad (4.2)$$

то есть $F_n(x)$ является приближением объекта $F(x) = \psi(x, E)$. Это утверждение обобщает предложение об эквивалентности (3.1), (3.2) и лежит в основе всех выкладок.

Функцию $\psi(x, 0) = f(x)$ назовем базовой функцией для $F(x)$. Очевидно, что если

$$\psi(x, y) = f(x) + k_1(x)y + k_2(x)y^2 + \dots,$$

то

$$\psi(x, E) = f(x) + k_1(x)E + k_2(x)E^2 + \dots$$

Действия со степенями $E(x)$ позволяют ввести показательные, тригонометрические и другие функции со структурой, содержащие объект $E(x)$ в качестве аргумента.

Предположим, что функция $\psi(x, y)$ имеет следующие частные производные:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \psi_x(x, y), \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \xi(x, y).$$

Тогда под $\psi_E(x, E)$ будем понимать $\xi(x, E)$. Теперь определения производных (3.3), (3.5) можно распространить на общий случай. Производной $\partial / \partial x$, или ∂ -производной от функции со структурой $F(x) = \psi(x, E)$, будем называть объект

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \psi_x(x, E), \quad (4.3)$$

а локальной производной, или d -производной, будем называть следующий объект

$$\frac{dF(x)}{dx} = \psi_x(x, E) + \psi_E(x, E). \quad (4.4)$$

Везде по возможности будем использовать обычную терминологию алгебры и анализа. Например, операцию взятия производной будем называть дифференцированием, производные производных обозначать как вторые производные $-\partial^2 / \partial x^2$, d^2 / dx^2 и т. д. Легко доказать, что операции локального и ∂ -дифференцирования перестановочны, для производных суммы и произведения двух функций со структурой имеют место обычные формулы. Нетрудно также доказать, что функция со структурой сводится к обычной функции только в тех случаях, когда ее локальная и ∂ — производные совпадают между собой. Поэтому в общем случае производные $\partial / \partial x$ и d / dx между собой не совпадают. Именно это различие и приводит к появлению разрывов у приближений.

Рассмотрим вопрос о разрывах подробнее. Конструкция базисного элемента $E(x)$ выбрана так, чтобы на границах интервалов все приближения испытывали сильный разрыв:

$$E_n(x_i + 0) = 0, \quad E_n(x_i - 0) = l_n = 1/n.$$

Это обстоятельство влечет за собой появление разрывов и у приближений $\psi(x, E_n(x))$. Обозначим через R величину разрыва и будем рассматривать R как оператор:

$$\begin{aligned} RE_n(x) &= E_n(x_i + 0) - E_n(x_i - 0) = -l_n, \\ R\psi(x_i, E_n(x)) &= \psi(x_i, 0) - \psi(x_i, l_n). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Положим по определению

$$RF_n(x) = R\psi(x, E_n) = \psi(x, 0) - \psi(x, l_n). \quad (4.6)$$

В точках $x = x_i$ значение $RF_n(x)$ совпадает со скачками $F_n(x)$. Поэтому $RF_n(x)$ можно назвать функцией разрывов. Сама по себе эта функция является гладкой. Более того, все ее производные по x имеют ясный смысл: они равны функции разрыва от приближений производной $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$.

Итак, функция $RF_n(x)$ зависит от номера n и характеризует приближения $F_n(x)$. Естественно распространить эту характеристику и на сам объект $F(x)$. Для этого, однако, потребуется еще одно понятие, которое удобнее рассмотреть позже.

12.1.5. Неопределенные интегралы от функций со структурой

Выше были введены операции дифференцирования. Обратные операции естественно назвать интегрированием. Первообразной от $F(x)$ или (∂ -первообразной) назовем функцию со структурой $G(x)$, для которой

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = F(x).$$

Пусть $C(y)$ — произвольная функция своего аргумента. Тогда в соответствии с определением (4.3) имеем

$$\frac{\partial C(E(x))}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, если $G(x)$ — некоторая первообразная, то $G(x) + C(E)$ также будет первообразной. Неопределенным интегралом (или ∂ -интегралом) от $F(x)$ назовем следующую совокупность объектов:

$$\int F(x) \partial x = G(x) + C(E).$$

Если $F(x) = \psi(x, E)$, то для отыскания интеграла необходимо найти обычный интеграл

$$\int \psi(x, y) dx = g(x, y) + C(y),$$

и в правой части заменить y на $E(x)$. Короче, эти действия запишем таким образом:

$$\int \psi(x, E) \partial x = g(x, E) + C(E). \quad (5.1)$$

Итак, если интеграл от обычной функции вычислялся с точностью до аддитивной постоянной, то интеграл от функции со структурой вычисляется с гораздо большим произволом, а именно, с точностью до аддитивной функции одной переменной.

Перейдем теперь к операции, обратной локальному дифференцированию. Назовем d -первообразной от функции со структурой $F(x)$ такой объект $H(x)$, локальная производная которого равна $F(x)$:

$$\frac{dH(x)}{dx} = F(x).$$

Нетрудно доказать, что локальная производная от любой функции со структурой аргумента $(x - E)$ тождественно равна нулю, то есть

$$\frac{d}{dx} C(x - E) \equiv 0.$$

Поэтому d -первообразная вычисляется с точностью до функции $C(x - E)$. Совокупность функций со структурой $H(x) + C(x - E)$ обозначим как

$$\int F(x) dx = H(x) + C(x - E).$$

и назовем неопределенным d -интегралом. Алгоритм поиска d -интеграла сводится к следующему. Пусть $F(x) = \psi(x, E)$ и некоторая функция $h(x, y)$ является решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = \psi(x, y).$$

Тогда $H(x) = h(x, E)$. Будем использовать следующую форму записи:

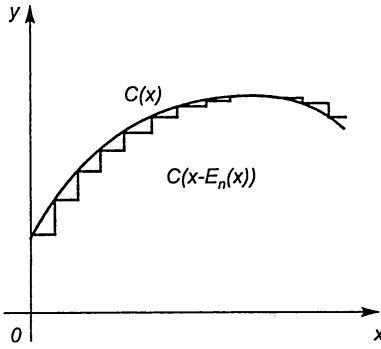


Рис. 12.3

$$\int \psi(x, E) dx = h(x, E) + C(x - E). \quad (5.2)$$

Таким образом, d -интеграл также определяется с точностью до одной произвольной функции одного аргумента. Смысл произвола состоит в следующем. Базовой функцией для $C(x - E)$ является функция $y = C(x)$. Локальная производная этой функции равна тождественно нулю. Поэтому графики всех приближений $C(x - E)$ „собраны“ из горизонтальных отрезков (констант), которые „закреплены“ на кривой $y = C(x)$ (рис. 12.3).

12.1.6. Определенные интегралы от функций со структурой

Итак, каждая функция со структурой $F(x)$ порождает множество первообразных, производные которых в смысле $\partial / \partial x$ либо d / dx равны $F(x)$. Существует ли в указанном множестве объект, которому можно придать смысл определенного интеграла от $F(x)$? Как известно, для обычных функций этот вопрос решается положительно. Для функции со структурой это не так.

Функции со структурой вводились через последовательности обычных кусочно-гладких функций (приближений). Естественно и определенные интегралы от них ввести через соответствующие последовательности определенных интегралов от приближений. Пусть, по-прежнему, $F(x)$ — функция со структурой, а $F_n(x)$ — ее приближение. Определенным интегралом от $F(x)$ назовем следующий класс эквивалентных последовательностей:

$$S(x) = \int_0^x F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x F_n(x) dx. \quad (6.1)$$

Здесь все построения подошли к одному принципиальному моменту. Он связан со следующим обстоятельством. Нетрудно понять, что в множестве объектов (4.1) определенного интеграла (6.1) не содержится. Для доказательства достаточно привести один пример. Пусть $F(x) = E^2(x)$. Согласно определению (6.1),

$$\int_0^x E^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{E_n^3}{3} + \frac{I_n^2}{3} (x - E_n) \right]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь неопределенные интегралы. Соотношения (5.1), (5.2) дают

$$\int E^2(x) \partial x = x \cdot E^2 + C(E), \quad (6.3)$$

$$\int E^2(x) dx = \frac{E_n^3}{3} + C(x - E). \quad (6.4)$$

Ясно, что никаким подбором функции C добиться совпадения правой части равенств (6.3) или (6.4) с (6.2) невозможно. Такой результат можно было ожидать с самого начала. Действительно, функции $y = F_n(x)$ имеют конечные разрывы первого рода. Поэтому определенные интегралы от них будут функциями непрерывными. Произвол же в функцию C

(x — E) позволяет устранить разрывы только первого порядка по l_n . Разрывы высших порядков устранить невозможно. Поэтому интеграл (6.1) в множестве объектов (4.1) не содержится.

Поставим следующую задачу: расширить запас объектов (4.1) так, чтобы в него вошли не только сами функции со структурой, но и определенные интегралы от них полученные. Результат (6.2) подсказывает путь решения этой задачи. Все дело в том, что в классе приближения (4.2) нет самой величины l_n . Во всех приближениях фигурируют переменные x , t , x_i но величины l_n явно не содержится. Этот пробел можно восполнить, если использовать еще одну операцию — операцию взятия по $\sup x$. Очевидно, что $l_n = \sup E_n(x)$. Для \sup от базисного элемента введем специальное обозначение (см. также определение (1.3))

$$\Pi = \sup E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{-1}. \quad (6.5)$$

Отсюда и из (4.3), (4.4) можно заключить, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{d\Pi}{dx} = 0. \quad (6.6)$$

Равенство (6.5) фактически означает следующее определение. Объектом Π называется класс последовательностей стационарных функций, эквивалентных последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Роль приближения для Π играет стационарная функция $\Pi_n(x) = l_n$. Это обстоятельство, а также равенства (6.6), показывают, что в обозначениях $\Pi(x)$, $\Pi_n(x)$ аргумент x можно опускать.

Таким образом, во всех построениях с необходимостью появился объект, по существу совпадающий с бесконечно малой величиной нестандартного анализа [173]. Введение объекта Π решает проблему определенного интегрирования полностью. Так, согласно (6.2), (6.5), определенный интеграл от E^2 равен

$$\int_0^x E^2(x) dx = \frac{E^3}{3} + \frac{\Pi^2}{3} (x - E).$$

Объекта Π достаточно, чтобы вычислить определенный интеграл от любой функции со структурой:

$$\int_0^x \psi(x, E) dx = \chi(x, E, \Pi). \quad (6.7)$$

Таким образом, операция интегрирования привела к расширению запаса функций со структурой от (4.1) до (6.7). Сделаем еще один шаг. Возьмем произвольную гладкую функцию трех аргументов $\Phi(x, y, z)$ и образуем объект

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x, E_n(x), \Pi_n) = \Phi(x, E, \Pi). \quad (6.8)$$

Очевидно, что определение (6.8) расширяет множество (4.1). Возникает вопрос, не потребуется ли новое расширение для описания определенных интегралов уже от объектов

вида (6.8)? Нетрудно доказать, что множество (6.8) по отношению к указанной операции будет замкнутым. Очевидно, что оно будет замкнутым и по отношению ко всем остальным рассмотренным выше операциям.

Действительно, равенства (6.6) показывают, что формулы для ∂ - и d -производных от (6.7) будут иметь тот же вид, что и (4.3), (4.4). Поэтому неопределенные интегралы будут вычисляться по прежним формулам (5.1), (5.2). Отличие будет только в том, что везде появится новый аргумент Π :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \Phi(x, E, \Pi) \partial x = g(x, E, \Pi) + C(E, \Pi), \\ H(x) &= \int \Phi(x, E, \Pi) dx = h(x, E, \Pi) + C(x - E, \Pi). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Здесь произвол существенно увеличивается и сводится теперь уже к функции от двух переменных. Такого произвола уже достаточно, чтобы среди всех первообразных (6.9) найти такую, которая имела бы смысл определенного интеграла. Остановимся на технике вычислений.

Обратимся вначале к равенству (4.6). Функция $RF_n(x)$ характеризует разрывы приближений $F_n(x)$. Определение (6.5) позволяет распространить эту характеристику и на функции со структурой $F(x)$. Положим

$$RF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} RF_n(x) \quad (6.10)$$

и назовем $RF(x)$ функцией разрывов от $F(x)$. Если $F(x) = \psi(x, E)$, то из (4.6), (6.10) можно заключить, что

$$R\psi(x, E) = \psi(x, 0) - \psi(x, \Pi).$$

Таким образом, описание (6.10) также приводит к необходимости введения объекта Π . Последнее равенство показывает, что множество (4.1) по отношению к операции R замкнутым не является. Множества же (6.8) будет, очевидно, замкнутым:

$$R\Phi(x, E, \Pi) = \Phi(x, 0, \Pi) - \Phi(x, \Pi, \Pi). \quad (6.11)$$

Характеристическим признаком определенного интеграла является отсутствие сильных разрывов:

$$RS(x) = 0.$$

Применяя оператор R к правой части (6.9), придем к следующему функциональному уравнению:

$$C(x, \Pi) - C(x - \Pi, \Pi) = h(x, \Pi, \Pi) - h(x - 0, \Pi).$$

В более привычных обозначениях можно записать так:

$$C(x, y) - C(x - y, y) = h(x, y, y) - h(x, 0, y).$$

Здесь функция $h(x, y, z)$ заранее известна и требуется найти функцию $C(x, y)$. Последнее равенство должно выполняться при $x \in [0, 1]$ и малых y . Отсюда функция $C(x, y)$ вычисляется с точностью до аддитивной постоянной, которая позволяет удовлетворить дополнительному требованию $S(0) = 0$.

Таким образом, операция определенного интегрирования привела к функциям со структурой, функция разрывов которых равна тождественно нулю. (Их можно назвать функциями с тонкой структурой.) Приближения в данном случае будут функциями непрерывными. Однако на границах интервалов их производные будут испытывать разрыв.

12.1.7. Иерархия структурных уровней

Проблема описания пластических деформаций требует еще одного обобщения. Как отмечалось, пластичность развивается на ряде структурных уровней. Этот факт необходимо отразить в математическом аппарате. Объекты (6.8) имеют два структурных уровня: исходный макроуровень (ему отвечает базовая функция и производные в смысле $\partial/\partial x$ и первый структурный уровень (ему соответствуют локальные производные d/dx). Задача состоит в том, чтобы ввести объекты, имеющие второй, третий и последующие уровни структуры.

Пусть, по-прежнему, задан отрезок $[0, 1]$. Разобьем его точками x_1, x_2, \dots, x_n на n равных интервалов. Каждый из интервалов (x_i, x_{i+1}) разобьем точками $x = x_{ij}$ на m равных частичных интервалов. Первый индекс указывает на номер интервала, второй — на номер частичного интервала. При этом $x_{i1} = x_i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Обозначим через l_n длину интервала, через l_{nm} — длину частичного интервала. Очевидно, что $l_n = 1/n, l_{nm} = 1/nm, l_n = x_{i+1} - x_i, l_{nm} = x_{ij+1} - x_{ij}$. Построим на частичных интервалах элементарную разрывную функцию по образцу (2.6):

$$E_{nm}(x) = x - x_{ij} \quad (7.1)$$

при

$$x_{ij} \leq x < x_{ij} + l_{nm}.$$

В общем случае параметры n и m независимы. Однако для дальнейших построений такая свобода представляется излишней. Вполне достаточно предположить, что задана некоторая монотонная функция

$$m = m(n). \quad (7.2)$$

Таким образом, если задан номер n и зависимость (7.2), то функция (7.1) определяется однозначно. Это можно подчеркнуть обозначением

$$E_{nm}(x) = E_n^{(2)}(x, m(n)) = E_N(x), N = n \cdot m.$$

Далее, назовем базисным элементом второго уровня следующий класс эквивалентных последовательностей:

$$E^{(2)}(x, m(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n^{(2)}(x, m(n)). \quad (7.3)$$

Отметим одно обстоятельство. Функция $E_n(x)$ своим номером n характеризовалась однозначно. Для $E_n^{(2)}$ ситуация другая: здесь кроме номера n необходимо задавать также зависимость $m(n)$. Это означает, что базисный элемент $E(x)$ был определен единственным образом, а базисных элементов $E^{(2)}$ может быть бесконечно много. Каждой зависимости (7.2) соответствует свой базисный элемент $E^{(2)}$. (Две функции (7.2) можно не различать,

если, начиная с определенного n , они совпадают.) Ниже все операции будем вводить для объектов только с одинаковой характеристикой (7.2). Поэтому предположим, что зафиксирована одна какая-то зависимость $m(n)$ и, следовательно, один из элементов $E^{(2)}$. Поэтому „аргумент“ $m(n)$ в обозначении (7.3) для краткости будем опускать.

Итак, пусть известны значения x и n . Вычислим $E_n(x)$ и $E_n^{(2)}(x)$. Прежде всего определим номера интервала i и частичного интервала ij , в который попала точка x . Пусть

$$x_i \leq x < x_i + l_n, \quad x_{ij} < x \leq x_{ij} + l_{mn}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_{ij} - x_i &= \tau_1, \quad x - x_{ij} = \tau_2, \\ 0 \leq \tau_1 &< l_n - l_{mn}, \quad 0 \leq \tau_2 < l_{mn}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = x_{ij} + \tau_2 = x_i + \tau_1 + \tau_2. \quad (7.4)$$

и

$$\begin{aligned} E_n(x) &= E_n(x_i + \tau_1 + \tau_2) = \tau_1 + \tau_2, \\ E_n^{(2)}(x) &= E_n^{(2)}(x_{ij} + \tau_2) = \tau_2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Возьмем три гладкие функции f , k , $h(x)$ и рассмотрим линейную комбинацию

$$F_n(x) = f(x) + k(x)E_n(x) + h(x)E_n^{(2)}(x). \quad (7.6)$$

При больших n и m о графике (7.6) можно сказать следующее. Издалека он выглядит как $y = f(x)$. Вблизи видно, что он собран из отдельных криволинейных отрезков с углом наклона, равным $\arctg(f' + k)$. Если же теперь на отрезки посмотреть в увеличительное стекло, то можно увидеть, что каждый из них в свою очередь собран из более мелких отрезков со своим наклоном, определяемым величиной $f' + k + h$. Любые дальнейшие увеличения никаких новых деталей уже не добавят.

Теперь формально. Функция $E_n^{(2)}(x)$ относится к тому же номеру n , что и $E_n(x)$. Поэтому определения всех операций для $E(x)$, $E^{(2)}$ остаются без изменений. Например,

$$E(x) + E^{(2)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [E_n(x) + E_n^{(2)}(x)].$$

Далее, функция (7.6) является приближением объекта

$$F(x) = f(x) + k(x)E(x) + h(x)E^{(2)}(x). \quad (7.7)$$

Учитывая (7.4)—(7.6), получим

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_n(x_i + \tau_1 + \tau_2) = f(x_i + \tau_1 + \tau_2) + \\ &+ k(x_i + \tau_1 + \tau_2)(\tau_1 + \tau_2) + h(x_i + \tau_1 + \tau_2)\tau_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Равенства (7.7), (7.8) эквивалентны. Объект (7.7) можно назвать функцией со структурой на двух уровнях. Производную d/dx естественно связать с производной от (7.8) по x , локальную производную первого уровня d/dx с производной по τ_1 , а локальную производ-

ную второго уровня $d_2 / d_2 x$ — с производной по τ_2 . Итак, если $F(x)$ имеет вид (7.7), то положим по определению

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= f'(x) + k'(x)E(x) + h'(x)E^{(2)}(x), \\ \frac{dF}{dx} &= f'(x) + k(x) + k'(x)E(x) + h'(x)E^{(2)}(x), \\ \frac{d_2 F}{d_2 x} &= f'(x) + k(x) + h(x) + k'(x)E(x) + h'(x)E^{(2)}(x).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \quad \frac{dE}{dx} = 1, \quad \frac{dE}{dx} = 1, \\ \frac{\partial E^{(2)}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{dE^{(2)}}{dx} = 0, \quad \frac{dE^{(2)}}{dx} = 1.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Pi^{(2)} = E^{(2)}(x).$$

Интересно отметить, что второй структурный уровень может быть реализован фактически на том же пространственном масштабе, что и первый уровень. Например, если $m(n) = 3$, то $\Pi^{(2)} = \Pi / 3$. Здесь $l_{nm} \rightarrow 0$ при $l_n \rightarrow 0$, хотя m к бесконечности не стремится. Однако если $m(n) = n$ или $m(n) = n^n$, то

$$\Pi^{(2)} = \Pi^2 \text{ или } \Pi^{(2)} = \Pi / \Pi.$$

Далее, каждый из частичных интервалов можно разбить на частичные интервалы следующего уровня и построить на них функцию типа (7.1). Таким образом, можно прийти к функции с r -структурными уровнями:

$$F^{(r)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(r)}(x).$$

Здесь r — фиксированный номер. Возьмем теперь матрицу $F_n^{(r)}(x)$ и выделим из нее диагональные элементы $F_n^{(n)}(x)$. Они позволяют построить функцию с бесконечным числом структурных уровней

$$F^{(\omega)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(n)}(x).$$

§ 12.2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

12.2.1. Условия стационарности

Многие задачи механики допускают вариационные формулировки [148, 166]. Хорошо известна эвристическая ценность таких формулировок. В ряде случаев поиск математической модели удобнее вести сразу на языке функционалов, а не дифференциальных уравнений. Такой подход хотя и не является универсальным, но там, где он возможен, имеет ряд бесспорных преимуществ. Сами функционалы, как правило, имеют ясный ме-

ханический смысл. Вариационная формулировка приводит не только к уравнениям, но и к естественным краевым условиям. Кроме этого, она дает и прямые вычислительные методы решения задач. Естественно применить вариационные подходы и для сред с внутренними структурными уровнями. Для этого прежде всего необходимо рассмотреть вариационные задачи для функций со структурой.

Начнем с одномерных постановок. Классическая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом: найти стационарные значения функционала

$$W = \int_0^1 F(x, y, y') dx. \quad (1.1)$$

Здесь $y = y(x)$ — неизвестная функция, которая предполагается достаточно гладкой. Функция F задана и также является гладкой по своим аргументам. Пусть, например,

$$W = \int_0^1 \left[(y - x^2)^2 + (y' - v(x))^2 \right] dx. \quad (1.2)$$

В этой конструкции оба слагаемые всегда неотрицательны. Первое слагаемое указывает на то, что функция $y(x)$ должна быть как можно ближе к $y = x^2$. Второе слагаемое указывает на поведение производной y' : производная должна быть, как можно ближе к $v(x)$, т. е. $y' = v(x)$. Если $v(x) = 2x$, то проблем нет: решением задачи является $y = x^2$. Однако, если $v(x) \neq 2x$, то идеальный вариант $W = 0$ в классе обычных функций недостижим. Для функций со структурой возможности расширяются. Пусть

$$y = \psi(x, E, \Pi), \quad (1.3)$$

и, значит, приближение равно:

$$y_n(x) = \psi(x, E_n(x), \Pi_n). \quad (1.4)$$

Функция $y_n(x)$ является обычной кусочно непрерывной функцией своего аргумента. В точках разрыва производная такой функции равна бесконечности. Поэтому необходимо дать новую формулировку задачи (1.1). Здесь возможны самые разнообразные варианты. Выбор любого из них определяется только механическим смыслом задачи.

Вначале рассмотрим самый простой вариант, когда в функционале никакой дополнительной „платы“ за разрывы функции не возникает. Это значит, что для функции, имеющей разрыв в точках x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ,

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F[x, y_n(x), y'_n(x)] dx. \quad (1.5)$$

Очевидно, что для $y_n(x)$ вида (1.4)

$$y'_n(x) = \psi_x(x, E_n(x), \Pi_n) + \psi_E(x, E_n(x), \Pi_n).$$

Этой производной соответствует локальная производная от функции со структурой (1.3). Обозначим ее через p :

$$p(x, E, \Pi) = \frac{dy}{dx} = \psi_x(x, E, \Pi) + \psi_E(x, E, \Pi).$$

Следовательно, $y'_n(x) = p(x, E_n(x), \Pi_n)$.

Можно показать, что требование стационарности функционала в форме $\delta W = 0$ оказывается слишком жестким. Его необходимо ослабить, допустив значения вариации, пропорциональные актуальным бесконечным малым величинам. Введем следующее обозначение:

$$\delta y = \delta \psi(x, E, \Pi) = v(x, E, \Pi).$$

Примем, что

$$|v(x, E_n, \Pi_n)| \ll 1, \quad |v_x| \ll 1, \quad |v_E| \ll 1.$$

Тогда обычная процедура варьирования приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \delta W_n = & \int_0^1 \left[F_y(x, y_n, y'_n) - \frac{d}{dx} F_p \right] v(x, E_n, \Pi_n) dx + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} F_p(x, y_n, y'_n) v(x, E_n, \Pi_n) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где F_y, F_p — производные F по второму и третьему аргументам, d/dx — полная производная по x :

$$\frac{d}{dx} F_p(x, \psi(x, E_n, \Pi_n), p(x, E_n, \Pi_n)) = F_{px} + F_{py} p(x, E_n, \Pi_n) + F_{pp} \cdot (p_x + p_E).$$

Первый интеграл приводит к уравнению Эйлера

$$F_y(x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0)) - \frac{d}{dx} F_p = 0. \quad (1.8)$$

Вычислим далее внеинтегральную сумму. Для краткости введем обозначение суммы через δK_n и

$$F_p(x, \psi(x, E, \Pi), p(x, E, \Pi)) v(x, E, \Pi) = A(x, E, \Pi). \quad (1.9)$$

Тогда, учитывая что

$$E_n(x_i + 0) = 0, \quad E_n(x_i - 0) = l_n, \quad \Pi_n = l_n,$$

получим

$$\delta K_n = A(x_n, l_n, l_n) - A(x_0, 0, l_n) + \sum_{j=1}^{n-1} [A(x_j, l_n, l_n) - A(x_j, 0, l_n)]. \quad (1.10)$$

Как отмечалось, условие стационарности состоит в том, чтобы вариация имела порядок l_n . Первые два слагаемые в (1.10) с учетом обозначения (1.9) приводит к следующим крайним условиям ($x_n = 1, x_0 = 0$):

$$F_p(0, \psi(0, 0, 0), p(0, 0, 0)) v(0, 0, 0) = 0, \quad F_p(1, \psi(1, 0, 0), p(1, 0, 0)) v(1, 0, 0) = 0. \quad (1.11)$$

Эти условия вполне аналогичны естественным краевым условиям классической задачи. Остальные слагаемые в (1.10) приводят к результатам, которые в классической постановке аналога не имеют. Разложим выражение под знаком суммы в ряд:

$$A(x_j, l_n, l_n) - A(x_j, 0, l_n) = \left[\frac{\partial}{\partial E} A(x_j, 0, l_n) \right] l_n + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} A(x_j, 0, l_n) \right] l_n^2 + \dots \quad (1.12)$$

Число слагаемых (1.12) в сумме (1.10) имеет порядок n , или $1/l_n$. Вся сумма должна иметь только порядок l_n . Следовательно, коэффициент при l_n в (1.12) также должен иметь порядок l_n . Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial E} A(x_j, 0, 0) = 0. \quad (1.13)$$

С увеличением n множество значений x охватывает все рациональные точки отрезка $[0, 1]$, так как функция A по x непрерывна, то можно считать, что уравнение (1.13) должно выполняться при всех x . Отсюда, вспоминая обозначение (1.9), можно заключить, что

$$v(x, 0, 0) \frac{\partial}{\partial E} F_p[x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0)] + v_E(x, 0, 0) F_p[(x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0))] = 0. \quad (1.14)$$

Здесь возможны различные условия. Они зависят от того, в каком классе ищется решение. Остановимся на общем случае, когда допускается вариация как базовой функции $\psi(x, 0, 0)$ (значит, $v(x, 0, 0) \neq 0$), так и структуры: $v_E(x, 0, 0) \neq 0$. Из (1.14) видно, что в этом случае

$$F_p[x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0)] = 0, \quad \frac{d}{dx} F_p[x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0)] = 0. \quad (1.15)$$

Первое равенство приводит к тому, что оба краевых условия (1.11) удовлетворяются автоматически. Таким образом, решение задачи должно удовлетворять трем уравнениям: (1.8) и (1.15). Если функция со структурой переходит в обычную функцию, то полученные результаты переходят в известные.

Выше предполагалось, что в функционале никакой особой „платы“ за разрывы не возникает. Для исследования пластичности этого случая недостаточно. Хорошо известно, что процесс образования новых поверхностей в твердом теле требует дополнительных затрат энергии. Кроме этого, если берега трещин продолжают взаимодействовать между собой (например, в процессе скольжения), то энергия будет диссипироваться и после образования трещин. В вариационных формулировках это означает появление дополнительных слагаемых, которые зависят от величин разрывов перемещений. Для изолированных поверхностей разрывов такие формулировки рассмотрены в главе 8. Ниже рассмотрим случай, когда разрывы реализуются за счет внутренней структуры среды. Пусть приближение функционала имеет вид:

$$W_n = \int_0^1 F[x, \psi(x, E_n, l_n), p(x, E_n, l_n)] dx + \sum_{i=1}^{n-1} l_n \rho[x_i, \psi(x_i, 0, l_n), \psi_E(x_i, 0, l_n)]. \quad (1.16)$$

Здесь функция ρ описывает „плату“ за разрыв и считается заданной. Предположим, что она является гладкой. Обозначим через ρ_2, ρ_3 ее частные производные по второму и

третьему аргументам. Тогда условие стационарности приведет к прежнему уравнению (1.8) и краевым условиям (1.11). Уравнения (1.15) заменяются на следующие:

$$F_p[x, \psi(x, 0, 0), p(x, 0, 0)] + \rho_3[x, \psi(x, 0, 0), \psi_E(x, 0, 0)] = 0,$$

$$\frac{d}{dE} F_p + \rho_2 = 0. \quad (1.17)$$

Интересно отметить, что здесь краевые условия (1.11) автоматически уже не удовлетворяются.

12.2.2. Примеры

Функции со структурой позволяют описать особенности деформирования среды на различных масштабных уровнях. На рис. 12.4 показаны линии скольжения при потере устойчивости откоса. Среда предполагается идеально связной, поэтому линии скольжения ортогональны [206]. Классическое решение не учитывает возможное различие в поведении среды на площадках семейств линии $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$. Фактически же скольжение происходит только по линиям $r = \text{const}$. На линиях $\theta = \text{const}$ предельное состояние достигнуто, но скольжения нет. Такому процессу соответствует следующее поле скоростей: в области OAB

$$v_x = \frac{V^0}{\sqrt{2}}, v_y = 0,$$

в области OBC :

$$v_r \equiv 0, v_\theta = \frac{V^0}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{E(r)}{r} \right), \quad (2.1)$$

где V_0 — вертикальная компонента скорости на участке границы OA . При подсчете значения скорости последнее слагаемое в (2.1) исчезающе мало. Однако при подсчете скорости внутреннего вращения ω , а также скоростей проскальзываний на линиях скольжения $\gamma_{\theta r}$, $\gamma_{r\theta}$ это слагаемое становится существенным, так как локальная производная от $E(r)$ конечна и равна 1:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{V^0}{\sqrt{2}} \frac{1}{r}, \quad \gamma_{\theta r} = \omega - \frac{v_\theta}{r} = -\frac{V^0}{\sqrt{2}} \frac{E(r)}{r^2},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \omega = -\frac{V^0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{r} + \frac{E(r)}{r^2} \right).$$

Интересно отметить, что проскальзывание $\gamma_{\theta r}$ пропорционально актуальной бесконечно малой, но в точности нулю не равно. Точно так же нет полного совпадения скоростей на линии раздела решений OB . Это вполне естественно, но так как при переходе через эту линию скачком меняются геометрические параметры структурных элементов.

Проследим теперь логику вариационного описания упруго-пластического сдвига на языке функций со структурой. Предположим, что элементы структуры деформируются линейно упруго, а пластическая деформация макрообъема связана только с проскальзы-

ваниями между элементами структуры. Ограничимся одномерной задачей (см. рис. 12.1). Для профиля перемещений оставим прежнее обозначение

$$y(x) = \psi(x, E(x)).$$

Описание упругих деформаций проблем не вызывает. Упругий сдвиг γ_e определяется локальным углом наклона профиля. Значит,

$$\operatorname{tg} \gamma_e = \frac{dy(x)}{dx} = p(x, E(x)).$$

Поэтому, если μ — модуль сдвига, то упругую энергию макрообъема можно записать в виде следующего интеграла:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu p^2 dx.$$

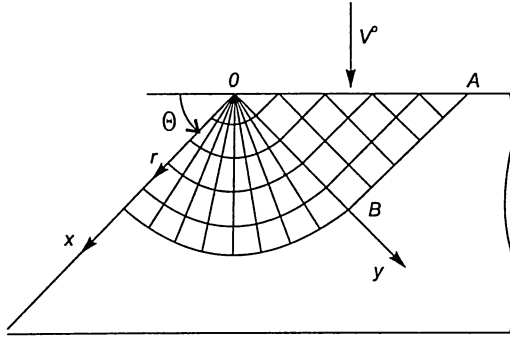


Рис. 12.4

Вопрос с пластическими деформациями и, следовательно, с диссипацией энергии сложнее. Проблема здесь состоит в следующем. Для реальной среды структурные элементы малы, но имеют конечные и вполне определенные размеры. Например, для сдвига, показанного на рис. 12.1, l_n необходимо заменить на $l_M = 1/M$, где M — достаточно большая, но вполне конкретная величина. Поэтому при заданном общем и упругом сдвиге на долю проскальзывания приходится величина, пропорциональная l_M :

$$S_M = \gamma_p l_M.$$

Здесь S_M — величина проскальзывания между реальными структурными элементами, l_M — их размер. Обе величины имеют размерность длины. По определению γ_p — это отношение S_M / l_M . Эта величина является безразмерной.

Обозначим через D диссипацию энергии на одном контакте. Ясно, что диссипация зависит от проскальзывания по этому контакту. Тогда общая диссипация энергии равна

$$\tilde{D}_M = \sum_{i=1}^M D(S_M). \quad (2.2)$$

Для того, чтобы придать сумме (2.2) вид (1.16), необходимо сделать два шага. Первый состоит в том, чтобы вынести величину l_M в качестве множителя.

Введем обозначение

$$\frac{D(S_M)}{l_M} = MD \left(\frac{\gamma_p}{M} \right) = U(\gamma_p). \quad (2.3)$$

Тогда

$$\tilde{D}_M = \sum_{i=1}^M U(\gamma_p) l_M. \quad (2.4)$$

Теперь необходимо добиться того, чтобы M можно было заменить на n , где допускается $n \rightarrow \infty$. Непосредственно в (2.3) это можно сделать только для тривиального случая, когда функция $D(S_M)$ линейна. Тогда в (2.3) величина M сокращается и можно считать $M \rightarrow \infty$. В общем случае примем, что функция $U(\gamma_p)$ по-прежнему определяется равенством (2.3), где M — фиксированная заданная величина. Равенство (2.4) можно интерпретировать как риманову сумму интеграла

$$\int_0^1 U(\gamma_p) dx. \quad (2.5)$$

Обычный континуальный подход состоит в замене суммы (2.4) на интеграл (2.5). Здесь поступим точнее, а именно сумму (2.4) будем рассматривать как M приближение соответствующей функции со структурой. Это означает, что сумма (2.4) заменяется на класс эквивалентных последовательностей

$$\tilde{D}_n = \sum_{i=1}^n U(\gamma_p) l_n.$$

Ясно, что

$$\frac{S_M}{l_M} = \frac{\psi(x_i, 0) - \psi(x_i, l_M)}{l_M} = \gamma_p(x_i).$$

Следовательно, можно принять

$$\gamma_p(x) = -\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial E} = -\psi_E(x, 0).$$

Теперь функционал энергии можно записать в следующей форме:

$$W_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu(x) p^2(x, E_n) dx + \sum_{i=1}^n l_n U(x, -\psi_E(x, 0)). \quad (2.6)$$

Здесь для общности введена неоднородность упругих и пластических свойств по x .

Посмотрим теперь, к каким результатам приведет условие стационарности этого функционала. Для функционала (2.6) уравнения (1.8), (1.17) примут вид

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)p] = 0, \quad \mu(x)p - U_{\gamma p}(x, -\psi_E) = 0, \quad \frac{d}{dE}[\mu(x)p(x, E)] = 0. \quad (2.7)$$

Через $U_{\gamma p}$ обозначена частная производная по γ_p . Первое равенство имеет смысл уравнения равновесия, второе — условия равенства касательных напряжений на контакте скольжения и внутри структурного элемента. Третье уравнение аналога в классическом аппарате не имеет.

Система (2.7) легко интегрируется. Из первого уравнения следует, что

$$\mu(x)p = \tau^0 = \text{const.}$$

Тогда второе уравнение становится конечным относительно ψ_E . Поэтому можно считать его решение известным

$$\psi_E(x, 0) = -\Gamma(\tau^0, x).$$

Будем искать решение в виде ряда

$$\psi(x, E) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)E + \alpha_2(x)E^2 \dots$$

Тогда

$$\alpha'_0 + \alpha_1 = \frac{\tau^0}{\mu(x)}, \alpha_1(x) = -\Gamma(\tau^0, x), \alpha'_1 + 2\alpha_2 = 0.$$

Отсюда окончательно получим

$$\psi(x, E) = y(x) = \int_0^x \left[\frac{\tau^0}{\mu} + \Gamma(\tau^0, x) \right] dx - \Gamma(\tau^0, x)E + \frac{\Gamma_x(\tau^0, x)}{2} E^2. \quad (2.8)$$

Как отмечалось, в задачах, где скачки функции дают свой вклад в функционал, краевые условия (1.11) автоматически не выполняются. На границах $F_p \neq 0$, поэтому $v = 0$. Это означает, что на границах должны быть заданы перемещения. При записи (2.8) использовалось условие $\psi(0, 0) = 0$. Второе условие на $\psi(1, 0)$ позволит определить постоянную τ^0 . Легко видеть, что найденный на основе вариационной формулировки профиль смещений удовлетворяет всем необходимым требованиям. Его локальная производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi(x, E(x))}{dx} = \frac{\tau^0}{\mu(x)} + \frac{\Gamma_{xx}}{2} E^2 + \Gamma_x E,$$

производная „в среднем“, или ∂ -производная

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, E(x))}{\partial x} = \frac{\tau^0}{\mu} + \Gamma - \Gamma_x E + \frac{\Gamma_{xx}}{2} E^2.$$

Появление с необходимостью последнего слагаемого в (2.8) является неожиданным. Его механический смысл так же, как и смысл последнего уравнения в (1.15) и (1.17) еще не ясны. Практически при подсчете численных значений той или иной функции со структурой величины E , Π заменяются нулями. Однако при подсчете производных бесконечно малая величина $E(x)$ дает вполне ощутимый конечный результат. Так в рамках построенной модели микромир проявляет себя в макромире.

Вернемся теперь к рис. 12.1. Легко видеть, что здесь поле скоростей u , v имеет вид

$$u = 0, v(x) = \gamma \cdot x - (\gamma - \gamma_e)E(x).$$

Отсюда

$$v^2(x) = \gamma^2 \cdot x^2 - 2\gamma(\gamma - \gamma_e)x \cdot E(x) + (\gamma - \gamma_e)^2 E^2(x).$$

Практически при подсчете значений $v^2(x)$ величины E и E^2 это нуль. Однако при вычислении первой и второй производных каждое из этих слагаемых даст свой конечный вклад.

В случае, когда пластический сдвиг элемента осуществляется по двум системам скольжения, разрывное поле скоростей имеет вид

$$u = \gamma y - (\gamma + \lambda)E(y), v = \lambda E(x).$$

Здесь упругий сдвиг принят равным нулю и параметр λ управляет балансом проскальзываний между горизонтальными и вертикальными площадками. Его механический смысл связан с микровращением элемента среды [129].

В заключение вернемся к примеру, который рассматривался вначале — функционалу (1.2). Для этого функционала уравнения (1.8) и (1.15) интегрируются и дают следующее решение:

$$y(x) = x^2 + (v(x) - 2x)E(x) + \left(1 - \frac{v'(x)}{2}\right)E^2(x) + C, \quad (2.9)$$

где слагаемое

$$C = \Pi \cdot [\alpha_0(x, \Pi) + \alpha_1(x, \Pi)E + \alpha_2(x, \Pi)E^2] + \alpha_3(x, \Pi)E^3 + \alpha_4(x, \Pi)E^4 + \dots$$

и α_0, α_1 — аналитические функции своих аргументов. Это слагаемое может быть отброшено. Решение (2.9) устроено следующим образом. В среднем ему соответствует парабола $\psi(x, 0, 0) = x^2$, локально же график состоит из отрезков с наклоном $v(x)$. Здесь все ясно. Однако появление с необходимостью в решении предпоследнего слагаемого, пропорционального $E^2(x)$, является неожиданным. Ситуация будет аналогичной и в более сложном случае, когда в функционал вводятся слагаемые, зависящие от величины разрывов.

§ 12.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ НОСИТЕЛЬ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Выше в качестве базисного объекта был введен элементарный носитель сильных разрывов $E(x)$. Аналогичным образом можно ввести также носитель слабых разрывов. Для этого есть следующие причины. Во-первых, к необходимости введения подобных объектов приводит сама логика развития теории. Действительно, функции со структурой характеризуются тем, что имеют сильные разрывы на микроуровне. Однако определенные интегралы от них имеют уже только слабые разрывы. Им соответствуют кривые, которые сами являются непрерывными, но в каждой точке имеют либо изломы, либо разрывы высших производных.

Во-вторых, необходимость в подобных объектах связана также с описанием траекторий движения фиксированных материальных частиц. Предположим, что частицы могут перемещаться через границы структурных элементов. Сами траектории будут всегда непрерывными. Однако при переходе от элемента к элементу траектории будут испытывать изломы. Таким образом, в дополнение к рассмотренным выше объектам необходимо ввести новые объекты, которым соответствуют непрерывные кривые, которые испытывают всюду изломы [131].

12.3.1. Элементарный носитель слабых разрывов

Введем пока условное обозначение

$$J(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x), \quad (1.1)$$

где $J(x)$ — элементарный носитель слабых разрывов, а $J = J_n(x)$ — соответствующее приближение $J(x)$. Какую конструкцию $J_n(x)$ можно было бы считать простейшей? Обратимся к описанию базисного элемента $E(x)$. Везде при численных расчетах величина $E(x)$ — это нуль. Поэтому примем, что и линия $J_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Далее, локальная производная от $E(x)$ равна тождественно 1. Для непрерывной функции наиболее близким к указанному будет следующее условие: локальная производная $J(x)$ равна ± 1 . Таким образом, приходим к конструкции, показанной на рис. 12.5,

$$J_n(x) = \begin{cases} \tau & \text{при } 0 \leq \tau < l_n / 2, \\ l_n - \tau & \text{при } l_n / 2 \leq \tau < l_n, \end{cases}$$

$\tau = x - x_i$ — локальная координата; $x_i = k / n$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — точки разрыва производной. Отсюда для производной имеем

$$J'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} J'_n(x),$$

$$J'_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 \leq x - x_i < l_n / 2, \\ -1 & \text{при } l_n / 2 \leq x - x_i < l_n. \end{cases}$$

Таким образом, графики функций $J_n(x)$ во всех точках x_i , $x_i + l_n / 2$ будут иметь изломы. Однако квадрат производной будет уже функцией гладкой и, более того, функцией, тождественно равной единице. Это обстоятельство открывает возможности использования алгебраических методов исследования.

При формулировке вариационных принципов и в других задачах появляется необходимость исследования функций, где в качестве аргумента выступают объекты $J(x)$ и $J'(x)$. Нетрудно показать, что любая функция от аргумента $J'(x)$ может быть сведена к линейной по $J'(x)$. Действительно, пусть имеет место разложение

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

с достаточным радиусом сходимости. Тогда

$$f(J'(x)) = (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)J'(x). \quad (1.2)$$

Здесь уместно такое сравнение. Результатом любых операций с комплексным числом является комплексное же число:

$$f(a + ib) = A + iB.$$

Это означает, что любая функция от мнимой единицы i сводится к линейной по i . Обратное заключение для (1.2) означает, что объект $J'(x)$ так же, как и мнимая единица, имеет природу числа. Введем для него специальное обозначение j . Тогда

$$J'(x) = j, j^2 = +1, j \neq +1, j \neq -1. \quad (1.3)$$

В теории гиперкомплексных чисел под двойной единицей понимается объект j , который отличен от $+1$ и -1 , но квадрат которого равен 1 [318]. Производная $J'(x)$ этим свойством как раз обладает. Следовательно, объект $J'(x)$ можно рассматривать как модель двойной единицы системы гиперкомплексных чисел.

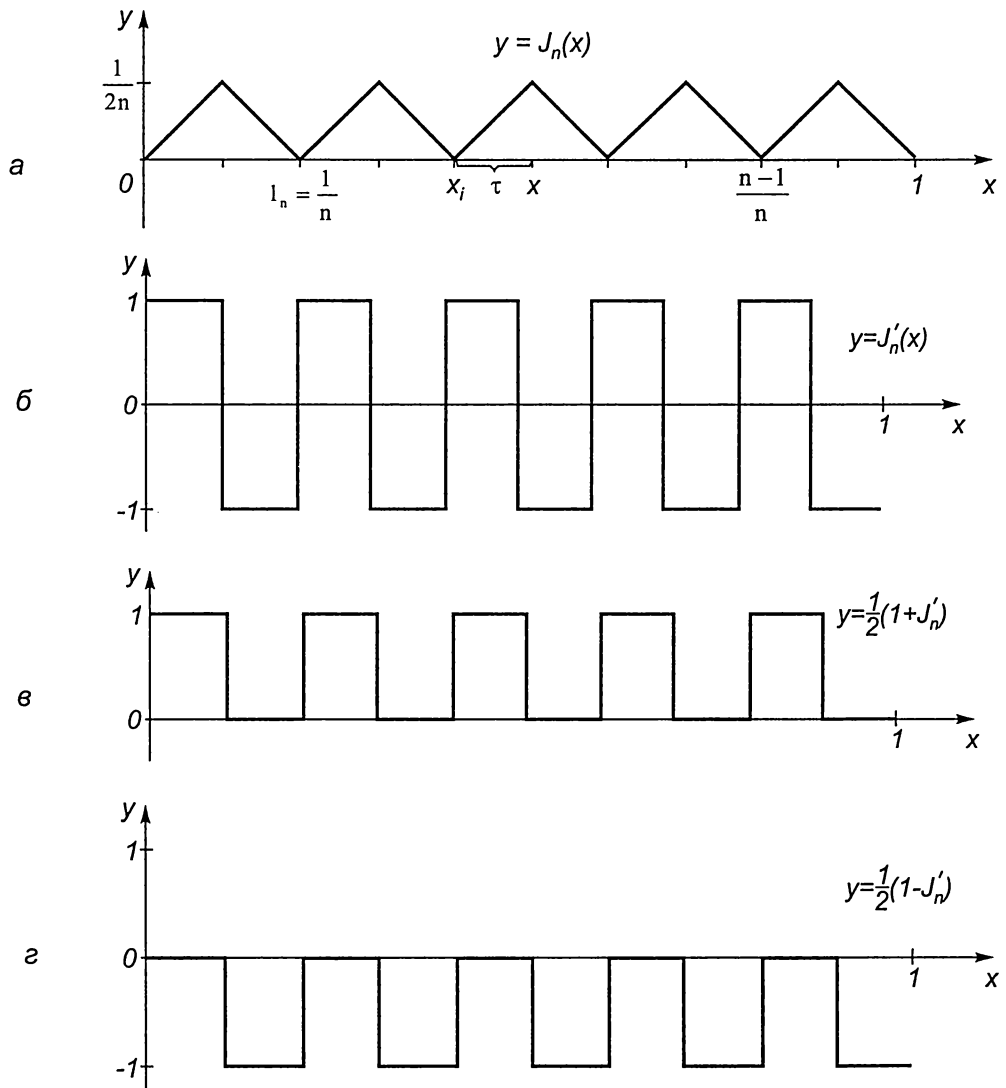


Рис. 12.5

12.3.2. Двойные действительные числа

Объекты вида $z = b_1 + b_2 j$, где b_1, b_2 — действительные числа, будем называть двойными действительными числами. В качестве первого шага получим аналог формулы Эйлера:

$$e^{j\alpha} = ch\alpha + jsh\alpha, \quad (2.1)$$

где α — действительная переменная.

Так как $ch^2\alpha = 1 + sh^2\alpha$, то представление вида (2.1) возможно только при $|b_1| > |b_2|$:

$$b_1 + b_2 j = \sqrt{b_1^2 - b_2^2} e^{j\alpha}, \quad th\alpha = \frac{b_2}{b_1}. \quad (2.2)$$

Если $|b_1| < |b_2|$, то умножением на j можно поменять местами b_1 и b_2 :

$$b_1 + b_2 j = \sqrt{b_2^2 - b_1^2} e^{j\beta}, \quad \text{th}\beta = \frac{b_1}{b_2}. \quad (2.3)$$

Полученные равенства показывают, что в различных частях плоскости тригонометрическое представление двойного числа дается различными формулами. По-видимому, должно существовать общее представление, которое не содержало бы никаких внешних условий типа неравенств. Поиск такого представления показывает, что оно возможно только при введении в формулу мнимой единицы $i, i^2 = -1$ (и это несмотря на то, что речь идет о представлении объекта, в котором фигурируют только обычные действительные числа и одна двойная единица $j, j^2 = +1$).

Есть еще одна причина необходимости введения мнимой единицы. На основе (2.1) можно вывести аналог формулы Муавра и дать алгоритм извлечения корней из двойных действительных чисел. Однако, эта операция выполняется далеко не для всех двойных чисел. Например, $j^2 = 1$ по определению, но двойного действительного числа \sqrt{j} не существует. В этом легко убедиться следующим образом: например, пусть:

$$\sqrt{j} = a + bj \Rightarrow a^2 + b^2 = 0, \quad 2ab = 1.$$

Модель (1.3) двойного числа объясняет причину отсутствия корня \sqrt{j} . Дело в том, что приближения $J'_n(x)$ на половине интервалов изменения x отрицательны. Следовательно, причина отсутствия \sqrt{j} в точности та же самая, по которой среди действительных чисел не существует $\sqrt{-1}$. Таким образом, обобщение на комплексные числа становится необходимым.

12.3.3. Двойные комплексные числа

Если b_1, \dots, b_4 — обычные действительные числа, то комбинацию

$$z = (b_1 + b_3 i) + (b_2 + b_4 i) j \quad (3.1)$$

будем называть двойным комплексным числом. Произведение ij к линейной комбинации i и j не сводится. Следовательно, числовая система (3.1) имеет четыре базисные „единицы“. В этом отношении она принадлежит к тому же классу, что и кватернионы. Однако в отличие от кватернионов здесь сохраняются все свойства операций сложения и умножения, которые имеют место для обычных комплексных чисел. Это — коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Таблица умножения имеет вид

$$i^2 = -1; j^2 = 1; k^2 = -1; k = ij = ji; kj = jk = i; ki = ik = -j.$$

Для объекта j есть определенная физическая модель (1.3). Это дает возможность продвинуться в построениях дальше, чем в [319, 320]. Нетрудно понять, что для вычисления обратного элемента имеет место формула

$$(a + bj)^{-1} = (a - bj)(a^2 - b^2)^{-1}.$$

Следовательно, деление невозможно на нуль ($a = 0, b = 0$) и числа вида $a^2 = b^2$ (назовем их квазинулями). Квазинули во многом похожи на обычный нуль. Например, если квазинуль умножить на любое число, то в результате получим квазинуль. Природу квазинулей можно понять, если обратиться к модели (1.3). Рассмотрим два характерных квазинуля

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j, j_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j, \\ j_1^2 &= j_1, j_2^2 = j_2, j_1j_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

На рис. 12.5 показаны графики соответствующих приближений. Видно, что на половине интервалов приближения j_1 равны нулю. Поэтому запрет деления на j_1 имеет ту же природу, что и запрет деления на обычный нуль. Аналогично на другой половине интервалов приближения j_2 равны нулю. Поэтому произведение приближений j_1j_2 равно нулю всюду. Следовательно, квазинули являются делителями нуля. Модель (1.3) показывает, что природа равенства $j_1j_2 = 0$ та же, что и природа обычного равенства $0a = 0$, где a — любое число.

Дальнейшие выкладки будут неизмеримо проще, если вместо базисных элементов $(1, j)$ взять пару (j_1, j_2) . Это связано с тем, что в базисе (j_1, j_2) имеет место равенство

$$f(xj_1 + yj_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xj_1 + yj_2)^k = f(x)j_1 + f(y)j_2, \quad (3.3)$$

где $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Для комплексных чисел, как известно, большую роль играет понятие модуля и представление числа в тригонометрической форме. Каким должно быть естественное определение модуля двойного комплексного числа и тригонометрическая форма его записи? Технически решение данной задачи сводится к следующему: по заданным четырем действительным числам b_1, \dots, b_4 найти четыре действительных числа β_1, \dots, β_4 так, чтобы выполнялось равенство:

$$b_1 + b_2j + b_3i + b_4ij = e^{\beta_1 + \beta_2j + \beta_3i + \beta_4ij}. \quad (3.4)$$

Из условия (3.4) можно получить трансцендентную систему уравнений. Все построения будут качественно проще, если исходить из числовой системы в базисе (3.2). Пусть

$$z = (a_1 + a_2i)j_1 + (a_3 + a_4i)j_2 = e^{(\alpha_1 + \alpha_2i)j_1 + (\alpha_3 + \alpha_4i)j_2}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.3), правую часть (3.5) можно записать таким образом:

$$z = e^{\alpha_1 + \alpha_2i} j_1 + e^{\alpha_3 + \alpha_4i} j_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 + a_2i &= e^{\alpha_1 + \alpha_2i}, a_3 + a_4i = e^{\alpha_3 + \alpha_4i}, \alpha_1 = \ln \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \alpha_3 = \ln \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \sin \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \cos \alpha_4 = \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}, \sin \alpha_4 = \frac{a_4}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Перейдем в (3.5) к форме (3.4). В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{a_2 + a_4}{2}i + \frac{a_1 - a_3}{2}j + \frac{a_2 - a_4}{2}ij = \\ & = \exp \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}i + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}j + \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}ij \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С модулем двойного комплексного числа естественно связать действительную часть полученного представления:

$$\begin{aligned} |(a_1 + a_2i)j_1 + (a_3 + a_4i)j_2| &= e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}} = \sqrt[4]{(a_1^2 + a_2^2)(a_3^2 + a_4^2)}, \\ |b_1 + b_2j + b_3i + b_4ij| &= \sqrt[4]{[(b_1 + b_2)^2 + (b_3 + b_4)^2][(b_1 - b_2)^2 + (b_3 - b_4)^2]}. \end{aligned}$$

Введенное определение удовлетворяет условию нормированности: для произвольных z_1, z_2 имеем:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

В (3.7) содержатся формула Эйлера и ее ближайшие аналоги:

$$\begin{aligned} e^{1\alpha} &= ch\alpha + lsh\alpha, \quad e^{j\alpha} = ch\alpha + jsh\alpha, \\ e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad e^{ij\alpha} = \cos\alpha + ij\sin\alpha. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В этой формуле содержится тригонометрическое представление и чисто действительного двойного числа.

Пусть $a_2 = a_4 = 0$. Тогда из (3.6) и (3.7) следует что

$$b_1 + b_2j = \sqrt{|b_1^2 - b_2^2|} \cdot \exp \left[\ln \sqrt{\left| \frac{b_1 + b_2}{b_1 - b_2} \right|} j + \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}i + \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}ij \right], \quad (3.9)$$

где

$$\cos\alpha_2 = \frac{b_1 + b_2}{|b_1 + b_2|}, \quad \cos\alpha_4 = \frac{b_1 - b_2}{|b_1 - b_2|}.$$

Таким образом, формула (3.9) объединяет обе формулы (2.2) и (2.3) и не предполагает никаких ограничений типа неравенств. Это стало возможным благодаря введению в показатель мнимой единицы.

Перейдем теперь к некоторым вопросам теории функции двойного комплексного переменного. Пусть

$$w(z) = u_1 + u_2j + u_3i + u_4ij, \quad z = x_1 + x_2j + x_3i + x_4ij,$$

и $\Delta z \rightarrow 0$ вдоль оси Ox_k , $k = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = w'_k = \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial u_2}{\partial x_k}j + \frac{\partial u_3}{\partial x_k}i + \frac{\partial u_4}{\partial x_k}ij.$$

Функция $w(z)$ будет аналитической, если выполняется цепочка следующих равенств:

$$w'_1 = w'_2, w'_1 = w'_3, w'_1 = w'_4. \quad (3.10)$$

Из первых двух равенств следует, что

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_3^2} = 0, \quad s = 1 \div 4. \quad (3.11)$$

С переменными x_1, x_2, x_3, x_4 связаны обычная и три мнимые единицы $1, i, j, ij$. Фигурально можно сказать, что во время преобразований (3.10) они „сталкиваются“ между собой и в каком-то смысле „меряются силами“. Из (3.11) видно, что столкновение 1 и i дает уравнение Лапласа (эллиптичность), а 1 и j — волновое уравнение (гиперболичность). Поэтому можно ожидать, что такие же результаты даст взаимодействие j и ij ($w'_2 = w'_4$), а также i и ij ($w'_3 = w'_4$). Выкладки это подтверждают.

Теперь самый интересный вопрос. Что будет, если „столкнуть“ мнимую единицу i с двойной единицей j ? Оказывается, что результат будет точно таким же, как если бы i взаимодействовала не с j , а с обычной действительной единицей. Поэтому можно сказать, что двойная единица j отличается от 1 не так радикально, как i . По крайней мере, с точки зрения i объекты 1 и j выглядят практически одинаково. Точно такой же вывод можно сделать, если с этой точки зрения сравнить между собой формулу Эйлера и ее аналог для $j, (ij)$ — формулы (3.8).

Общее представление аналитической функции удобнее дать в базисе (j_1, j_2) :

$$\begin{aligned} z &= z_1 j_1 + z_2 j_2, \quad z_1 = y_1 + y_2 i, \\ z_2 &= y_3 + y_4 i, \quad w(z) = \Phi_1(z_1) j_1 + \Phi_2(z_2) j_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= v_1(y_1, y_2) + i v_2(y_1, y_2), \\ \Phi_2(z_2) &= v_3(y_3, y_4) + i v_4(y_3, y_4) \end{aligned}$$

должны быть аналитическими функциями своих аргументов в обычном смысле теории функции комплексного переменного. Это обстоятельство открывает возможность построения всей теории по аналогии с классической.

12.3.4. Многомерные числовые системы

Итак, выше построена числовая система, которая основана на четырех единицах. Ее можно рассматривать как ближайшее обобщение системы комплексных чисел. Естественно поставить вопрос, возможны ли на этом пути дальнейшие обобщения? Хорошо известно, что для комплексных чисел, если требовать, чтобы каждый элемент, кроме нуля, имел обратный, возможности обобщений весьма ограничены [318, 321, 322]. С другой стороны, модель (1.3) показывает, что элементы, отличные от нуля, и тем не менее не имеющие обратных, появляются естественным образом и имеют вполне ясный смысл. На этом пути возможны обобщения на базис любой размерности. Причем во всех системах сохраняются все основные свойства поля комплексных чисел.

Рассмотрим вначале трехмерный случай. Выше двойные комплексные числа можно было представить, как $z = a + bj$, где a и b — обычные действительные или комплексные

числа, а j — новый элемент, для которого $j^2 = 1, j \neq \pm 1$. Аналогично в трехмерном случае запишем

$$z = a + bj + ck, \quad (4.1)$$

где a, b, c — обычные действительные или комплексные числа, а j, k — новые элементы. Будем искать числовую систему, максимально близкую к системе комплексных чисел. То есть потребуем, чтобы в этой системе выполнялись все свойства операций сложения и умножения, которые имеют место в системе комплексных чисел. Пусть, по-прежнему, $i^2 = -1, j^2 = +1$ и произведение ij к линейной комбинации i и j не сводится. Примем, что $k^2 = +1$ и произведение ik к линейной комбинации i, j и k также не сводится. Элемент k будем называть второй двойной единицей (отличной от двойной единицы j). Теперь необходимо решить вопрос о произведении двух двойных единиц j и k . Есть только один вариант, который позволяет сохранять все основные свойства поля комплексных чисел. Этот вариант сводится к следующему: произведение jk новый элемент не дает и должно сводиться к следующей линейной комбинации этих же единиц:

$$jk = j + k - 1.$$

Таким образом получается замкнутая таблица умножения, которая позволяет определить все операции в системе чисел (4.1). Так, можно показать, что

$$z^{-1} = A + Bj + Ck,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} \right), \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a-b+c} \right), \\ C &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b-c} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что не все элементы имеют обратные. Во-первых, обратного элемента нет у нуля: $z = 0$. Но, кроме того, есть и другие особые элементы, которые не имеют обратных. Будем их называть, как и в двумерном случае, квазинулями. Для квазинуля хотя бы один из знаменателей в выражении (4.2) обращается в нуль. Например, квазинулями будут числа:

$$j_1 = \frac{1}{2}(j+k), j_2 = \frac{1}{2}(1-k), j_3 = \frac{1}{2}(1-j). \quad (4.3)$$

Все квазинули можно описать таким образом. Введем трехмерное пространство с базисом (4.3). Точки этого пространства

$$z = A_1 j_1 + A_2 j_2 + A_3 j_3 \quad (4.4)$$

представляют образы чисел (4.1) (коэффициенты A_1, A_2, A_3 являются обычными комплексными или действительными числами). Тогда все квазинули будут располагаться на координатных плоскостях $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$. Представление (4.4) можно рассматривать как исходное, заменяющее представление (4.1). Систему чисел (4.4) можно назвать распадающейся. Для нее таблица умножения имеет вид:

$$j_1^2 = j_1, j_2^2 = j_2, j_3^2 = j_3, \\ j_1 j_2 = j_1 j_3 = j_2 j_3 = 0.$$

Это приводит к обобщению на трехмерный случай всех полученных выше результатов для двойных комплексных чисел. Например,

$$z^{-1} = \frac{1}{A_1} j_1 + \frac{1}{A_2} j_2 + \frac{1}{A_3} j_3, \\ \exp(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3) = e^{\alpha_1} j_1 + e^{\alpha_2} j_2 + e^{\alpha_3} j_3. \quad (4.5)$$

Соответствие между записью чисел в формах (4.1) и (4.4) дается соотношениями:

$$A_1 = a + b + c, A_2 = a + b - c, A_3 = a - b + c, \\ a = \frac{A_2 + A_3}{2}, b = \frac{A_1 - A_3}{2}, c = \frac{A_1 - A_2}{2}. \quad (4.6)$$

Теперь следующий вопрос: как определить понятие модуля для чисел вида (4.1) или (4.4)? Что такое модуль обычного действительного числа x ? Можно сказать, что $|x|$ — это расстояние от точки x до особого числа, у которого нет обратного, то есть до числа 0. Точно такой же смысл имеет и модуль комплексного числа. Обратимся теперь к двойным числам $z = x_1 j_1 + x_2 j_2$. Ясно, что модуль $|x_1|$ характеризует близость z к квазиулю $x_1 = 0$, а модуль $|x_2|$ — близость к квазиулю $x_2 = 0$. Поэтому величина

$$|z| = \sqrt{|x_1| |x_2|}$$

дает общую характеристику близости z к обоим квазиулям (а значит, и к нулю). Поэтому равенство $|z| = 0$ означает, что z совпадает либо с нулем, либо с одним из двух квазиулей.

В трехмерном случае есть три линейно независимых квазиуля. Можно было бы ожидать, что модуль числа в этом случае будет отражать близость к этим квазиулям, например $\sqrt[3]{|x_1 x_2 x_3|}$. Такая гипотеза предполагает, что трехмерное пространство в этом отношении изотропно. (На том основании, что комплексные и двойные комплексные пространства в этом отношении были изотропными). Однако вычисления показывают, что пространства большей размерности являются существенно анизотропными (конечно, только в рассматриваемом здесь смысле). Это видно из следующего. Перепишем вторую формулу (4.5) с учетом (4.6):

$$z = a + bj + ck = e^{\alpha + \beta j + \gamma k},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln(a + b - c)(a - b + c), \\ \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{a + b + c}{a - b + c}, \\ \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{a + b + c}{a + b - c}.$$

С модулем z естественно связать действительную часть представления z в тригонометрической форме. Тогда приходим к следующему определению

$$|a + bj + ck| = \sqrt{|(a + b - c)(a - b + c)|},$$

$$|A_1 j_1 + A_2 j_2 + A_3 j_3| = \sqrt{|A_2 A_3|}.$$

В этом определении степень близости до квазиула $A_1 = 0$ полностью игнорируется.

Перейдем теперь к общему многомерному случаю. Пусть $k_1 = 1$ — обычная действительная единица; k_2, \dots, k_n — различные двойные единицы, т. е.

$$k_1 = 1, k_2^2 = 1, k_3^2 = 1, \dots, k_N^2 = 1.$$

Оказывается, что в общем случае можно удовлетворить всем требованиям к операциям сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность), если сделать следующие предположения. Все двойные единицы являются линейно независимыми между собой. Произведение каждой из двойных единиц на мнимую единицу i дает новый базисный элемент. Однако произведение двух двойных единиц нового элемента уже не дает. При этом таблицу умножения необходимо задать в следующем виде:

$$k_m k_n = k_m + k_n - 1, m, n = 2, 3, \dots, N, m \neq n.$$

Таким образом приходим к системе чисел

$$z = a_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots + a_N k_N$$

с естественным определением всех операций. Число z будем называть квазиулом, если z не равно нулю и выполняется хотя бы одно из равенств:

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_N = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N, \\ A_2 &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} - a_N, \\ &\dots \\ A_N &= a_1 - a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3-N}{2} A_1 + \frac{A_2 + \dots + A_N}{2}, \\ a_2 &= \frac{A_1 - A_N}{2}, \dots, a_N = \frac{A_1 - A_2}{2}. \end{aligned}$$

Для всех чисел z , отличных от 0 и квазиулов, имеем:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{3-N}{2} \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \dots + \frac{1}{A_N} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_N} \right) k_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_{N-1}} \right) k_3 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) k_N. \end{aligned}$$

Структура коэффициентов подсказывает переход к более удобному базису. Пусть

$$j_1 = \frac{3-N}{2} + \frac{k_2 + k_3 + \dots + k_N}{2}, j_2 = \frac{1}{2} - \frac{k_N}{2},$$

$$j_3 = \frac{1}{2} - \frac{k_{N-1}}{2}, \dots, j_N = \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2}.$$

Обратные соотношения имеют вид

$$k_1 = 1 = j_1 + j_2 + \dots + j_N, k_2 = 1 - 2j_N,$$

$$k_3 = 1 - 2j_{N-1}, \dots, k_N = 1 - 2j_2.$$

Таблица умножения имеет вид

$$j_1^2 = j_1, \dots, j_N^2 = j_N; j_m j_n = 0, m, n = 1, \dots, N, m \neq n.$$

Отсюда следует, что

$$z = a_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots + a_N k_N = A_1 j_1 + A_2 j_2 + \dots + A_N j_N,$$

где коэффициенты связаны равенствами (4.7). Для сокращения записей ограничимся случаем действительных a_1, \dots, a_N . Тогда

$$e^{\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \dots + \alpha_N j_N} = e^{\alpha_1 j_1} + \dots + e^{\alpha_N j_N},$$

$$A_1 j_1 + \dots + A_N j_N = M \exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_N}{2} k_2 + \dots + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} k_N\right),$$

где

$$\alpha_1 = \ln A_1, \dots, \alpha_N = \ln A_N,$$

$$M = \exp\left(\frac{3-N}{2} \alpha_1 + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_N}{2}\right) = \sqrt{A_1^{3-N} A_2 A_3 \dots A_N}.$$

Таким образом, приходим к следующему естественному определению модуля:

$$|z| = |A_1 j_1 + \dots + A_N j_N| = \sqrt{|A_1^{3-N} A_2 A_3 \dots A_N|}.$$

Структура формулы является весьма неожиданной и чрезвычайно интересной. Рассмотрим двухмерное пространство, $N = 2$. Тогда

$$|z| = \sqrt{|A_1 A_2|}.$$

Это полностью симметричная ситуация. Случай $N = 3$ тоже выделяется из общего ряда. Здесь, как уже отмечалось, компонента A_1 из выражения для модуля выпадает

$$|z| = \sqrt{|A_2 A_3|},$$

но, по-прежнему, с модулем можно ассоциировать определенную квадратичную форму. Переход к четырехмерному пространству дает качественно новый результат:

$$|z| = \sqrt{\left| \frac{A_2 A_3 A_4}{A_1} \right|}.$$

Здесь выражение для модуля становится сингулярным, характер анизотропии меняется принципиально, и квадратичная форма исчезает. Пространства большей размерности относятся к тому же типу, что и четырехмерное пространство.

Какое место занимает построенная числовая система в ряде известных систем? Этот ряд открывается полем действительных и комплексных чисел. Они лежат в основе математического аппарата механики твердого тела. Хорошо известны их обобщения — это кватернионы и октавы [318, 321, 322]. Менее известна теория пространственной комплексной переменной [319]. В настоящее время разработаны алгоритмы построения более сложных алгебраических систем. К ним прежде всего следует отнести процедуру удвоения и способ построения алгебр Клиффорда [321, 322]. На этом пути можно получить множество различных алгебраических систем. Однако исследовать все варианты практически невозможно. Поэтому важными становятся критерии выбора. Наиболее ясным и бесспорным является критерий, связанный с потребностями в приложениях [170—172]. Возможность приложений дает основания для разработки той или иной теории. Кроме того, приложения во многом определяют и необходимую степень развития самой теории.

Рассмотренная выше система возникла именно на этом пути. Эта система того же класса, что и кватернионы. Она основана на четырех единицах: одной обычной действительной единице и трех мнимых. В ней удалось сохранить все свойства комплексных чисел, кроме отсутствия делителей нуля (квазинулей). В системе кватернионов ситуация противоположная. В ней нет делителей нуля, однако нет и коммутативности умножения. Вне физической модели дать оценку подобным фактам невозможно. Действительно, какие свойства системы следует считать желательными, а какие — нет; можно ли считать равноценным сохранение у системы коммутативности умножения, с одной стороны, и появление делителей нуля, с другой стороны, или нет и т. д. Физическая модель все подобные вопросы снимает. Так, модель двойной единицы приводит к естественной интерпретации квазинулей. Она показывает, что запрет деления на квазинуль имеет ту же природу, что и запрет деления на обычный ноль. Это дает основание считать построенную систему более близкой к полю комплексных чисел, чем кватернионы.

12.3.5. Дифференциальные уравнения

Выше функции со структурой вводились таким образом, чтобы для них можно было использовать все возможности классического аппарата. Однако при решении конкретных задач возникает ряд новых моментов, связанных исключительно с наличием структуры. Начнем с примера задачи, наиболее близкой к традиционной [132].

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение $y'(x) = y$ в классе функций со структурой

$$\frac{dF(x)}{dx} = F(x). \quad (5.1)$$

Здесь d/dx полная (то есть локальная) производная. В классе обычных функций решением задачи является экспонента и произвол сводится только к одной постоянной. Пусть теперь

$$F(x) = p(x, J) + jg(x, J), \quad (5.2)$$

где по-прежнему p, g — гладкие функции своих аргументов. Подставим (5.2) в (5.1) и воспользуемся формулой

$$\frac{d}{dx} p(x, J(x)) = \frac{\partial p(x, J)}{\partial x} + j \frac{\partial p(x, J)}{\partial J}.$$

В результате получим два уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial J} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial J} + \frac{\partial g}{\partial x} = g. \quad (5.3)$$

Таким образом, задача свелась к решению обычной системы двух уравнений в частных производных. Классическому решению — экспоненте — соответствует частное решение этой системы при $g(x, J) \equiv 0$ или $p(x, J) \equiv 0$. Рассмотрим общий случай. Для этого разложим p и g в ряды по J и подставим их в (5.3). В результате получим цепочку рекуррентных уравнений, решения которых приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} p(x, J) &= e^x \left[\varphi(x) - \psi'(x)J + \frac{\varphi''}{2!}J^2 - \frac{\psi'''}{3!}J^3 + \frac{\varphi^{(4)}}{4!}J^4 \dots \right], \\ g(x, J) &= e^x \left[\psi(x) - \varphi'(x)J + \frac{\psi''}{2!}J^2 - \frac{\varphi'''}{3!}J^3 + \frac{\psi^{(4)}}{4!}J^4 \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Решение зависит от двух произвольных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые определяют вид кривых p и g в среднем:

$$p(x, 0) = e^x \varphi(x), \quad g(x, 0) = e^x \psi(x).$$

Если принять, что φ и ψ — многочлены, то их степень определит и степень отклонения решения от классического. Как отмечалось, если $g \equiv 0$, то равенства (5.3) в классе функций $p(x, J)$ невозможно. Иными словами, уравнение

$$\frac{d}{dx} p(x, J(x)) = p(x, J(x)) \quad (5.5)$$

может иметь только классическое гладкое решение, в котором нет зависимости от $J(x)$. Однако, если в формулах (5.4) положить $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, то получим, что $g(x, J) \equiv p(x, J)$ и уравнение (5.1) примет следующий вид

$$(1 + j) \frac{d}{dx} p(x, J) = (1 + j) p(x, J). \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) имеет решение (5.4), которое не совпадает с классическим. На первый взгляд это противоречит утверждению о том, что для уравнения (5.5), (оно отличается от (5.6.) сокращением на множитель $(1 + j)$), возможны только классические решения. Парадокса здесь, однако, нет. Все дело в том, что $(1 + j)$ — это не обычная константа, а делитель нуля:

$$1 - j^2 = (1 + j)(1 - j) = 0.$$

Поэтому „просто так“ сокращать и домножать обе части равенств на константу $(1+j)$ нельзя. Техника обращения с делителями нуля достаточно проста. Если A и B — обычные действительные числа и $A(1+j) = B(1+j)$, то отсюда следует, что и $A = B$. То есть в данном случае сокращение на $(1+j)$ допускается. Если же $A = A_1 + jA_2$; $B = B_1 + jB_2$, то из указанного выше равенства следует только, что $A_1 + A_2 = B_1 + B_2$. Следовательно, сокращение на множитель $(1+j)$ недопустимо. В уравнении (5.6) реализуется именно такой случай. Таким образом, (5.6) представляет собой промежуточный случай между классическим уравнением (5.5) и общим уравнением (5.1).

Аналогично можно показать, что в классе функций $F(x) = \varphi(x, E)$ решение уравнения (5.1) имеет вид

$$F(x) = \varphi(x, E) = e^x \left[f(x) - \frac{f'(x)}{1!} E + \frac{f''(x)}{2!} E^2 - \frac{f'''(x)}{3!} E^3 + \dots \right],$$

где $f(x)$ — произвольная функция.

Таким образом, задача (5.1) сводится к системе уравнений в частных производных, которая может быть исследована обычными методами математической физики.

Рассмотренный пример показывает, что функции со структурой обладают неизмеримо большим многообразием свойств, чем обычные функции. Интересно отметить, что расширение запаса функций с (4.1) до (6.8) §12.1 существенно расширяет и диапазон свойств функций со структурой.

Рассмотрим одно из таких свойств. Для функций со структурой вида (4.1) §12.1 производная „в среднем“ совпадала с частной производной по x . Для (6.8) §12.1 это, вообще говоря, не так. Нетрудно построить пример, когда функция со структурой будет тождественно равна нулю, локальная ее производная также будет равна нулю, однако производная в смысле (4.3) § 12.1 будет отлична от нуля. Пусть

$$F(x) = \Pi \sin 2\pi \frac{x - E(x)}{\Pi}. \quad (5.7)$$

Тогда $F(x) \equiv 0$, $\frac{d}{dx} F(x) \equiv 0$, $\frac{\partial F(x)}{\partial x} \equiv 2\pi$.

Здесь все дело в том, что производная в среднем должна предполагать не вообще бесконечно малое приращение аргумента, а бесконечно малое, равное актуальной бесконечно малой величине Π . Поэтому для объектов (6.8) §12.1 производная в среднем должна быть определена таким образом:

$$\frac{DF(x)}{Dx} = \frac{\psi(x + \Pi, E, \Pi) - \psi(x, E, \Pi)}{\Pi} = \lambda(x, E, \Pi). \quad (5.8)$$

Видно, что в примере (5.7) производная в смысле (5.8) будет тождественно равна нулю. Операцию поиска ψ по заданной функции λ , можно назвать D -интегрированием. Технически эта операция сложнее, чем интегрирование, рассмотренное в § 12.1.

Будем искать ψ в виде ряда

$$\psi = k_0(x, E) + k_1(x, E)\Pi + k_2(x, E)\Pi^2 + \dots \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8) и переходя к обычному пределу при $\Pi \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial k_0(x, E)}{\partial x} = \lambda(x, E, 0).$$

Специфика аргумента E в данном случае никакой роли не играет. Поэтому функция $k_0(x, E)$ определяется обычным интегрированием $\lambda(x, E, 0)$ по x . Таким образом, нулевой коэффициент с точностью до произвольной функции $C_0(E)$ можно считать известным. Перенесем его в правую часть, разделим выражение на Π и устремим Π к 0. В результате получим

$$\frac{\partial k_1(x, E)}{\partial x} = \lambda_1(x, E, 0),$$

где

$$\lambda_1(x, E, \Pi) = \frac{1}{\Pi} \left[\lambda(x, E, \Pi) - \frac{k_0(x + \Pi, E) - k_0(x, E)}{\Pi} \right].$$

Отсюда можно найти k_1 и т. д. Таким образом, для функций со структурой типа (6.8) §12.1 производные могут рассматриваться в разных смыслах. В соответствии с этим, можно рассматривать и различные виды дифференциальных уравнений.

Итак, объект $E(x)$ предназначен для описания скачков функций на микроуровне, а объект $J(x)$ — для описания слабых разрывов функций. При дифференцировании $J(x)$ получаются функции, которые имеют сильные разрывы, сравнимые с величиной самих функций. Например, выражение (5.2) приводит к функции, график которой колеблется между двумя кривыми $y = p(x, 0) \pm g(x, 0)$. Оказывается, что подобные функции имеют смысл не только как производные каких-то „более приличных“ функций, но представляют интерес и сами по себе.

В главе 7 были описаны вихревые структуры, которые возникают при сложном нагружении вязко-пластических сред. При переходе от вихря к вихрю вектор скорости вращения меняется скачком на конечную величину (в одномерной цепочке без проскальзывания — меняет знак на противоположный). В [132] приведен пример использования двойной единицы j для описания кинематики одномерной цепочки вихрей, а также для суммирования расходящихся рядов. Например, в соответствии с принятым определением

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1 + j}{2}.$$

Кроме этого, получена формула $e^{\pi i \omega} = -j$, которая связывает числа e , π , мнимую и двойную единицы i , j с актуальной бесконечно большой величиной нестандартного анализа $\omega = 1 / \Pi$.

§ 12.4. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕНИ ЗНАЧИМОСТИ ГИПОТЕЗ, ПРИНИМАЕМЫХ В МОДЕЛЯХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Подводя итог, можно сказать, что общее направление рассмотренных выше исследований связано с ослаблением требований на гладкость функций, которые фигурируют в моделях сплошных сред. Ясно, что это не единственно возможный путь развития теории.

В связи с этим возникает вопрос: можно ли дать количественную характеристику значимости тех или иных гипотез, которые вводятся в теорию? Изучение этого вопроса представляет интерес прежде всего для оценки различных обобщений существующих теорий. Кроме того, полученные характеристики позволяют яснее представить требования, которые должны предъявляться к степени обоснованности каждой из принимаемых гипотез. Очевидно, что чем большую роль играет данная гипотеза в теории, тем более тщательно обоснованию она должна подвергаться.

Фигурально выражаясь, можно сказать, что путь построения любой теории — это путь от полной или почти полной неопределенности, которая есть в исходном состоянии, к состоянию, в котором достигнута полная определенность. Каждое из принятых предположений представляет собой определенный шаг в построении теории. Поэтому поставленная задача сводится к оценке „длины“ каждого из подобных шагов. Так как цель любой теории состоит в уменьшении степени исходной неопределенности, то оценка ее отдельных составляющих должна делаться на языке теории информации.

Основная трудность решения поставленной задачи связана с тем, что здесь необходимо иметь дело с бесконечностью. Например, если для профиля скоростей $y = f(x)$ задается краевое условие $f(0)$, то этим выбирается только один из бесконечного числа возможных вариантов. То же самое относится и к уравнениям, начальным условиям, а также к большинству других этапов построения теории. Иными словами, каждый шаг, который делается в теории, формально дает бесконечно большую информацию. Поэтому попытки дать количественную оценку таких шагов приводит к необходимости оперирования с бесконечностью.

Классическим методом исследования бесконечности является теоретико-множественный. Поэтому применим вначале этот метод [132, 134].

12.4.1. Характеристики, основанные на понятии мощности бесконечного множества

Напомним определение одного из фундаментальных понятий теории множеств. Пусть у нас есть два множества, каждое из которых состоит, например, из 5 элементов. Иными словами, в распоряжении есть 10 индивидуальных, различных элементов. Очевидно, что эти элементы можно распределить по парам так, что в каждой паре будет по одному представителю от каждого из множеств. Если бы множества содержали различное число элементов, то подобное соответствие (взаимно-однозначное соответствие) установить было бы уже нельзя. Указанный способ сравнения распространяется на бесконечные множества. На этой основе вводятся понятия эквивалентности и мощности множества [323—325]. Последнее понятие служит количественной характеристикой бесконечных множеств и обобщает понятие числа элементов в конечном множестве.

Применим указанную характеристику для решения поставленной задачи. Рассмотрим вначале случай, когда цель теории состоит в том, чтобы дать описание некоторого процесса, причем все описание можно свести к определению одной скалярной функции одного скалярного аргумента: $y = f(x)$, $x \in [0, 1]$. Мощность множества всевозможных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, равна f . Введем теперь гипотезу 1° , а именно, предположим, что функция $y = f(x)$ является непрерывной. Множество всех непрерывных функций имеет мощность континуума C , причем $f < C$. Известно, что $f = 2^C$.

Когда речь идет о конечном числе возможных состояний системы, то в качестве меры информации используется логарифм от числа состояний. Точнее, считается, что информация о том, что реализовалось одно из N равновероятных состояний, равна [326]

$$J = \ln N. \quad (1.1)$$

Распространим определение (1.1) на бесконечные множества. Для этого наряду с символами f и C будем рассматривать символы $\ln f$ и $\ln C$. При этом символ $\ln f$ отождествим с C . Иными словами, равенство $\ln f = C$ примем по определению. В качестве „основания“ можно сослаться на то, что для конечных чисел всегда $\ln 2^k = k$.

Таким образом, можно сказать, что исходная неопределенность задачи имеет количественную характеристику, равную $J_0 = C = \ln f$. После принятия первой гипотезы неопределенность уменьшается с $J_0 = C$ до $J_1 = \ln C$. Следовательно, значимость первой гипотезы можно охарактеризовать разностью (точнее, символом)

$$h_{01} = C - \ln C \quad (1.2)$$

или отношением (символом) $C/\ln C$.

Усилим теперь первую гипотезу и будем считать, что функция $f(x)$ является не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой. Легко видеть, что характеристики, основанные на понятии мощности, на это усиление никак не отреагируют. Оценка значимости гипотезы, по-прежнему, будет иметь вид (1.2).

Перейдем теперь к гипотезе 2° и предположим, что дополнительно стало известно, что функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y$. Ясно, что степень неопределенности, измеряемая в терминах мощности, на вторую гипотезу также никак не отреагирует. Иными словами, с этой точки зрения „ценность“ обеих гипотез 1° и 2° будет точно такая же, как и „ценность“ только одной гипотезы 1°.

Принятие краевого условия (гипотезы 3°), например, $f(0) = 1$ меняет ситуацию качественно. Все вместе гипотезы 1°–3° устраняют исходную неопределенность полностью: теперь функция $f(x)$ определена однозначно: $f(x) = e^x$. Таким образом, общая ценность гипотез 1°–3° может быть охарактеризована как

$$h_{03} = C = \ln f.$$

Предположим теперь, что некоторый процесс описывается функцией, зависящей от двух пространственных переменных. Хорошо известно, что двумерные задачи, которые здесь возникают, качественно сложнее, чем одномерные. Однако теоретико-множественные оценки и на такое усложнение никак не реагируют. Если, следуя [171], теорию сравнить с телескопом или микроскопом, то можно сказать, что теории, основанной на понятии мощности, соответствует именно телескоп, причем с чрезвычайно широким полем зрения a , значит, и с чрезвычайно низким разрешением.

Ясно, что для дальнейшего исследования необходима разработка более тонких методов. Первый шаг в этом направлении можно сделать, оставаясь еще в рамках теоретико-множественного подхода.

12.4.2. Количественная характеристика бесконечных множеств, более тонкая чем мощность

1. Постановка задачи. Прежде всего снова обратимся к понятию „мощность“ множества. Мощность множества является характеристикой количества элементов, принадлежащих множеству. Для конечных множеств понятие мощности можно отождествить с числом элементов. Однако использование этой характеристики для бесконечных множеств приводит к результатам, которые, по крайней мере, на первый взгляд, кажутся парадоксальными. Отметим только один из них.

В соответствии с принятой аксиоматикой [323], если из множества изъять хотя бы один его элемент, то совокупность оставшихся элементов будет представлять собой уже новое множество. Причем это свойство не зависит от того, является ли исходное множество конечным или бесконечным. Для конечных множеств характеристика количества элементов реагирует на подобную операцию вполне адекватно: число элементов в множестве уменьшается на единицу. Однако для бесконечных множеств ситуация будет другой. Изъятие одного a , значит, и многих элементов на мощности множества никак не сказывается. Отсюда можно сделать два вывода:

1) Принятая количественная характеристика является неадекватной и должна быть заменена на некоторую другую, более адекватную характеристику.

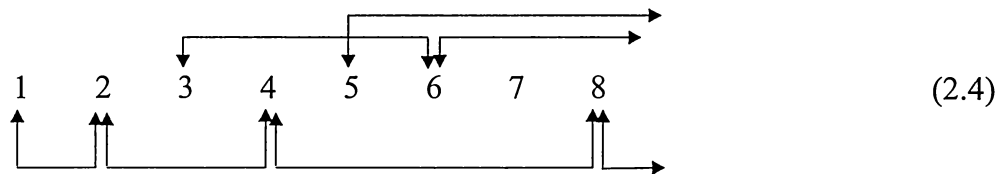
2) Характеристика является адекватной и бесконечные множества принципиально отличаются от конечных именно тем, что у бесконечных множеств их правильная часть может быть „равномощна“ исходному множеству (целое „равно“ своей части).

С формальной точки зрения оба указанных вывода являются совершенно равноправными. Только анализ следствий из них может дать определенные аргументы в пользу того или иного вывода. Общеизвестным является второй вывод. Следствия из него общеизвестны [323—325].

Представляет интерес изучение и равноправной альтернативной возможности [132, 134]. Поэтому в качестве рабочей гипотезы примем первый вывод и рассмотрим некоторые следствия из него. Потребуем, чтобы альтернативная количественная характеристика множеств удовлетворяла следующему условию регулярности: изъятие одного элемента из бесконечного множества должно приводить к изменению его количественной характеристики, аналогичному уменьшению числа элементов на единицу в конечных множествах.

2. Основные определения. Понятие мощности основано на возможности установления взаимнооднозначного соответствия между элементами двух множеств. В „наивной“ теории дается следующее определение последнего [324]: „Правило φ , которое каждому элементу a множества A соотносит один и только один элемент b множества B , причем каждый элемент $b \in B$ оказывается соотнесенным одному и только одному $a \in A$, называется взаимнооднозначным соответствием между множествами A и B .“ Предположим, что элементами A и B являются числа. Обозначим через x переменную, которая принимает значения из множества A , через y — из множества B . Тогда φ можно рассматривать как некоторую однозначную функцию, причем такую, что обратная функция является однозначной:

дополнительное условие (2.3) явно можно было не формулировать. В случае бесконечных множеств ситуация будет иной. Здесь условия (2.1) уже не гарантируют существование отображения (2.3). Например, если $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ и $\varphi(x) = 2x$, то приходим к системе отношений „полигамного“ типа:



В этой системе элемент „1“ связан только с „2“, но элемент „2“, кроме „1“, связан также с „4“, „4“ — в свою очередь связан с „8“ и т. д. Ниже будет показано, что никаким изменением функции φ тип отношений для указанных множеств изменить невозможно.

Подобная ситуация не соответствует представлению о „взаимной однозначности“ как о системе отношений со строгим разбиением на пары. Но, с другой стороны, вопросы выбора тех или иных понятий и названий для них выходят за рамки математики. В принципе можно вводить любые корректные понятия и давать им любые названия. Однако, если исследуется конкретная проблема, например, распространение конфиденциальной информации в среде ее потенциальных носителей, отмеченных номерами $1, 2, \dots, n, \dots$, то этот процесс носит уже вполне объективный характер, то есть он вообще не зависит ни от каких-либо введенных понятий, ни от выбранных названий для них. Подобный процесс определяется только действительными отношениями „доверия“ между объектами.

Допустим, что любой объект $t \in A \cup B$ всегда делится информацией с теми объектами, с которыми у него имеется непосредственная связь, то есть с $\varphi(t)$, $\varphi^{-1}(t)$. Тогда в случае отношений типа (2.4) информация, сообщенная извне любому из объектов t , распространится на неограниченное количество объектов. В противоположность этому в случае отношений, удовлетворяющих обоим условиям (2.1), (2.3), информация становится достоянием либо только одной „семейной“ пары либо только одного объекта, если $t = \varphi(t)$.

Все сказанное выше дает основания для введения следующих определений:

Определение 1. Строгим взаимнооднозначным соответствием между элементами двух множеств будем называть соответствие, которое является взаимнооднозначными и, кроме того, для элементов, принадлежащих пересечению множеств, совпадает с обратным соответствием.

Определение 2. Будем говорить, что два множества A и B являются равноценными и записывать $A \Leftrightarrow B$, если между их элементами можно установить строгое взаимнооднозначное соответствие.

Определение 3. Совокупность множеств, равноценных данному множеству A , будем называть партией (с лидером A).

Определение 4. Множеству A и всем множествам, принадлежащим одной партии (с лидером A), будем приписывать один и тот же символ ρ_A , который будет называть оценкой множества A .

Определение 5. Конечному множеству A , содержащему m элементов, будем приписывать оценку $\rho_A = m$.

Корректность последнего определения почти очевидна, так как все конечные множества, содержащие одинаковое число элементов, равноценны. Кроме того, все партии мно-

жеств, имеющих одинаковое число элементов, совпадают между собой (то есть не зависят от выбора лидера).

Определение 6. Оценку множества натуральных чисел будем обозначать ρ и называть счетной оценкой.

Определение 7. Будем говорить, что множества неравноценны, если они не являются равноценными.

Определение 8. Если множество A неравноценно множеству B , но равноценно подмножеству B , то будем говорить, что оценка A ниже (меньше) оценки B , а оценка B выше (больше) оценки A : $\rho_A < \rho_B$, $\rho_B > \rho_A$.

3. Шкала оценок. Легко убедиться в том, что отношение равноценности не является отношением эквивалентности. Действительно, указанное отношение является рефлексивным ($A \Leftrightarrow A$) и симметричным (из $A \Leftrightarrow B$ следует, что $B \Leftrightarrow A$). Однако транзитивным оно не является.

Теорема 1. Из $A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$ не следует с необходимостью, что $A \Leftrightarrow C$.

Доказательство. Пусть A , B , C множества натуральных чисел, чисел, обратных четным, и четных чисел:

$$A = \{1, \dots, n, \dots\} \quad B = \{1/2, \dots, 1/2n, \dots\} \quad C = \{2, \dots, 2n, \dots\}. \quad (2.5)$$

Очевидно, что $A \Leftrightarrow B$ и $B \Leftrightarrow C$. Однако установить строгое взаимнооднозначное соответствие между элементами множества A и его подмножества C невозможно. Правило, которое непосредственно следует из условий эквивалентности $A \sim B$, $B \sim C$, сводится к (2.4) и строгого взаимнооднозначного соответствия не дает. Указанная в (2.4) многозначность носит принципиальный характер и путем изменения закона соответствия не устраняется.

Предположим противное: существует правило φ , устанавливающее строгое взаимнооднозначное соответствие между всеми элементами множества A и элементами p_i , $i = 1, 2, \dots$ некоторого его подмножества P . Пусть, согласно этому правилу, $\varphi(1) = p_1$, $\varphi(2) = p_2$ и т. д. По определению строгой взаимной однозначности функция φ совпадает со своей обратной, т. е. $\varphi(\varphi(n)) = n$. Это означает, что когда при переборе элементов множества A встретится число p_1 (а оно встретится, т.к. P является подмножеством A), то правило φ даст ему в соответствие элемент 1 из множества P : $\varphi(p_1) = 1$. Аналогично $\varphi(p_2) = 2$ и т. д. Поэтому строгое взаимнооднозначное соответствие множества A возможно только с таким подмножеством A , которое совпадает с A . Отсюда следует

Теорема 2. Правильная часть любого множества имеет оценку, меньшую, чем само множество.

Это дает основание для того, чтобы ввести следующее

Определение 9. Если P — правильная часть множества A и $A - P$ — конечное множество, содержащее m элементов, то будем писать $\rho_A = \rho_P + m$, $\rho_P = \rho_A - m$.

Из теоремы 2 и определения 9 следует, что для любого множества A

$$\rho_A - 1 < \rho_A; \rho_A < \rho_A + 1.$$

Таким образом, принятая выше количественная характеристика множеств является регулярной: изъятие у множества одного элемента уменьшает его количественную характеристику, названную оценкой, на единицу независимо от того, является ли множество конечным или бесконечным.

Далее, множество C из примера (2.5) не равноценно A . Значит, A и C нельзя приписать и одинаковую оценку. Однако $(A - C) \Leftrightarrow C$. Для конечных чисел из равенства $a - c = c$ следует, что $c = a/2$. Поэтому введем следующее

Определение 10. Будем говорить, что множество C имеет оценку, равную половине оценки множества A , если C не равноценно A и равноценно $A - C$. Об оценке множества A будем говорить, что она составляет удвоенную оценку C . Символически это будем записывать в следующих равносильных формах:

$$\rho_A - \rho_C = \rho_C, \rho_C = \rho_A/2; \rho_A = 2\rho_C; \rho_C / \rho_A = 1/2; \rho_A / \rho_C = 2. \quad (2.6)$$

Определение 11. Если оценки трех множеств A , C и D связаны условиями

$$\rho_D / \rho_C = 1/2, \rho_C / \rho_A = 1/2,$$

то будем говорить, что оценка множества D , отнесенная к оценке A транзитом через C , равна $1/4$, а оценка множества A , отнесенная к оценке D транзитом через C , равна 4:

$$\frac{\rho_D}{\rho_C} \frac{\rho_C}{\rho_A} = \frac{1}{4}, \frac{\rho_A}{\rho_C} \frac{\rho_C}{\rho_D} = 4. \quad (2.7)$$

В качестве примера можно привести множества (2.5) и $D = \{4, \dots, 4n, \dots\}$.

Равенства (2.5)—(2.7) вполне согласуются с интуитивным представлением о том, что в множестве D содержится в два раза меньше элементов, чем в C , и в четыре раза меньше, чем в A . Однако дальше аналогия с конечными множествами не продолжается. Так, непосредственное сравнение оценок D и A дает следующий результат

$$\rho_D / \rho_A = 1/2, \rho_A / \rho_D = 2.$$

Следовательно, правило сокращения дробей, которое есть для конечных чисел, на символические дроби (2.7) в случаях, когда они относятся к бесконечным множествам, — не распространяется. Этот факт можно использовать для определения „бесконечности“ множеств. (Вместо утверждения о том, что бесконечные множества отличаются от конечных именно тем, что для них „целое может быть равно своей части“. При более строгом определении соответствия получается так, что целое всегда больше своей части.)

Таким образом, сравнение двух оценок через транзитную третью дает результат отличный от того, который получается при непосредственном сравнении двух оценок. Поэтому о промежуточном множестве точнее говорить не просто как о некотором индифферентном транзите, а в терминах, принятых для описания родственных отношений.

Определение 11 обобщается на случай любого числа промежуточных множеств. Так, последовательность множеств A, C, D можно продолжить, получая все более разреженные множества $D_1 = \{8, \dots, 8n, \dots\}; D_2 = \{16, \dots, 16n, \dots\}$ и т. д. Оценка множества D_{K-2} , $K = 3, 4, \dots$, отнесенная к счетной, через указанные промежуточные множества, равна $2^{-K} \rho$. Пусть D^* — предельное множество при $K \rightarrow \infty$. Его оценке (с указанной родословной) можно приписать символ $2^{-\rho} \cdot \rho$. В данном случае $D^* = \emptyset$. Нетрудно, однако, построить примеры, когда предельное множество при непосредственном сравнении с A имеет оценку $\rho/2$, а в зависимости от своей родословной — $2^{-K} \cdot \rho$, либо $2^{-\rho} \rho$.

Аналогично можно рассмотреть множества с оценками, большими, чем счетная. В результате получим две шкалы оценок множеств, о которых можно сказать, что они имеют „различные масштабы“:

$$\begin{aligned} \dots \leq \rho/2 < \dots < \rho-2 < \rho-1 < \rho < \rho+1 < \rho+2 < \dots < 2\rho \leq \dots: \\ \dots \leq 2^{-\rho} \rho \leq \dots 2^{-K} \rho \leq \dots \leq \rho/2 < \rho < 2\rho \leq 4\rho \leq \dots \leq 2^K \rho \leq 2^\rho \rho \leq \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

4. Сравнение понятий „оценка“ и „мощность“ множеств. Оба указанных понятия характеризуют количество элементов, содержащихся в множестве. Два множества имеют одинаковую мощность, если они являются эквивалентными, то есть между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие. Два множества имеют одинаковую оценку, если они являются равноценными, то есть между их элементами можно установить строгое взаимнооднозначное соответствие. Последнее условие является более жестким, чем первое. Поэтому оценка является более тонкой характеристикой множества, чем его мощность.

Множества, имеющие разные мощности, будут иметь и разные оценки. Причем, если мощность A больше мощности B , то и оценка A будет больше оценки B . С другой стороны, если мощности множеств одинаковы, то оценки их могут быть как одинаковыми, так и различными. Для конечных множеств понятия „мощность“, „оценка“ и „число элементов“ множества — совпадают между собой. Для бесконечных множеств понятие „мощность“ не удовлетворяет условию регулярности, а понятие „оценка“ — удовлетворяет. Так, мощности трех множеств

$$\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}; \{2, 3, 4, 5, \dots\}; \{2, 4, 6, 8, \dots\} \quad (2.9)$$

одинаковы, а их оценки — различны и равны соответственно ρ , $\rho-1$ и $\rho/2$ (отметим, что везде речь идет о неупорядоченных множествах).

Эквивалентность множеств, как известно, является отношением эквивалентности и разбивает любую совокупность множеств на непересекающиеся классы. Поэтому мощность множества удовлетворяет условию транзитивности. Понятия „равноценность“ множеств и их „оценка“ несколько сложнее. Как отмечалось, отношение равноценности является рефлексивным и симметричным, но в общем случае транзитивным не является (является толерантным). Это приводит к тому, что оценка множества характеризует не только собственно заданное множество, но и в некотором смысле „историю его формирования“, его „родословную“. Так, между множеством натуральных и четных чисел в (2.9) можно поместить множество $\{2, 4, 6, 8, \dots; 3, 7, 11, 15, \dots\}$ и в результате получить для множества четных чисел оценку не $\rho/2$, а $\rho/4$. Это свойство, характерно только для бесконечных множеств. При этом все отношения неравенств, которые применяются к множеству и любому его собственным подмножествам, всегда будут носить строгий характер. Например,

$$\rho-1 < \rho < \rho+1, \rho < 2\rho; \rho/2 < \rho.$$

Таким образом, шкала оценок является более тонкой, чем шкала мощностей множеств.

5. В заключение этого раздела отметим, что все полученные результаты не выглядят парадоксальными и вполне согласуются с нашим опытом, почерпнутым из реальной жизни. Так, отсутствие транзитивности является типичным явлением реальности: некто A на-

ходится в дружеских (толерантных) отношениях с B , $B \sim C$, но A и C могут не иметь никаких отношений. Отсутствие транзитивности является типичной чертой и любых приближенных вычислений. Так, „оценки на глаз“ вполне могут дать два примерных равенства $a \approx b$ и $b \approx c$. Но непосредственное сопоставление величин a и c может зафиксировать уже неравенство, например, $a < c$.

Второе основное свойство оценок — это характеристика именно индивидуальности реальных объектов. Если даже у бесконечного множества изъять хотя бы один его элемент, то новый объект уже не будет равноценен исходному (то есть в определенном смысле, можно сказать, что такая характеристика не обезличивает объекты).

Третье свойство — зависимость оценки объекта от его происхождения (оценка человека, произведения искусства и многого другого) — также является практически неотъемлемой чертой нашей реальности. Полученные выше результаты показывают, что все указанные черты присущи и миру математической реальности.

6. Приложение понятия „оценка“ множества. Итак, оценка множества является более тонкой его количественной характеристикой, чем мощность. Посмотрим теперь, что она может дать для исследования поставленной задачи.

Как и прежде, предположим, что цель теории состоит в определении некоторой функции $y = f(x)$, где $x \in [0, 1]$. Пусть F — множество произвольных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, G — множество произвольных функций, G_μ — множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ :

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < M|\Delta x|^\mu, \quad M, \mu = \text{const.} \quad (2.10)$$

Оценки количества элементов в указанных множествах обозначим через f^* , C^* , C_μ^* , а их мощности через f , C и C_μ . Легко доказать, что мощность C_μ не зависит от показателя Гельдера и, более того, всегда совпадает с C , то есть $C_\mu = C$.

Для оценок ситуация другая. Если a и b две положительные постоянные, причем $a < b$, то $G_a \supset G_b$. Иными словами, переход к большему показателю Гельдера всегда суживает соответствующее множество функций. Нетрудно доказать, что

$$G_a - G_b \Leftrightarrow G_b, \quad (2.11)$$

и значит,

$$C_b^* = \frac{C_a^*}{2}, \quad C_a^* = 2C_b^*, \quad a < b. \quad (2.12)$$

Действительно, каждое из множеств G_a , G_b и $G_a - G_b$ имеет мощность континуума. Кроме того, из определения следует, что

$$(G_a - G_b) \cap G_b = \emptyset.$$

С другой стороны, для непересекающихся множеств понятия эквивалентности и равноценности совпадают между собой. Отсюда и принятых выше определений следуют равенства (2.12).

Возьмем теперь произвольную монотонную числовую последовательность, сходящуюся к 1:

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k < \dots < 1, \quad (2.13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1.$$

Указанной последовательности соответствуют вложенные множества

$$G, G_{a_1} \dots G_{a_k} \dots G_1. \quad (2.14)$$

Если теперь промежуточные множества рассматривать как транзитные, то для оценки множества G_1 можно получить следующее равенство

$$C_1^* = \frac{C^*}{2^k}, \quad (2.15)$$

где k — любое число, либо

$$C_1^* = \frac{C^*}{2^\rho}, \quad (2.16)$$

где ρ — оценка счетного множества.

Из анализа известно, что условие непрерывности (2.10) с показателем Гельдера $\mu = 1$ (условие Липшица) близко к условию дифференцируемости, но несколько слабее его. Поэтому множество дифференцируемых G_p функций в ряду (2.14) можно поставить правее G_1 и записать $G_p^* = C_1/2$.

Выше для количественной характеристики гипотез вводились символические логарифмы от мощностей. По аналогии с (1.1) введем такие же логарифмы и для оценок. На тех же основаниях, что и для мощностей положим, что для оценок также $\ln f^* = C^*$.

Точно так же примем по определению: если оценки бесконечных множеств связаны условием (2.15) или (2.16), то

$$\ln C_1^* = \ln C^* - k, \quad (2.17)$$

или

$$\ln C_1^* = \ln C^* - \rho. \quad (2.18)$$

Исходную неопределенность задачи можно оценить как $J_0^* = \ln f^* = C^*$. Неопределенность, которая остается после принятия гипотезы о непрерывности функции $y = f(x)$, равна $J_1^* = \ln C^*$. Отсюда количественную характеристику значимости гипотезы о непрерывности можно записать следующим образом

$$h_{01} = C^* - \ln C^*. \quad (2.19)$$

Предположим, что дополнительно стало известно, что функция $y = f(x)$ является не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой. В соответствии с равенствами (2.17), (2.18), характеристика значимости гипотез возрастает до следующей

$$h_{02}^* = C^* - \ln C^* + k \quad (2.20)$$

или

$$h_{02}^* = C^* - \ln C^* + \rho. \quad (2.21)$$

Вернемся снова к условию Гельдера (2.10). Выше показано, что любое сколь угодно малое увеличение показателя Гельдера уменьшает характеристику количества элементов соответствующего множества в 2 раза. Возникает вопрос, нельзя ли вместо конечного или счетного числа шагов по μ рассмотреть континуум таких шагов? Структура равенств (2.17), (2.18) дает однозначный ответ на этот вопрос — нет, нельзя. В противном случае в равенстве (2.18) вместо ρ можно было бы поставить символ типа C^* , то есть получить

$$\ln C_1^* = \ln C^* - C^*. \quad (2.22)$$

Последнее условие является противоречивым. Действительно, для любых конечных чисел K всегда имеют место неравенства $2^K > K$, или $K > \ln K$. Эти неравенства имеют место и в случае, если под K понимать мощность множества или его оценку. Следовательно, условие (2.22) является невозможным. Последнее в свою очередь означает невозможность „континуального числа“ шагов по параметру Гельдера. Но, с другой стороны, μ — это обычное действительное число, которое может меняться непрерывно от 0 до 1. Таким образом, полученный результат дает повод вернуться к самой концепции действительного числа и понятию непрерывности, которое соответствует этой концепции.

Итак, понятие оценки бесконечных множеств позволяет получать более тонкие характеристики значимости гипотез, чем понятие мощности множества. Но тем ни менее указанные характеристики остаются еще довольно грубыми.

Например, типичной является следующая ситуация. После принятия некоторых гипотез остается еще континуум возможностей. Вводится новая гипотеза, которая суживает число возможностей, но тем ни менее их по-прежнему остается еще континуум. Характеристики, основанные на понятии мощности на подобную гипотезу вообще никак не реагируют. С другой стороны, характеристики, основанные на понятии оценки, реагируют, но весьма стандартным образом. (Независимо от содержания новой гипотезы, имеют место равенства типа (2.15) или (2.16) и следствия из них).

Отсюда, в частности, следует, что переход к двумерной задаче на полученных характеристиках также никак не отразится. Поэтому необходим поиск методов с более высокой разрешающей способностью, чем теоретико-множественные. Обратимся к методам нестандартного анализа.

12.4.3. Характеристики гипотез, полученные методами нестандартного анализа

Вначале рассмотрим одномерную задачу [132]. Как и выше, предположим, что некоторый процесс описывается одной скалярной функцией от одного скалярного аргумента: $y = f(x)$. Будем считать, что априорно известно только то, что эта функция является однозначной. Требуется построить теорию, которая позволяла бы находить конкретные виды функции при заданных конкретных условиях. Типичный путь построения такой теории включает в себя следующие этапы: 1^0 функция $y = f(x)$ предполагается гладкой, 2^0 для функции строится определенное (как правило, дифференциальное) уравнение, 3^0 задаются необходимые краевые условия.

Дадим оценку каждого из указанных этапов. Вначале обратимся к аргументу x . Пусть известно, что $0 \leq x \leq R_1$. Формально в этом интервале содержится бесконечно много зна-

чений x . Однако практически нам доступно весьма ограниченное число аргумента. Например, трудно представить себе, чтобы имело смысл вычисление функции в точке $x = 1 - 10^{-100}$. Поэтому поступим здесь так же, как и выше, при введении актуальной бесконечно малой величины. Именно, заменим исходную непрерывную задачу на дискретную и затем перейдем к соответствующему пределу.

Итак, фактически мы никогда не имеем дело с собственно действительной прямой. Нам доступно только конечное число точек на ней. Обозначим через ε_1 минимальное расстояние, при котором можно различать близкие точки. Тогда вместо действительной прямой можно оперировать с дискретным набором точек: $x = 0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \dots$

Теперь о значениях самой функции $f(x)$. Введем, как обычно, декартовы координаты и значению $f(x)$ поставим в соответствие точку на плоскости Oxy (рис. 12.6). На том же основании, что и выше, предположим, что $f(x)$ может принимать только некоторые дискретные значения с шагом ε_2 . Здесь возникает вопрос, связанный с измерением скорости функции $f(x)$. При указанном способе дискретизации скорость функции может изменяться только скачками. Причем минимальной, отличной от нуля, будет скорость, равная $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$. Если принять, что два значения скорости могут различаться на ту же величину, что и величина x то есть на ε_1 , то следует положить $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$. Напротив, если принять, что $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, то допустимыми значениями локальной скорости могут быть только целые числа. Сразу неясно, какая из двух указанных возможностей является верной. Поэтому вначале сохраним оба масштаба $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ как независимые.

Пусть $0 \leq y < R_2$. Какова исходная степень неопределенности поставленной задачи? Ее легко подсчитать. В точке $x = 0$ возможно R_2 / ε_2 значений функции $f(0)$. То же самое будет и для остальных точек. Число дискретных значений аргумента равно $R_1 / \varepsilon_1 + 1$. Поэтому общее число всевозможных функций, включая разрывные, будет равно

$$N_0 = \left(\frac{R_2}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{R_1}{\varepsilon_1} + 1} \quad (3.1)$$

Наложим теперь на функцию условия непрерывности. Это означает, что появляется связь между значениями функциями при близких значениях ее аргумента. Поэтому степень неопределенности задачи сократиться. Однако одного только указания на то, что функция непрерывна, недостаточно для количественной оценки информативности этого условия. Возможны самые различные „степени“ непрерывности. От „степени“ непрерывности существенно зависит информативность принятого предположения.

Пусть известно значение f в точке x и необходимо найти произвол в значениях функции в точке $x + \Delta x$. Здесь $x = k \cdot \varepsilon_1$, $\Delta x = \varepsilon_1$, k — целое число. Обозначим через l длину интервала, в которой может попасть точка $f(x + \Delta x)$ при условии, что величина $f(x)$ задана:

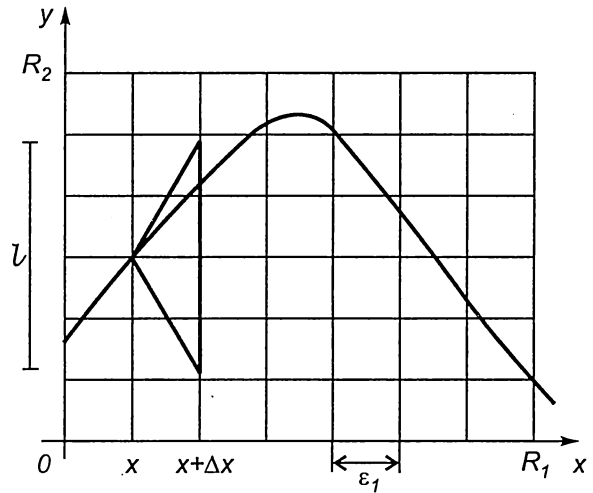
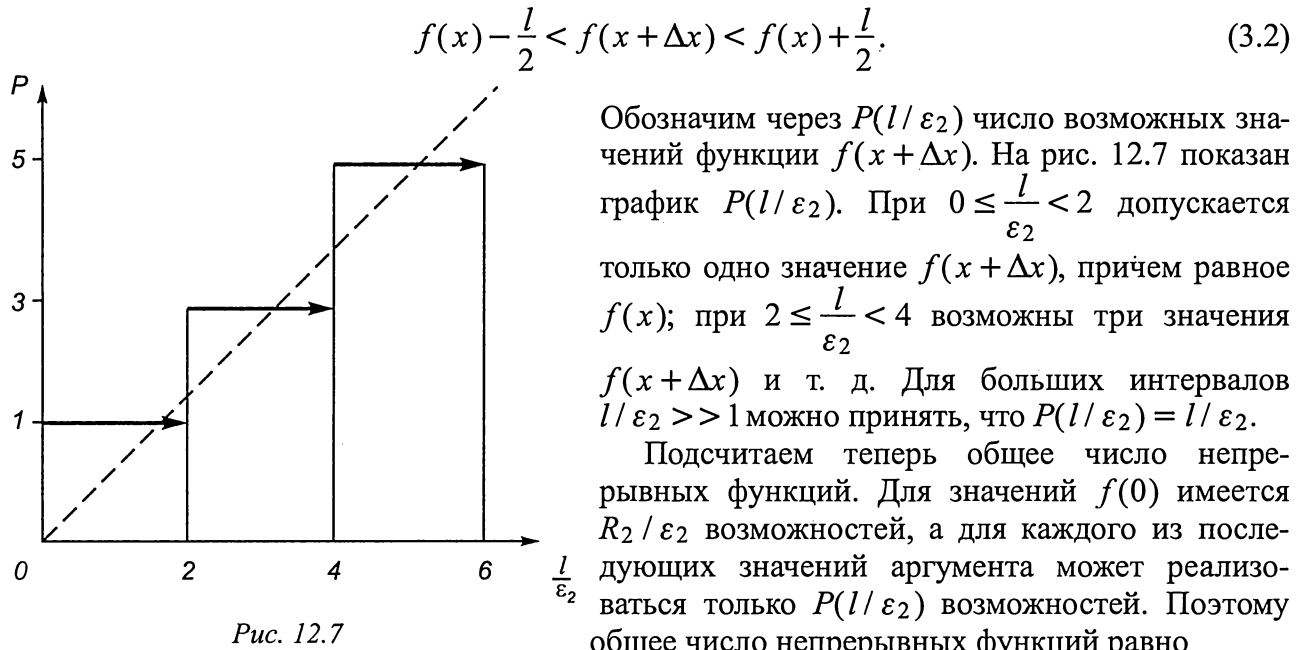


Рис. 12.6



Обозначим через $P(l/\varepsilon_2)$ число возможных значений функции $f(x + \Delta x)$. На рис. 12.7 показан график $P(l/\varepsilon_2)$. При $0 \leq \frac{l}{\varepsilon_2} < 2$ допускается только одно значение $f(x + \Delta x)$, причем равное $f(x)$; при $2 \leq \frac{l}{\varepsilon_2} < 4$ возможны три значения $f(x + \Delta x)$ и т. д. Для больших интервалов $l/\varepsilon_2 \gg 1$ можно принять, что $P(l/\varepsilon_2) = l/\varepsilon_2$.

Подсчитаем теперь общее число непрерывных функций. Для значений $f(0)$ имеется R_2/ε_2 возможностей, а для каждого из последующих значений аргумента может реализоваться только $P(l/\varepsilon_2)$ возможностей. Поэтому общее число непрерывных функций равно

$$N_1 = \frac{R_2}{\varepsilon_2} \left[P\left(\frac{l}{\varepsilon_2}\right) \right]^{\frac{R_1}{\varepsilon_1}}. \quad (3.3)$$

Здесь l — пока неопределенный параметр. Для подсчета l необходимо уточнить само понятие о непрерывности функции. Действительно, что означает, что функция $f(x)$ непрерывна по x ? Согласно определению, это означает только, что при $\Delta x \rightarrow 0$ также и $l \rightarrow 0$. При этом о скорости сходимости ничего не говорится. Такого определения для оценки числа непрерывных функций недостаточно. Его необходимо дополнить указанием на скорость сходимости $l \rightarrow 0$, которая и будет характеризовать „степень непрерывности“ функции.

Надо отметить, что потребность в подобном уточнении возникает во многих теоретических построениях. Наиболее известным уточнением является условие Гельдера (2.10)

$$l = M \cdot |\Delta x|^\mu, \quad \mu, M = \text{const}, \quad (3.4)$$

а также его частный случай при $\mu = 1$ — условие Липшица. Здесь возникает одно интересное обстоятельство. Всегда предполагается, что показатель Гельдера $0 < \mu \leq 1$. Если $\mu > 1$, то легко доказывается, что функция может быть только постоянной. Естественно потребовать, чтобы это свойство выполнялось и в рассматриваемом дискретном пространстве. Это означает, что при $\mu > 1$ в интервал (3.2) должна попадать только одна точка из дискретного набора значений $f(x + \Delta x)$. Следовательно, при любом показателе Гельдера $\mu > 1$, любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ и любом конечном значении M должно иметь место равенство

$$P\left(M \frac{\varepsilon_1^\mu}{\varepsilon_2}\right) = 1. \quad (3.5)$$

Это равенство обеспечивает выполнение условия $f(x + \Delta x) = f(x)$ и, значит, сводит функцию к постоянной. Из (3.5) сразу следует, что варианты типа $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$ непригодны и следует принять, что масштабы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ должны быть одинаковыми

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (3.6)$$

Таким образом, в дискретном пространстве степень разрешения для аргумента и функции должна быть всегда одинаковой. Поэтому локальные скорости изменения функции могут выражаться только целыми числами: $\Delta y / \Delta x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Подстановка (3.6) и (3.4) в (3.3) дает следующий результат: число всевозможных функций, непрерывных по Гельдеру, равно

$$N_2 = \frac{R_2}{\varepsilon} \left[P \left(\frac{M}{\varepsilon^{1-\mu}} \right) \right]^{\frac{R_1}{\varepsilon}}. \quad (3.7)$$

Видно, что степень информативности условия существенно зависит от показателя Гельдера и постоянной M . Самым информативным будет случай $\mu = 1$, то есть условие Липшица. При $\mu = 1$ имеем

$$N_3 = \frac{R_2}{\varepsilon} [P(M)]^{\frac{R_1}{\varepsilon}}. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что переход к дискретному пространству накладывает ограничение на постоянную M снизу. Например, пусть в обычных непрерывных переменных задана функция $y = 0,01x$. Тогда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq 0,01\Delta x, \quad M = 0,01, \quad \mu = 1,$$

то есть скорость роста функции равна 0,01. В дискретном же пространстве значение локальной функции могут быть только целыми числами. Поэтому для величины M должно выполняться ограничение снизу: $M \geq 2$. В противном случае функция $y = 0,01x$ будет воспроизводиться как константа. Так как постоянная M входит в неравенство, то любое ее увеличение вполне допустимо.

Пусть теперь $M \gg 1$. Тогда выражения (3.7), (3.8) можно упростить:

$$N_2 = \frac{R_2}{\varepsilon} \left(\frac{M}{\varepsilon^{1-\mu}} \right)^{\frac{R_1}{\varepsilon}}; \quad N_3 = \frac{R_2}{\varepsilon} M^{\frac{R_1}{\varepsilon}}. \quad (3.9)$$

Интересно рассмотреть условия, которые все же сохраняют непрерывность, но накладывают на функцию ограничения менее жесткие, чем условие Гельдера при любом сколь угодно малом показателе μ . Будем исходить из того факта, что в точке $x = 0$ все производные функции $y = \exp(-1/x^2)$ обращаются в нуль. Поэтому при $x \rightarrow 0$ график этой функции подойдет к оси Ox ближе графика любой алгебраической кривой. Построим обратную функцию и воспользуемся ею для формулировки условия непрерывности, менее жесткого, чем условие Гельдера:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{-\ln|\Delta x|}}. \quad (3.10)$$

Непрерывность указанного типа будет называться логарифмической непрерывностью. Из условия (3.10) сразу следует, что число соответствующих функций равно

$$N_4 = \frac{R_2}{\varepsilon} \left(\frac{M}{\varepsilon \sqrt{-\ln \varepsilon}} \right)^{\frac{R_1}{\varepsilon}}. \quad (3.11)$$

Оценим теперь роль краевых условий. Пусть для корректной постановки краевой задачи требуется K независимых условий. Эти условия задают один вариант из их общего числа, равного

$$N_5 = \left(\frac{R_2}{\varepsilon} \right)^K. \quad (3.12)$$

Уравнение на функцию $f(x)$ позволяет устранить оставшийся произвол.

Обратимся теперь к параметрам R_1 и R_2 . Они ограничивают область, доступную для анализа. Действительно, трудно ожидать, что в решениях появятся значения функции равные, например, 10^{100} или возникает необходимость в изучении подобных изменений аргумента. Это означает, что для ограничений масштабов R_1, R_2 сверху можно привести те же самые соображения, что и для ограничения масштаба ε снизу. Можно положить $R_1 = R_2 = 1/\varepsilon$. Это означает предположение, что прогресс в области исследования микромира и макромира идет одинаковыми темпами. В некоторых случаях можно заранее оценить изменения переменных x и y и поставить задачу так, чтобы $R_1 = R_2 = 1$. Все выкладки будут практически одинаковыми для обоих случаев. Ниже остановимся на втором варианте: $R_1 = R_2 = 1$.

Приступим к анализу полученных результатов.

Положим во всех формулах $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и везде перейдем к нестандартному пределу в смысле (2.2) п.12.1.2. В результате получим из формулы (3.1)

$$J_0 = \ln N_0 = \omega \ln \omega + \ln \omega, \quad (3.13)$$

где, как и прежде, $\omega = 1/\Pi$.

Такова исходная неопределенность задачи. Иными словами, совокупность всех положений теории должна давать общую информацию, равную J_0 . Посмотрим теперь, какую часть от J_0 дает предположение о непрерывности. Начнем с наименее обременительного условия логарифмической непрерывности. Формула (3.11) приводит к следующему результату:

$$J_4 = \ln \omega + \omega \left[\ln M + \ln \omega - \frac{1}{2} \ln \ln \omega \right].$$

Следовательно, информация, которую дает гипотеза о логарифмической непрерывности равна

$$J_{04} = J_0 - J_4 = \omega \left[\frac{1}{2} \ln \ln \omega - \ln M \right].$$

Если принять условия непрерывности Гельдера, то получим

$$J_2 = (1 - \mu)\omega \ln \omega + \omega \ln M + \ln \omega,$$

и длина шага будет равна

$$S_{04} = J_0 - J_2 = \omega[\mu \ln \omega - \ln M].$$

В случае условия Липшица

$$J_3 = \omega \ln M + \ln \omega,$$

$$S_{03} = J_0 - J_3 = \omega[\ln \omega - \ln M].$$

Краевые условия дают информацию, равную

$$J_5 = K \ln \omega.$$

Остальную информацию дает уравнение. Например, в случае условия Гельдера информация, которая придется на уравнения, равна

$$J_2 - J_5 = (1 - \mu)\omega \ln \omega + \omega \ln M - (K - 1) \ln \omega.$$

При $\mu = 1$ на уравнение падает информация, равная

$$J_3 - J_5 = \omega \ln M - (K - 1) \ln \omega.$$

Итак, полученные соотношения показывают, что условия Гельдера дает качественно большую информацию, чем условие логарифмической непрерывности. В первом случае ее порядок равен $\mu\omega \ln \omega$, во втором — $\omega \ln \ln \omega$. В свою очередь, условие Липшица дает качественно большую информацию, чем условие Гельдера при $\mu < 1$. В случае принятия условия Гельдера оставшаяся степень свободы имеет порядок $(1 - \mu)\omega \ln \omega$, а в случае условия Липшица — степень свободы уменьшается до $\omega \ln M$, то есть понижается качественно.

Формально ω — это бесконечно большое число. Более привычными являются оценки на языке обычных чисел, например, в процентах. В некоторых случаях их также можно получить. Действительно, в качестве приближения для ω может выступить любое очень большое число. Если исходную степень неопределенности принять за 1 (это $\omega \ln \omega$), то после введения условия Гельдера она уменьшается до $(1 - \mu)$. Этой формулой можно пользоваться при значениях μ не слишком близких к 1. Таким образом, видно, что при $\mu = 0,5$ половину информации о функции дает условие непрерывности, а вторую половину — уравнение и краевые условия. Соответственно при $\mu = 0,3$ 30% всей информации дает условие непрерывности, а 70% — уравнение и краевые условия.

Теперь можно сформулировать следующий вывод: по своей значимости условия гладкости, которые накладываются на функцию, вполне сравнимы с уравнениями, которым эта функция удовлетворяет. Поэтому степень обоснованности требований на гладкость должна быть сравнима с обоснованностью самих уравнений. Любое снижение требований на гладкость функции существенно увеличивает степень свободы для дальнейших теоретических построений.

Перейдем теперь к двумерному случаю. Легко видеть, что для функции двух переменных исходная неопределенность имеет порядок $\omega^2 \ln \omega$, а после принятия условия Липшица — $\omega^2 \ln M$. Оказывается, гладких функций двух переменных гораздо больше, чем произвольных (разрывных) функций одной переменной.

Оценим теперь, какое место в этой иерархии занимают функции со структурой. Пусть $F(x) = \varphi(x, E(x))$. Во всех численных подсчетах $E(x)$ — это нуль. Но при дифференцировании производная от $E(x)$ — это уже 1. Можно ожидать, что во всех уравнениях, имеющих отношения к реальным процессам, порядки производных будут заведомо меньше 10. Поэтому можно записать

$$F(x) = a_0(x) + a_1(x)E(x) + \dots + a_9E^9(x).$$

Предположим, что все коэффициенты разложения удовлетворяют условию Липшица. Тогда степень произвола уменьшится от $10\omega \ln \omega$ до $10\omega \ln M$. Видно, что функции со структурой обладают гораздо большим произволом, чем обычные непрерывные функции, но тем не менее в целом они стоят гораздо ближе к гладким, чем к произвольным разрывным функциям. Этого следовало ожидать, так как функциям со структурой отвечают разрывные функции, но с разрывами, подчиненными существенным ограничениям. В качестве следующих шагов, если в этом будет необходимость, можно вводить новые базисные элементы и постепенно уменьшать ограничения на разрывы.

Итак, мы видим, что условия гладкости дают чрезвычайно много информации, которая вполне сравнима с информацией, доставляемой уравнениями. Хотя ясно, что условия гладкости по своей сути имеют природу, отличную от природы уравнений. История механики показывает, что для формулировки верного уравнения требуются годы и усилия часто не одного поколения исследователей. В то время как формулировка условий гладкости часто делается почти без усилий, исходя только из некоторых „общих соображений“. Полученные выше количественные оценки показывают, что условия гладкости должны подвергаться такому же тщательному анализу как и сами уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ревуженко А.Ф. О самых простых течениях сплошной среды // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 1. — С. 54—58.
2. Ревуженко А.Ф. Один класс сложных нагружений неупругой среды // Прикладная механика и техн. физика. — 1986. — № 5. — С. 150—158.
3. Revuzhenko A. Experimental Detection of constitutive Behaviour and Self-Organization // Modern Approaches to Plasticity /Editor D.Kolymbas. — 1993. — Elsevier Amsterdam — London — New York — Tokyo. — P. 727—735.
4. Ревуженко А.Ф. Однородные сдвиговые течения сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 1. — С. 3—14.
5. Ревуженко А.Ф. Однородная деформация сплошной среды // Прикладная механика и техническая физика. — 1997. — Т. 38. — № 3.
6. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1974. — №3. — С. 130—133.
7. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Некоторые модели деформирования горных пород и грунтов / Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. — Н., 1975. — С. 140—145.
8. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Некоторые модели деформирования горных пород и грунтов / Разрушение и деформ. твердой среды взрывом. — № 76/33. — М., 1976.
9. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1982. — № 5. — С. 23—29.
10. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Однородный сдвиг сыпучего материала. Локализация деформаций // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1983. — №5. — С. 7—21.
11. Аннин Б.Д., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Механика деформированного твердого тела в СО АН СССР // Прикл. мех. и техн. физики. — 1987. — №4. — С. 66—86.
12. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Некоторые закономерности пластического деформирования сыпучих материалов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1988. — №4. — С. 3—8.
13. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Сложное нагружение сыпучих материалов с изломами траекторий. Методика и экспериментальные результаты // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1994. — №5. — С. 48—56.
14. Ревуженко А.Ф., Чанышев А.И., Шемякин Е.И. Математические модели упруго-пластических тел / Актуальные пробл. вычис. мат. и матем. моделирования. — Н., Наука, 1985.
15. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. О сложном нагружении упруго-пластических тел // Современные проблемы механики сплошных сред. — М., 1985.
16. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Об одном методе испытания неупругих материалов // Изв. АН СССР, механика твердого тела. — №4. — 1990. — С. 178—182.

17. Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф. Потоки энергии в деформируемой среде // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1988. — № 6. — С. 56—61.
18. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Об эффекте поперечных деформаций в механике сплошной среды // Прикл. мех. и техн. физики. — 1974. — № 1. — С. 154—158.
19. Ревуженко А.Ф. Предельное равновесие сыпучей среды с нарушенной структурой // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1974. — № 2. — С. 9—15.
20. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Кинематика деформирования сыпучей среды с невязким трением // Прикл. мех. и техн. физики. — 1974. — № 4. — С. 119—124.
21. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Некоторые математические модели деформирования сплошных сред со структурой // Аналитические методы и вычислительная техника в мех. горных пород. Н., 1975.
22. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // Прикл. мех. и техн. физики. — 1977. — № 3. — С. 157—173.
23. Ревуженко А.Ф. О деформировании сыпучей среды, ч. 1. Плоская модель // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1980. — № 3. — С. 3—16.
24. Ревуженко А.Ф. О деформировании сыпучей среды, ч. 2 Исследование плоской модели // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — № 5. — С. 3—13.
25. Ревуженко А.Ф. О деформировании сыпучей среды, ч. 3. Условия на границе // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1982. — № 4. — С. 13—21.
26. Ревуженко А.Ф. О деформировании сыпучей среды, ч. 4. Микровращения // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1983. — № 6. — С. 8—17.
27. Курленя М.В., Опарин В.Н., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. О некоторых особенностях реакции горных пород на взрывные воздействия в ближней зоне // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 293. — № 1. — С. 67—70.
28. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О структурно-дилатансионной прочности горных пород // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 305. — № 5. — С. 1077—1080.
29. Ревуженко А.Ф. Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщение 1 // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 4. — С. 14—21.
30. Ревуженко А.Ф. Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщение 2 // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 5.
31. Ревуженко А.Ф. Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщение 3. // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1991. — № 5. — С. 20—26.
32. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Об одной экспериментальной модели горной породы // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1991. — № 4.
33. Адушкин А.А., Горнов В.В., Курленя М.В., Опарин В.Н., Ревуженко А.Ф., Спивак А.А. Знакопеременная реакция горной породы на динамическое воздействие // Докл. АН СССР. — Т. 323. — № 2. — 1992. — С. 263—269.
34. Димов А.И., Ревуженко А.Ф. О конечных деформациях упругого анизотропного тела // Прикл. мех. и техн. физики. — 1989. — № 3. — С. 166—174.
35. Д. Колимбас, Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Однородное деформирование сыпучей среды: теория и эксперимент // Прикл. мех. и техн. физики. — 1994. — № 6. — С.114—121.
36. D. Kolymbas, S.V. Lavrikov, A.Ph. Revuzhenko. Complex loading of granular media with broken trajectories of deformation: theory and experiments // International Workshop Homogenization, theory of migration and granular bodies, Gdansk-Kormoran, 14—17 May, 1995. — Pp.151—155.
37. Колимбас Д., Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40. — № 5. — С. 133—142.

38. Ревуженко А.Ф. Сложное нагружение толстостенной трубы из идеально пластического материала // Динамика сплошной среды. — Н., 1970. — № 6. — С. 149—157.
39. Ревуженко А.Ф. Один класс точных решений уравнений идеальной пластичности // Ж. Прикл. мех. и техн. физики. — 1975. — № 2. — С. 102—107.
40. Ревуженко А.Ф. О напряженно-деформированном состоянии разупрочняющегося массива вокруг выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1978. — № 2. — С. 10—20.
41. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Исследование задачи Янсена // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — № 3. — С. 3—15.
42. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Численные эксперименты по определению коэффициента бокового распора сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — № 4. — С. 3—7.
43. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. О давлении сыпучих материалов на податливые ограждающие конструкции // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — № 6. — С. 11—17.
44. Димов А.И., Ревуженко А.Ф. Один класс точных решений уравнений статики сыпучей среды // Прикл. мех. и техн. физики. — 1983. — № 3. — С. 164—167.
45. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. Об учете дилатансии в основных справочных формулах механики сыпучих сред // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1986. — № 4. — С. 13—16.
46. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Пластические модели в задачах упругого деформирования рулонированных оболочек // Прикл. мех. и техн. физики. — 1988. — № 3. — С. 153—159.
47. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Об оптимизации конструкций рулонированных оболочек // Прикл. мех. и техн. физики. — 1988. — № 5. — С. 162—167.
48. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумуляции энергии и разупрочнения материала // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1994. — № 6. — С. 12—23.
49. Ревуженко А.Ф. Диссипативные структуры в сплошной среде // Изв. вузов. Физика. — № 4. — 1992. — С. 94—104.
50. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1977. — № 3. — С. 3—9.
51. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246. — № 3. — С. 572—574.
52. Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. О временных структурах в процессах деформирования сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 2. — С. 29—39.
53. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Способ получения регулярной структуры в деформируемой области сплошной среды // Прикл. мех. и техн. физики. — 1993. — № 1. — С. 137—144.
54. A. Revuzhenko. Vorgnge der Selbstorgani-Sierung in den Boden // Mitteilungen der Deutschen Bodenkundlichen Gesellschaft, Band 71. — 1993. — P. 77—85.
55. Ревуженко А.Ф., Бобряков А.П., Косых В.П. О течении сыпучей среды с возможным неограниченным скольжением по поверхностям локализации // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1997. — № 3. — С. 37—42.
56. Ревуженко А.Ф., Косых В.П., Бобряков А.П. О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — № 6. — 1998. — С. 27—34.

57. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Задачи механики сыпучих сред в горном деле // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1982. — № 3. — С. 19—25.
58. Стажевский С.Б., Ревуженко А.Ф. О кинематике движения сыпучих материалов относительно жестких поверхностей // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1975. — № 1. — С. 86—88.
59. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Новые методы расчета нагрузок на крепи // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1976. — № 3. — С. 21—40.
60. Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф. Некоторые задачи разрушения в вариационных постановках // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1978. — № 6. — С. 34—44.
61. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Некоторые постановки краевых задач L -пластичности // Прикл. мех. и техн. физики. — 1979. — № 2. — С. 128—137.
62. Ревуженко А.Ф. Вариационные постановки краевых задач разрушения // Прикл. мех. и техн. физики. — 1980. — № 4. — С. 148—156.
63. Бобряков А.П., Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. О стрельании горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1980. — № 5. — С. 3—12.
64. Ревуженко А.Ф. О структурах пластического деформирования // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1987. — № 5. — С. 3—10.
65. Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф. О формировании блочной структуры при сдвиге сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1988. — № 2. — С. 3—10.
66. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. О расчете локализованных течений сыпучей среды в радиальных каналах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 1. — С. 3—9.
67. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. О деформировании блочной среды вокруг выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 6.
68. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Об устойчивости деформирования блочного массива вокруг выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1991. — № 1. — С. 37—43.
69. A.Revuzhenko, S.Stazhevsky. New Silo Technologies from Novosibirsk. Silos-Forschung und Praxis Jagung` 92, Sonderforschungs-bereich-219, 08/09 October 1992, Universitt Karlsruhe
70. Ревуженко А.Ф. Нелокальные меры конечных деформаций // Прикл. мех. и техн. физики. — 1993. — № 6. — С. 98—105.
71. Ревуженко А.Ф., Клишин С.В. Модели полигональных систем трещин в горных породах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — № 1. — 1999. — С. 37—44.
72. Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. О катастрофических последствиях длительных слабых воздействий на сыпучую среду // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1995. — № 1. — С. 19—24.
73. Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. О влиянии длительных слабых воздействий на сопротивление сыпучих сред срезу // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 2. — С. 26—30.
74. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. О возможном механизме перемещения масс Земли // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 272. — № 5. — С. 1097—1099.
75. Ревуженко А.Ф. О приливном механизме переноса масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. — № 6. — 1991. — С. 13—20.
76. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования // Геотектоника. — № 6. — 1991. — С. 21—34.

77. Lavrikov V.S., Revuzhenko A.Ph. Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 29V. — 1998. — P. 85—91.
78. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Об эффекте направленного переноса масс при сложном нагружении // Вычислительные технологии. — Т. 4. — № 3. — 1999. — С. 36—41.
79. Григорьев Ю.М., Ревуженко А.Ф. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами // Препринт № 8. — Новосибирский государственный университет. — 1999.
80. Ревуженко А.Ф. Образование шара из свободного объема неньютоновской капиллярной жидкости // Докл. АН СССР. — 1987. — № 5. — Т. 295. — С. 1070—1073.
81. Димов А.И., Ревуженко А.Ф. Образование шара из свободного объема жидкости под действием сил поверхностного натяжения // Изв. СО АН СССР. Технические науки. — Вып. 6. — 1989. — С. 66—71.
82. Басманова Т.Ф., Ревуженко А.Ф. Влияние внешней среды на образование шара из объема капиллярной жидкости // Сибирский физико-технический журнал. — 1991. — Вып. 3. — С. 10—15.
83. Адилбеков Е.Н., Ревуженко А.Ф. Роль внешней среды при стягивании объема капиллярной жидкости к шару // Сибирский физико-технический журнал. — 1993. — Вып. 1.
84. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. Две задачи обработки порошковых материалов: дозирование и уплотнение // Сибирский физико-технический журнал. — № 5. — 1993. — С. 94—101.
85. А. с. № 1049750 (СССР). Весовой дозатор / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. и др. — бюл. № 39, 1983 г.
86. А. с. № 1080024 (СССР). Дозатор сыпучих материалов / Бобряков А.П., Минтюков П.Д., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 10, 1984 г.
87. А. с. № 1121587 (СССР). Устройство для подачи легкосыпучего материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. и др. — бюл. № 40, 1984 г.
88. А. с. № 1270578 (СССР). Весовой дозатор / Бобряков А.П., Захаревич Э.В., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 42, 1986 г.
89. А. с. № 1428930 (СССР). Устройство для дозирования легкосыпучих материалов / Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. — 1986.
90. А. с. № 1434264 (СССР). Дозатор порошкового материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 40, 1988 г.
91. А. с. № 1495206 (СССР). Устройство для дозирования порошковых материалов / Бобряков А.П., Захаревич Э.В., Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. — бюл. № 27, 1989 г.
92. А. с. № 1668220 (СССР). Бункер для трудносыпучего материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 29, 1991 г.
93. А. с. № 1699113 (СССР). Устройство для подачи порошкообразного материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — 1991
94. Ревуженко А.Ф. О смешивании сухих порошковых материалов // Вопросы атомной науки и техники. — 1982. — № 2(11). — С. 28—33.
95. Ревуженко А.Ф. Кинетика смешивания порошковых материалов // Вопросы атомной науки и техники. — 1983. — № 1(12). — С. 31—35.
96. Ревуженко А.Ф. Принципы создания идеальных смесителей порошковых материалов // Порошковая металлургия. — 1989. — № 4. — С. 1—5.
97. A.P. Bobryakov, V.I. Kramarenko, A.Ph. Revuzhenko, E.I. Shemyakin Theoretical models of powder mixing // International Conference on Powder Metallurgy, Wembley Conference Centre, London, UK, Vol. 3, The Institute of Metals, 1990.
98. Ревуженко А.Ф. О самом эффективном процессе смешения порошковых материалов // Ж. Прикл. мех. и техн. физики. — 1994. — № 3. — С. 156—168.
99. А. с. № 1172582 (СССР). Способ смешивания сыпучих материалов и устройство для его осуществления / Безродный В.Г., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 30, 1985 г.

100. А. с. № 1197713 (СССР). Способ смешивания сыпучих материалов / Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И., Бобряков А.П. и др. — бюл. № 46, 1985 г.
101. А. с. № 1326324 (СССР). Устройство для смешивания сыпучих материалов / Бобряков А.П., Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 28, 1987 г.
102. А.с.№ 1492524 (СССР), Устройство для смешивания сыпучих материалов / Безродный В.Г., Бобряков А.П., Дворянинов В.Н., Ревуженко А.Ф., Соломенцев С.Ю., Фиттихова Р.Ф. — 1989.
103. А. с. № 1202706 (СССР). Способ уплотнения порошковых материалов / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 1, 1986 г.
104. А.с.№ 1057383 (СССР). Устройство для укладки легко-повреждаемых предметов / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 44, 1983 г.
105. Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. О псевдовязкости сыпучих сред // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 3. — С. 18—26.
106. А.с.№ 1167803 (СССР). Устройство для гравитационного разделения частиц / Бобряков А.П., Бочкарев Г.Р., Ревуженко А.Ф. и др. — 1984.
107. А.с.№ 1311790 (СССР). Устройство для разделения сыпучего материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. и др. 1985.
108. А.с.№ 1199452 (СССР). Способ получения композиционных заготовок и устройство для его осуществления / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 47, 1985 г.
109. А.с.№ 1669623 (СССР). Устройство для поперечной прокатки / Афиногенов Ю.А., Бобряков А.П., Жигалкин В.М., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. — бюл. № 30, 1991 г.
110. А.с.№ 1101696 (СССР). Датчик измерения касательных напряжений / Бобряков А.П., Захаревич Э.В., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 25, 1984 г.
111. А.с.№ 1132192 (СССР). Устройство для испытания образцов сыпучих материалов / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 48, 1984 г.
112. А.с.№ 1308879 (СССР). Устройство для испытаний сыпучих материалов / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 17, 1987 г.
113. А.с.№ 1317309 (СССР). Способ измерения скорости распространения трещины в твердых материалах / Бобряков А.П., Грибанов В.Г., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 22, 1987 г.
114. А.с.№ 1332187 (СССР). Устройство для испытания образцов сыпучих материалов / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 31, 1987 г.
115. А.с.№ 1352302 (СССР). Способ испытания на склонность к слеживаемости сыпучих материалов / Бобряков А.П., Пронин В.Н., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 42, 1987 г.
116. А.с.№ 1416896 (СССР). Способ определения когезионной прочности мелкодисперсных сыпучих материалов / Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 30, 1988 г.
117. А.с.№ 1485046 (СССР). Датчик измерения касательных напряжений / Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 21, 1989 г.
118. А.с.№ 1534369 (СССР). Способ исследования механических свойств порошковых материалов и устройство для его осуществления / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 1, 1990 г.
119. А.с.№ 1582078 (СССР). Способ определения реологических характеристик неупругих материалов / Ревуженко А.Ф. — бюл. изобр. № 28, 1990 г.
120. А.с.№ 1755114 (СССР). Способ реометрического исследования неупругих материалов / Ревуженко А.Ф. — бюл. № 30, 1992 г.
121. А.с.№ 620637 (СССР). Дренажное окно тубинговой крепи / Кулаков В.Н., Кулаков Ю.Н., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 31, 1978 г.
122. А.с.№ 625059 (СССР). Способ ведения закладочных работ / Назаров Н.Г., Кулаков В.Н., Ревуженко А.Ф. — бюл. № 35, 1978 г.
123. А.с.№ 857509 (СССР). Устройство для выпуска сыпучих материалов / Тишков А.Я., Гендлина Л.И., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 31, 1981 г.
124. А.с.№ 877002 (СССР). Способ проходки горных выработок / Шемякин Е.И., Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. и др. — бюл. № 40, 1981 г.

125. А.с.№ 945431 (СССР). Способ определения напряжений в массиве горных пород / Аксенов В.К., Курленя М.В., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 27, 1982 г.
126. А.с.№ 1418476 (СССР). Податливый анкер / Стажевский С.Б., Шемякин Е.И., Ревуженко А.Ф. и др. — бюл. № 31, 1988 г.
127. А.с.№ 1460262 (СССР). Способ возведения искусственного целика при разработке пласта полезного ископаемого / Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Фрейдин А.М., Усков В.А. — бюл. № 7, 1989 г.
128. А.с.№ 1752685 (СССР). Способ выпуска и транспортирования сыпучих материалов и вибрационный питатель для его осуществления / Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Кашин Ю.М. — бюл. № 29, 1992 г.
129. Ревуженко А.Ф. Функции со структурой — математические объекты для описания пластической деформации твердых тел // Известия вузов. Физика. — № 11. — 1995. — С. 70—85.
130. Ревуженко А.Ф. О математическом аппарате для описания структурных уровней геосреды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1997. — № 3. — С. 22—36.
131. Ревуженко А.Ф. Гиперкомплексные числа в механике сред со структурой // Физическая мезомеханика. — 1998. — Т. 1. — № 1. — С. 119—127.
132. Ревуженко А.Ф. О методах нестандартного анализа в механике твердого тела // Физическая мезомеханика. — 1999. — Т. 2. — № 6. — С. 51—62.
133. Ревуженко А.Ф. Теория пластичности и нестандартный анализ // Труды XVI Межреспубликанской конференции „Численные методы решения задач теории упругости и пластичности“, Новосибирск, 6—8 июля 1999 г. — Новосибирск: изд-во СО РАН, 1999. — С. 140—145.
134. Ревуженко А.Ф. Обладает ли понятие эквивалентности множеств свойством транзитивности? // Труды XVI Межреспубликанской конференции „Численные методы решения задач теории упругости и пластичности“, Новосибирск, 6—8 июля 1999 г. — Новосибирск: изд-во СО РАН, 1999. — С. 181—182.
135. А.с.№ 1778626 (СССР). Устройство для определения реологических свойств материала / Ревуженко А.Ф., Бобряков А.П. — бюл. № 44, 1992 г.
136. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Стохастические модели в задачах локализованной деформации сыпучих сред в радиальных каналах // ФТПРПИ. — № 1. — 2000. — С. 12—20.
137. Аннин Б.Д. Механика деформируемого твердого тела в СО РАН в 1988-1997 годы // ПМТФ. — 1997. — Т. 38. — № 4. — С. 28—45.
138. Gudehus, G. A comprehensive constitutive equation for granular materials // Soils and Foundations. — 1996. — 36(1). — P. 1—12.
139. Гольдин С.В., Колесников Ю.И., Полозов С.В. Распространение акустических волн в грунтах в условиях изменяющегося сдвигового напряжения (вплоть до разрушения образцов) // Физическая мезомеханика. — 1999. — Т. 2. — № 6. — С. 105—114.
140. Григорян С.С., Иоселевич В.А. Механика грунтов. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. — Т. 3. — М.: Наука, 1972. — С. 203—226.
141. Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г. Глубинная геодинамика. — Новосибирск: изд-во СО РАН, 1994. — 299 с.
142. Думанский А.В., Ишлинский А.Ю. О закономерностях растрескивания коры деревьев // Доклады АН СССР. — 1952. — 84. — № 1. — С. 161—164.
143. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 232 с.
144. Ишлинский А.Ю. О плоском движении песка // Укр. матем. ж. — 1954. — 6. — № 4. — С. 430—441.
145. Kolymbas D. Introduction to Hypoplasticity, A.A.Balkema (Rotterdam) Brookfield/2000, p. 94.
146. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. — М.: Наука, 1990. — 207 с.
147. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. — М.: Наука, 1984. — 256 с.

148. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязко-пластических сред. — М.: Изд-во Московского Государственного Университета, 1971. — 113 с.
149. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
150. Мруз З. Неассоциированные законы течения в теории пластичности // Механика (период. сб. перев. ин.статей). — 1963. — № 4. — С. 123—138.
151. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
152. Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией // Известия АН СССР. Физика Земли. — 1977. — № 5. — С. 22—37.
153. Николаевский В.Н. Обзор: земная кора, дилатансия и землетрясение / Механика очага землетрясения, М.: Мир, 1982. — С. 133—215.
154. Николаевский В.Н. Современные проблемы механики грунтов / Определяющие законы механики грунтов. — М.: Мир, 1975. — С. 210—229.
155. Овчинников В.М., Адушкин В.В., Ап В.А. О скорости относительного вращения внутреннего ядра Земли // Доклады АН. — 1998. — Т. 362. — № 5. — С. 1000—1003.
156. Панин В.Е. Современные проблемы пластичности и прочности твердых тел // Известия вузов. — 1998. — № 1. — С. 7—34.
157. Парийский Н.Н. Земные приливы и внутренне строение Земли // Известия АН СССР. Серия геофизика. — 1963. — № 2. — С. 193—215.
158. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. — М.: Недра, 1986. — 301 с.
159. Роско К. Значение деформаций в механике грунтов // Механика (период. сб. перев. иностран. статей). — 1971. — № 3. — С. 91—145.
160. Садовский М.А. Об естественной кусковатости горных пород // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4 — С. 829.
161. Сорохтин О.Г., Ушаков С.А. Глобальная эволюция Земли. — М.: Изд-во Московского Государственного Университета, 1991. — 446 с.
162. Сорохтин О.Г., Ушаков С.А. Происхождение Луны и ее влияние на глобальную эволюцию Земли. — М.: Изд-во Московского Государственного Университета, 1989. — 108 с.
163. Титов В.М., Мерзиевский Л.А., Фадеенко Ю.И., Швецов Г.А. Высокоскоростное метание твердых тел // Физика горения и взрыва. — 1987. — Т. 23. — № 5. — С. 77—91.
164. Фомин В.М., Киселев С.П., Руев Г.А., Трунев А.П., Шавалиев М.Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. — Новосибирск: В О Наука Сибирская издательская фирма, 1992. — 261 с.
165. Христианович С.А. Избранные работы. — М.: Наука, изд-во МФТИ, 1998. — 336 с.
166. Черноулько Ф. Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.
167. Шемякин Е.И. О хрупком разрушении твердых тел // МТТ. — № 2. — 1997. — С. 145—150.
168. Шемякин Е.И. Очерки геомеханики (горное давление и основы механики горных пород) // Научные сообщения ИГД им. А.А.Скочинского. — В. 313/99. — С. 7—38.
169. Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984. — 446 с.
170. Шафаревич И.Р. О некоторых тенденциях развития математики. Соч. т. 2. М.: Феникс, 1994. — С. 459—464.
171. Новожилов В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды // ИПМ АН СССР, ЛГУ пр. № 215, Москва, 1983. — 56 с.
172. Блехман И.И., Мышкин А.Д., Пановко Я.П. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. Издание 2. — М.: Наука, 1990. — 360 с.
173. Альбеверио С., Фенстад Й., Хуэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. — М.: Мир, 1990. — 616 с.
174. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 236 с.

175. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд.-во Института математики СО РАН им. С.Л.Соболева, 1999. — 384с.
176. Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей. — Новосибирск: Изд.-во Института математики СО РАН им. С.Л.Соболева, 1995. — 124с.
177. Robinson A. Non-standard Analysis. — North-Holland, Amsterdam, 1966. — 293 p.
178. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987. — 128 с.
179. Риман Б. О движении жидкого однородного эллипсоида / Сочинения. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1948. — 339 с.
180. Ламб Г. Гидродинамика. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947. — 923 с.
181. Жуковский Н.Е. Избранные сочинения. Т. 1. — М., Л.: ОГИЗ, 1948.
182. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 288 с.
183. Овсянников Л.В. Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости / Труды 5-й сессии Ученого Совета по народно-хозяйственному использованию взрыва. — Фрунзе: „Илим“, 1965. — С. 34—42.
184. Овсянников Л.В. Об одном случае неустановившегося движения со свободной границей // Динамика сплошной среды. — 1972. — Вып. 12. — С. 124—130.
185. Пухначев В.В. Малые возмущения плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипса // ПМТФ. — 1971. — № 4. — С. 53—62.
186. Невзглядов В.Г. Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру. — Владивосток: изд-во Дальневосточного государственного университета, 1970. — 257 с.
187. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. — М.: изд-во Московского государственного университета, 1969. — С. 698.
188. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
189. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. — М.:ВИНИТИ, 1972. — Т. 6. — 85 с.
190. Lee K.L., Seed H.B. Drained strength characteristics of sands // J. Soil Mech. and Found. — Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. — 1967. — 93. — № 6.
191. Жуков А.М., Работнов Ю.Н. Исследование пластической деформации при сложном нагружении // Инженерный сборник. — 1954. — Т. 18.
192. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. — М.: ИЛ, 1963. — 311 с.
193. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М., 1959. — 532 с.
194. Путилов К.А. Курс физики. — Изд. 3. — М.: Гос. учебно-педагог. изд., 1937. — 775 с.
195. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
196. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
197. Умов Н.А. Избранные сочинения. — М., Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1950. — 553 с.
198. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.—Л.: Объед.научно-техн. изд. НКТИ СССР, 1935.
199. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. — М., 1969. — Т. 2. — 863 с.
200. Кузьменко В.А. Новые схемы деформирования твердых тел. — Киев: Наукова думка, 1973. — 324 с.
201. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов. — М.: Metallurgia, 1960. — Т. 1. — 376 с.
202. Богданова-Бончева Н. Върху условието на пластичността при среди на Косера с вътрешно триене // Теоретична и приложна механика. — София. — 1974. — № 3. — С. 55—66.
203. Зак М.А. Неклассические проблемы механики сплошных сред. — Л.: изд. Ленинградского университета, 1974. — 120 с.
204. Mindlin R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. — Experiment Mechanics. — 1963. — Vol. 3. — P. 1—7. — рус. перевод. — Сб. Механика. — 1964. — № 4. — С. 115—128.

205. Коттрел А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. — М.: Металлургиздат, 1958. — 267 с.
206. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. — М.: Гос. изд. технико-теоретич. лит-ры, 1954. — 275 с.
207. Гольштейн М.Н. Механические свойства грунтов. — М.: Стройиздат, 1971. — Изд. 2. — 367 с.
208. Костецкий Б.И. Трение, смазка и износ в машинах. — Киев: Техніка, 1970. — 395 с.
209. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.
210. Cisserrat E.F. Theorie des corps defarmables. Hertman, Paris, 1909.
211. Ставрогин А.Н., Ширкес О.А. Явление последействия в горных породах, вызванное предшествующей необратимой деформацией // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1986. — № 4.
212. Влох Н.П., Липин Я.И., Сашурин А.Д. Исследование остаточных напряжений в крепких горных породах. — Современные проблемы механики горных пород. — Л.: Наука, 1972.
213. Ржевская С.В., Петроченков Р.Г. Изменение прочностных свойств пород в куске при выемке их из массива. — исследование физических свойств горных пород и процессов горного производства. — М.: 1984.
214. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: Теория и приложения. — М.: Наука, 1982.
215. Высочин В.Д. Экспериментальное определение остаточных напряжений в стальной проволоке. — Стальные канаты. — Киев: Техника, 1969.
216. Chrysochoos A., Maisonneuve O., Martin G., Caumon H., Chezeaux J.C. Plastic and dissipated work and stored energy // Nuclear Engineering and Design. — 1989. — 114. — № 3.
217. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М.: Мир, 1971.
218. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1979. — 271 с.
219. Thiercelin M. Parameters controlling rock indentation // Rock at Great Depth. — Rotterdam: Balkema, 1989.
220. Тажибаев К.Т. Условия динамического разрушения горных пород и причины горных ударов. — Фрунзе: Илим, 1989. — 180 с.
221. Воробьев А.А. Равновесие и преобразования видов энергии в недрах. — Томск: Изд университета, 1980.
222. Сбоев В.М. Исследование динамических процессов в массиве горных пород на глубоких подземных предприятиях // Изв. АН СССР, Физика Земли. — 1982. — № 10.
223. Протодяконов М.М. Давление горных пород и рудничное крепление. — М.: Гостехиздат, 1931. — Ч. 1.
224. Кузнецов Г.Н., Будько М.Н., Васильев Ю.И., Шклярский М.Ф., Юревич Г.Г. Моделирование проявлений горного давления. — Л.: Недра, 1968. — 279 с.
225. Райхель В., Конрад Д. Бетон. — М.: Стройиздат. — Ч. 1. — 1979. — 111 с. — Ч. 2. 1981. — 112 с.
226. Аньшаков А.С., Задворнев Г.А., Шпотаков В.И., Якунин В.М. Получение композитных материалов с помощью низкотемпературной плазмы // Изв. АН СССР, сер. техн. наук. — 1986. — № 16. — Вып. 3.
227. Христианович С.А. Об основах теории фильтрации // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1989. — № 5.
228. Шоу М., Эйвери Ж. Теоретические основы инженерных расчетов 1986 № 3 С. 21—33.
229. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. — Л.: Недра, 1977. — 503 с.
230. Фисенко Г.Л. В кн. Механика горных пород и маркшейдерское дело. — М., 1959. — С. 91—100.

231. Писаренко Г.С., Бабенко А.Е. Напряженно-деформированное состояние трехслойной цилиндрической оболочки под внутренним давлением // Проблемы прочности. — 1977. — № 3.
232. Ильин Л.А., Лобкова Н.А. Упругая деформация и проскальзывание слоев рулонированной цилиндрической оболочки при нагружении внутренним давлением // ПМ. — 1981. — Т. 17. — № 6.
233. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975, 399 с.
234. Шемякин Е.И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений руды и угля // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1975. — № 6.
235. Фисенко Г.Л. О взаимодействии крепи и пород в капитальных горных выработках // Труды ВНИМИ. — 1971. — № 82.
236. Либерман Ю.М. Давление на крепь капитальных горных выработок. — М.: Наука, 1969. — 119 с.
237. Линьков А.М. Учет запредельных деформаций в плоской задаче о круглой выработке // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1977. — № 5.
238. Алимжанов М.Т. Учет неоднородности свойств пород при исследовании механических процессов вокруг глубокой выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1977. — № 5.
239. Амусин Б.З. Прогнозирование устойчивости капитальных выработок у учетом постепенного разрушения пород в зоне неупругих деформаций // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1977. — № 5.
240. Шемякин Е.И., Курленя М.В., Опарин В.Н., Фисенко Г.Л. и др. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1986. — Ч. 1. — № 3.
241. Шемякин Е.И., Курленя М.В., Опарин В.Н., Фисенко Г.Л. и др. Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок // ДАН СССР. — 1986. — Т. 289. — № 5.
242. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. — Изд. 2, кн. 2. — М.: Изд. литературы по строительству, 1973. — 415 с.
243. Цытович Н.А. Механика грунтов. — Изд. 2. — М.: Высшая школа, 1973, 279 с.
244. Инструкция по проектированию элеваторов, зерноскладов и других предприятий, зданий и сооружений по обработке и хранению зерна, СН-261-77. — М.: Стройиздат, 1977. — 45 с.
245. Определяющие законы механики грунтов. Под ред. Николаевского В.Н., редакторы серии Ишлинский А.Ю., Г.П.Черный. — М.: Мир, 1975. — 230 с.
246. Стажевский С.Б. О второй форме выпуска сыпучих материалов из бункеров // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — № 5.
247. Крыжановский А.Л., Вильгельм Ю.С., Рахманов Т. Определение угла трения сыпучих грунтов в трехосной аппаратуре и сдвиговых приборах // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1983. — № 6.
248. Алферов К.В., Зенков Р.Л. Бункерные установки. — М.: Машгиз, 1955. — 308 с.
249. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
250. Janssen H.A. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen, Zeitschrift Verein Deutscher Ingenieure, 39, 1895, s. 1045—1049.
251. Таймер О.Ф. Аварии Железобетонных силосов зерновых элеваторов // Trans ASME. — 1969. — № 2. — Серия В.
252. Гольштейн М.Н. О давлении грунта на несмещающиеся жесткие подпорные стенки / Вопросы земляного полотна и геотехники на железнодорожном транспорте. — Днепропетровск, 1978.

253. **Шихиев Ф.М., Варгин Н.Н.** О критических смещениях ограждений, приводящих к предельному напряженному состоянию в засыпке // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1971. — № 1.
254. **Баранов Д.С.** Общие и метрологические требования к датчикам давлений (мессдозам) и методы испытаний / Тензометрические приборы для исследования строительных конструкций. — М.: Стройиздат, 1971.
255. **Криворотов А.П.** О методике измерений давлений в грунтах // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1971. — № 1.
256. **Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.** Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
257. Альбом течения жидкости и газа / Составитель Ван-Дейк. — М.: Мир, 1986. — 181 с.
258. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
259. **Пригожин И.** От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985. — 230 с.
260. **Бобряков А.П.** Экспериментальное исследование закономерностей пластического деформирования сыпучих сред // Автореферат дисс.доктора технических наук. — Новосибирск, 1999.
261. **Cottrell A.H.** Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Clarendon Press, Oxford, 1953. — 223 p.
262. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. Изд. 2. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
263. **Соколовский В.В.** Теория пластичности. — М.: Высшая школа, 1969. — Изд. 3. — 608 с.
264. **Гячев Л.В.** Движение сыпучих материалов в трубках и бункерах. — М.: Машиностроение, 1968, 184 с.
265. **Гениев Г.А., Эстрин М.И.** Динамика пластической и сыпучей среды. — М.: Стройиздат, 1972, 216 с.
266. **Mroz Z., Drescher A.** Limit plasticity Approach to Some Cases of Flow Bulk Solids // Transactions of the ASME Paper №68-MH-23. — P. 1—8.
267. **Bransby P.L., Blair-Fish P.M.** Deformations near rupture surfaces in flowing sand // Geotechnique. — V. 25. — N 2. — P. 384—389.
268. **Mroz Z., Szymanski Cz.** Gravity flow of a granular materials in a converging channel // Archives of Mechanics. — 23. — 1971. — P. 897—917.
269. **Громов Н.П.** Теория обработки металлов давлением. — М.: Металлургия, 1978. — 360с.
270. **Ферхуген Дж. и др.** Земля. Введение в общую геологию. — 2. — М.: Мир, 1974. — 393 с.
271. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, под редакцией А.А.Уманского. — М.: Госстройиздат, 1960. — 599 с.
272. Космическая информация в геологии. — М.: Наука, 1983. — 536 с.
273. **Лурье А.И.** Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
274. **Черепанов Г.П.** О развитии трещин в сжатых телах // ПММ. — 1966. — Т. 30. — № 61. — С. 82—93.
275. **Палмер А., Райс Дж.** Рост поверхностей скольжения при постепенном оползании переуплотненной глины // Сб. пер. Механика. — 1974. — № 6.
276. **Баренблатт Г.И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. — 1961. — № 4. — С. 3—56.
277. **Крамаренко В.И.** Развитие линии скольжения в бруссе при изгибе // ПТМФ. — 1979. — № 2.
278. **Райс Д.** Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика. — Тр. III Межд. конгресса IUTAM. — М.: Мир, 1979. — С. 439—471.
279. **Шемякин Е.И.** Напряженно-деформированное состояние в вершине разреза при антиплоской деформации горных пород.
280. **Michalowski R.L.** Flow of Granular materials Through a Plane Hopper // Powder Technology. — 1984. — V. 39. — N 1.
281. **Steele M.C., Young John.** An Experimental Investigation of Over-Straining in Mild-Steel Thick-Walled Cylinders by Internal Fluid Pressure // Transactions of the ASME. — 1952. — Vol. 74. — N 3.

282. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
283. Рац М.В. Трещиноватость и свойства трещиноватых горных пород. — М.: Недра, 1970. — 160 с.
284. Рац М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. — М.: Наука, 1968. — 107 с.
285. Кулюкин А.М., Пономарев В.С., Ромашов А.Н. Некоторые закономерности разрушения в двухслойной модели // Прогноз землетрясений. — 1983—1984. — № 4.
286. Чернышев С.Н. Трещины горных пород. — М.: Наука, 1983. — 240 с.
287. Садовский М.А. О свойстве дискретности горных пород // Физика Земли. — 1982. — № 12.
288. Макаров Ю.И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. — М.: Машиностроение, 1973. — 215 с.
289. Монин А.С., Яглом А.М. Стохастическая гидромеханика. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1965. — Ч. 1. — 639 с.
290. Сципер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. — 472 с.
291. Litwiniszyn J. Application of Equation of Stochastic Processes to Mechanics of Loose Bodies // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. — 1956. — Vol. 8. — № 4.
292. Litwiniszyn J. Stochastic Methods in Mechanics of Granular Bodies, Springer-Verlag. — Wien-New York, 1974. — 92 p.
293. Осинов В.А. Модель дискретной стохастической среды в задачах деформирования и течения сыпучих материалов // ФТПРПИ. — 1992. — № 5. — С. 44—53.
294. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. Изд. 2. — М.: Наука, 1977. — 815 с.
295. Вегенер А. Происхождение Континентов и океанов. — М.: Наука, 1984. — 285 с.
296. Штауб Р. Механизм движений земной коры в приложении к строению земных горных систем. — Л., М.: Главная редакция геологоразведочной и геофизической литературы, 1938. — 271 с.
297. Магницкий В.А. Внутренне строение и физика Земли. — М.: Недра, 1965. — 379 с.
298. Макдональд Г.Дж. Ф. Приливное трение // Приливы и резонансы в Солнечной системе. — М.: Мир, 1975. — С. 9—96.
299. Шейдеггер А. Основы геодинамики. — М.: Недра, 1987. — 383 с.
300. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. — М.: Наука, 1969. — 244 с.
301. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981. — 638 с.
302. Середин Б.Н. Приливный энергомеханизм движений и деформаций литосферы (системный анализ) // Системные исследования и разработки в геологии. — М.: Наука, 1985. — С. 120—128.
303. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. — Минск: Наука и техника, 1987. — 144 с.
304. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
305. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — В кн. А.Н.Крылов. Собрание трудов. — Т. 7. — М., Л.: изд. АН СССР, 1936. — 532 с.
306. Ламб Г. Гидромеханика. — М., Л.: ОГИЗ, 1947. — 923 с.
307. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. — М.: Мир, 1964. — 384 с.
308. Хайкин С.Э. Физическая механика. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947. — 574 с.
309. Гидромеханика невесомости (под редакцией А.Д.Мышкиса). — М.: Наука, 1976. — 504 с.
310. Налимов В.И., Пухначев В.В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. — Новосибирск, 1975. — 173 с.
311. Arvid M. Johnson, Sumaryanto Y. Martosudarmo. Discrimination between inertial and macro-viscous flows of fine-grained debris with a rolling-sleeve viscometer // *Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction, and Assessment* (edited by Cheng-lung Chen). — ASCE. — 1997. — P. 229—238.
312. Фракталы в физике (под редакцией Л.Пьетронеро, Э.Тозатти). — М.: Мир, 1988. — 670 с.
313. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
314. Кротов В.Р., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969. — 288 с.

315. **Кротов В.Ф., Бровман М.Я.** Экстремальные процессы пластического деформирования металлов // Известия АН СССР, Механика и машиностроение. — 1962. — № 3. — С. 148—153.
316. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — Издание 4. — 543 с.
317. **Йех Томас Дж.** Об аксиоме выбора / Справочная книга по математической логике. Ч. 2. Теория множеств. — М.: Наука, 1982. — С. 35—63.
318. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
319. **Елисеев В.И.** Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. — НИАТ, 1990. — 190 с.
320. **Смирнова Л.И.** Обобщенные пространства Аппеля эллиптического типа. В межвузовском тематическом сб. Неевклидова геометрия и теория чисел. — Калинин: Изд-во Калининского университета, 1978. — С. 44—54.
321. **Розенфельд Б.А.** Неевклидовы геометрии. — М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955. — 434 с.
322. **Казанова Г.** Векторная алгебра. — М.: Мир, 1979. — 117 с.
323. **Бурбаки Н.** Основные структуры анализа. Кн.1 Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
324. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
325. **Лузин Н.Н.** Теория функций действительного переменного. — М.: Учпедгиз, 1948. — 318 с.
326. **Шамбадаль П.** Развитие и приложение понятия энтропии. — М.: Наука, 1967. — 278 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	6
Глава 1. ТЕОРИЯ ОДНОРОДНЫХ (АФФИННЫХ) ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ	9
§ 1.1. Постановка задачи	9
§ 1.2. Однородные сдвиговые течения	11
1.2.1. Суперпозиция простых сдвигов	11
1.2.2. Эллиптические и гиперболические течения	13
1.2.3. Пространственные течения	18
Глава 2. ДИЛАТАНСИЯ И ПЛАСТИЧНОСТЬ СЫПУЧИХ ТЕЛ ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ	24
§ 2.1. Прибор однородного сдвига	24
§ 2.2. Дилатансия	26
§ 2.3. Пластичность	33
§ 2.4. Нагружение с изломами траекторий	36
Глава 3. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОВОРОТОМ ОСЕЙ С ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ	43
§ 3.1. Условия реализации сложного нагружения в случае плоской деформации.	43
§ 3.2. Прибор сложного нагружения. Методика и результаты	52
§ 3.3. Сложное нагружение пространственного типа	60
Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД	62
§ 4.1. Линии тока энергии в деформируемой среде	62
§ 4.2. Векторный потенциал поля напряжений	67
§ 4.3. Упруго-пластическая модель среды с разупрочнением.	73
§ 4.4. Предельное равновесие сыпучей среды с нарушенной структурой	89
§ 4.5. Кинематика деформирования идеально сыпучей среды	93
§ 4.6. Математические модели деформирования сыпучих сред	97
Глава 5. ГОРНЫЙ МАССИВ КАК СРЕДА С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ ЭНЕРГИИ	121
§ 5.1. Экспериментальная модель горной породы	121
§ 5.2. Математические модели	127
5.2.1. Деформации и микродеформации. Условия их совместности	128
5.2.2. Напряжения и микронапряжения. Условия их совместности	135
5.2.3. Основное энергетическое тождество	141

5.2.4. Замкнутая система уравнений	145
§ 5.3. Структурно-дилатансионная прочность горных пород	147
Глава 6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ	151
§ 6.1. Некоторые тестовые задачи	151
§ 6.2. Точные решения уравнений идеальной пластичности	152
§ 6.3. Точные решения уравнений предельного состояния среды с внутренним трением	158
§ 6.4. Пластические модели в задачах упругого деформирования рулонированных оболочек	160
§ 6.5. Напряженно-деформированное состояние разупрочняющегося массива вокруг выработки	168
§ 6.6. Учет дилатансии в основных справочных формулах механики сыпучих сред	179
§ 6.7. Численные эксперименты по определению коэффициента бокового распора сыпучей среды	181
§ 6.8. Исследование задачи Янсена	186
§ 6.9. Давление сыпучих материалов на податливые ограждающие конструкции.	196
Глава 7. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ	201
§ 7.1. Алгоритм экспериментального получения упорядоченных структур	202
7.1.1. Постановка задачи.	202
7.1.2. Алгоритм.	203
§ 7.2. Блочная структура, возникающая при простом сдвиге	206
§ 7.3. Полигональные структуры, возникающие при двухосном растяжении	210
§ 7.4. Структуры, возникающие при сложном нагружении материалов со сцеплением	213
7.4.1. Полигональные структуры	213
7.4.2. Вихревые структуры	214
§ 7.5. Структуры, возникающие при сложном нагружении идеально сыпучих материалов.	216
7.5.1. Пространственно-временная структура, связанная с локализацией по системам плоскостей	218
7.5.2. Системы спиральных линий скольжения	220
7.5.3. Турбулентное пластическое течение.	223
7.5.4. Структуры, связанные с линиями скольжения типа овалов Кассини и лемнискаты Бернулли	225
7.5.5. Структуры, связанные с локализацией усталостного типа	227
§ 7.6. Автомодельные структуры	228
§ 7.7. Некоторые структуры, возникающие под действием массовых сил	234
Глава 8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	236
§ 8.1. Нелокальные меры конечных деформаций.	236
§ 8.2. Вариационные постановки краевых задач локализации пластической деформации	245
§ 8.3. Локализация в условиях стесненного сдвига	253
§ 8.4. Течения в радиальных каналах с локализацией	262
§ 8.5. Деформирование блочной среды вокруг выработки	268
Глава 9. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ.	272

§ 9.1. Катастрофические последствия длительных слабых воздействий на сыпучую среду	273
§ 9.2. Стохастическая модель формирования полигональных систем трещин в горных породах	277
§ 9.3. Смешение сыпучих (порошковых) материалов	283
9.3.1. Постановка задачи.	284
9.3.2. Идеальный процесс смешивания.	285
9.3.3. Принципы реализации идеального процесса смешивания.	289
9.3.4. Пример технической реализации	290
9.3.5. Кинетика процесса смешивания	297
§ 9.4. Стохастическая модель локализованного течения в радиальных каналах.	302
Глава 10. ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ И НАПРАВЛЕННЫЙ ПЕРЕНОС МАСС ЗЕМЛИ.	307
§ 10.1. Эффект направленного переноса масс при сложном нагружении	307
§ 10.2. Приливное деформирование как процесс сложного нагружения небесных тел	312
§ 10.3. Кинематический метод экспериментального моделирования приливных волн	313
§ 10.4. Сравнение кинематической и динамической моделей	315
§ 10.5. Роль твердого ядра	319
§ 10.6. Переход к новому механизму переноса масс при увеличении высоты приливной волны.	321
§ 10.7. Трехмерные задачи. Динамическая модель.	322
Глава 11. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ.	330
§ 11.1. Псевдовязкость сыпучих сред и задачи обогащения полезных ископаемых.	330
§ 11.2. Точное дозирование порошковых материалов	337
§ 11.3. Дилатансионный способ уплотнения порошковых материалов.	338
§ 11.4. Образование шара из свободного объема неньютоновской капиллярной жидкости.	340
§ 11.5. Дополнительные средства экспериментального исследования определяющих уравнений сплошных сред	345
§ 11.6. Некоторые прикладные задачи горного дела	348
§ 11.7. Приложения эффектов сложного нагружения для обработки неупругих материалов.	349
Глава 12. МЕТОДЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	352
§ 12.1. Нестандартные математические объекты для описания структурных уровней деформирования сплошных сред	354
12.1.1. Постановка задачи	356
12.1.2. Функции со структурой	357
12.1.3. Линейные функции	360
12.1.4. Нелинейные функции	361
12.1.5. Неопределенные интегралы от функций со структурой	362
12.1.6. Определенные интегралы от функций со структурой.	364
12.1.7. Иерархия структурных уровней	367
§ 12.2. Вариационные задачи	369
12.2.1. Условия стационарности	369
12.2.2. Примеры	373

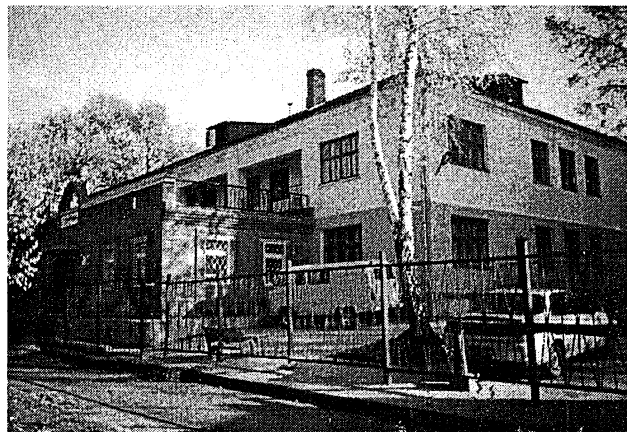
§ 12.3. Элементарный носитель слабых разрывов и гиперкомплексные числа	377
12.3.1. Элементарный носитель слабых разрывов.	377
12.3.2. Двойные действительные числа	379
12.3.3. Двойные комплексные числа	380
12.3.4. Многомерные числовые системы.	383
12.3.5. Дифференциальные уравнения	388
§ 12.4. Количественные характеристики степени значимости гипотез, принимаемых в моделях деформируемых сред	391
12.4.1. Характеристики , основанные на понятии мощности бесконечного множества	392
12.4.2. Количественная характеристика бесконечных множеств, более тонкая, чем мощность	394
12.4.3. Характеристики гипотез, полученные методами нестандартного анализа . .	402
ЛИТЕРАТУРА.	409

СИБИРСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ ИНСТИТУТ

Лицензия № 16-64, Государственная аккредитация (свидетельство № 25-0817)

Сибирский независимый институт основан в 1992 году группой известных ученых и представителей деловых кругов г. Новосибирска. Среди учредителей Института — торгово-промышленная компания „Сибирский тракт“, региональный акционерный банк „Новосибирсквнешторгбанк“, Сибирское отделение Российской Академии медицинских наук. Институт является негосударственным высшим учебным заведением, в 1999 году прошел Государственную аттестацию и аккредитацию. Институт имеет широкие международные связи, преподаватели и студенты проходят стажировку за рубежом.

В СНИ работают лучшие преподаватели вузов г. Новосибирска, ведущие ученые Сибирского отделения РАН, члены академий, профессора известных зарубежных университетов. Более 60% преподавателей имеют ученые степени доктора и кандидата наук. Выпускники Института работают по специальности или продолжают обучение по избранному профессиональному направлению, в том числе за рубежом. Широка география трудоустройства выпускников СНИ — это высшие учебные заведения города, государственные и частные промышленные, финансовые, коммерческие организации. Среди них Новосибирский государственный университет, технический университет, медицинская академия, педагогический университет, муниципальные школы, гимназии, „Сибирская ярмарка“, авиакомпания „Сибирь“, отделение Федерального казначейства, кадровое агентство „Имикор“, переводческое агентство „Аум“, „Интурист“ и др. Институт осуществляет научно-исследовательскую и издательскую деятельность в области лингвистики, психологии, экономики, теоретической и прикладной математики.



Факультет	Иностранных языков	Психологии	Бизнес	Экономический
Направление	„Лингвистика“ (английский, немецкий, французский)	„Психология“	„Менеджмент“	„Экономика“ (финансы, денежное обращение и кредит; внешнеэкономическая деятельность; экономика и право)
Специальность	Лингвистика и межкультурная коммуникация. Лингвист. Переводчик	Психолог	Менеджер	Финансы и кредит; бухгалтерский учет и аудит; мировая экономика; маркетинг; коммерция; экономист; маркетолог; коммерсант
Вступительные экзамены:	иностранный язык (устно и письменно), русский язык (тестирование)	русский язык и литература (сочинение), психология (тестирование личностных качеств)	математика (тестирование), русский язык и литература (тестирование)	математика (тестирование), русский язык и литература (тестирование)

Форма обучения: очная, заочная.

По вопросам обучения, сотрудничества и приобретения изданий Института обращайтесь по адресу:

630082 г. Новосибирск-82, ул. Северная, 23/1 (ст. метро „Заельцовская“)
ТЕЛЕФОНЫ: приемной комиссии: (3832) 903-441, приемной ректора: (3832) 903-531,
для справок: (3832) 281-486. ФАКС: (3832) 903-531; e-mail: root@isu.nsk.su,

Научное издание

Ревуженко Александр Филиппович

МЕХАНИКА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД И НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

Художник В.Н. Морошкин

Компьютерная верстка Т. В. Велигжанина

ЛР № 020618 от 13.08.97

Подписано в печать 14.04.2000. Формат 84 × 108/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 26,75. Уч.-изд. л. 26. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательство Новосибирского университета
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 35

Отпечатано в типографии Сибирского издательско-полиграфического
и книготоргового предприятия „Наука“ РАН
630077, г. Новосибирск, ул. Станиславского, 25

Дом технической книги Сек №1

Авт. Ревуженко А. Ф. Доп. Нет

Механ. деформируемых сред



195631

166.00